সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান

বাক্যকলন

সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান

বাক্যকলন

রমাপ্রসাদ দাস
দর্শন বিভাগ
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

SANKETIK YUKTIVIJNAN—VAKYA KALAN
RAMAPRASAD DAS

প্রথম প্রকাশ : মে, ১৯৭৮

প্রকাশক :
পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
৬এ, রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার
কলিকাতা-৭০০০১৩

মুদ্রক :
সুরেশ দত্ত
মডার্ন প্রিন্টার্স
১২, উল্টাডাঙ্গা মেইন রোড
কলিকাতা-৭০০০৬৭

প্রচ্ছদ : শ্রীবিমল দাস
রেখাচিত্র : শ্রীহেমকেশ ভট্টাচার্য

Published by PROF. PRADYUMNA MITRA, Chief Executive Officer, West Bengal State Book Board under the Centrally Sponsored Scheme of production of books and literature in regional language at the University level, in the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

সন্দীপনা, সোমনাথ-কে

মুখবন্ধ

কেবল বাক্যকলন নিয়ে এত বড় একটা বই? এ প্রশ্ন অনেকের মনে উঠতে পারে। কাজেই এ বইর আয়তন সম্পর্কে কৈফিয়ৎ দেওয়া দরকার মনে করছি।

নানাভাবে (সাংকেতিক) যুক্তিবিজ্ঞানে দীক্ষা দেওয়া যায়। যথা, গ্রন্থকার কেবল একটি বিশেষ যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি বেছে নিয়ে এবং যুক্তিবিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ঐ পদ্ধতির প্রয়োগ দেখিয়ে প্রত্যেকটি ক্ষেত্র বা শাখার সংক্ষিপ্ত পরিচয় দিতে পারেন। বস্তুত আর. সি. জেফ্‌রি (গ্রন্থপঞ্জি দ্রষ্টব্য) প্রধানত সত্যশাখী পদ্ধতি প্রয়োগ করে যুক্তিবিজ্ঞানের সব শাখা সম্পর্কে সংক্ষেপে কিছু কিছু বলেছেন। আর. জে. আকের্‌মান্‌ কেবল পরোক্ষ পদ্ধতি নিয়ে এ কাজ করেছেন। অথবা গ্রন্থকার একটি বিশেষ অঙ্গরাজ্য বেছে নিয়ে এবং সে অঙ্গরাজ্যের সীমানার মধ্যে নিজেকে আবদ্ধ রেখে তার অন্তর্গত প্রত্যেকটি বিষয়ের পুঙ্খানুপুঙ্খ আলোচনা করতে পারেন, প্রত্যেক শাখায় প্রযোজ্য সব যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতির প্রয়োগ দেখাতে পারেন। এ রীতি অনুসারে প্রত্যেকটি শাখা সম্পর্কে পৃথক পৃথক ভাবে বিশদ আলোচনা করা হয়।

এই বইতে আমরা শেষোক্ত রীতি অনুসরণ করেছি। যুক্তিবিজ্ঞানের একটি মৌল ও গুরুত্বপূর্ণ অংশ—বাক্যকলন—বেছে নিয়েছি এবং এ অংশে আলোচ্য যুক্তি প্রক্রিয়ায় যে সব বিকল্প নির্ণয় ও প্রমাণ পদ্ধতি সাধারণত প্রয়োগ করা হয় তার সব কয়টি আমরা বিশদভাবে আলোচনা করেছি। যথা, নির্ণয় পদ্ধতি হিসাবে আলোচনা করেছি: সত্যসারণী পদ্ধতি—এর বিভিন্ন রূপ, এর বিকল্প হিসাবে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি, বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতি, বিহিতাকারে রূপান্তর ও সত্যশাখী পদ্ধতি। তাছাড়া, সত্যাপেক্ষ বাক্যের পারস্পরিক সম্বন্ধও বিশদভাবে আলোচনা করেছি। অবরোহী প্রমাণ পদ্ধতি আলোচনা করার আগে মৌল যুক্তিবিধিগুলির যাথার্থ্য দেখাবার চেষ্টা করা হয়েছে। কেবল স্বতবোধ্যতার উপর নির্ভর করি নি। যেমন, বিচ্ছেদন বিধি হেন সহজবোধ্য বিধিরও যাথার্থ্য দেখাতে চেষ্টা করেছি সত্যসারণীর সাহায্য নিয়ে। সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানের অনেক বইতে, কোনো ব্যাখ্যা না করে, যাথার্থ্য সম্পর্কে সম্ভাব্য সংশয় নিরাস না করেই, কতকগুলি সূত্র (ফরমূলা) উল্লেখ করা হয় এবং এগুলি যান্ত্রিকভাবে প্রয়োগ করতে শেখানো হয়। কিন্তু বিশদভাবে ব্যাখ্যা না করে, সহজবোধ্য ও সাধারণবুদ্ধিগম্য করার চেষ্টা না করে, কোনো সূত্র এ বইতে উত্থাপন করা হয় নি। এর অনিবার্য পরিণতি হল বইটির কলেবর বৃদ্ধি।

সর্বশেষ অধ্যায়ে প্রিন্‌কিপিয়া মাথেমাটিকার বাক্যকলন তন্ত্রের পরিচয় দেওয়ার চেষ্টা করেছি। প্রিন্‌কিপিয়ার উপপাদ্য প্রমাণ সহজসাধ্য নয়। আর এসব উপপাদ্য প্রমাণ সম্পর্কে এমন নিয়ম রচনা করা যায় না যা যান্ত্রিকভাবে প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যাবে। এ জন্য বহু উপপাদ্যের (প্রায় ৬৫টি উপপাদ্যের) পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হয়েছে।

বইটি এত বিশাল আকার ধারণ করল, কিন্তু তবু এতে প্রিন্‌কিপিয়া তন্ত্রের মৌল বাক্যের স্বাতন্ত্র্য প্রমাণ, তন্ত্রবাক্যের সংগতি ও সম্পূর্ণতা প্রমাণ দেওয়া সম্ভব হল না। সর্বশেষ অধ্যায়ে এসব প্রমাণ দিতে পারব এ আশাতেই অধ্যায় ১৭তে CNF উপপাদ্য ও ANF উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়েছিল। কিন্তু বইটির আয়তন এত বড় হয়ে গেল যে এসব প্রমাণ দিতে আর ভরসা পেলাম না। এই বলে নিজেকে সান্ত্বনা দিচ্ছি যে এসব প্রমাণের যথার্থ স্থান হল অধিযুক্তিবিজ্ঞান।

* * *

একটা আপাতপ্রমাদ পণ্ডিত পাঠকদের পীড়ন করতে পারে। আপাতপ্রমাদটি এই ঃ লিপ্যন্তরের সূত্র (বা সংজ্ঞা) ও সমার্থতা সূত্রের মধ্যে লেখক কোনো পার্থক্য করে নি, "সংজ্ঞা" ও "সমার্থতা সূত্র" একার্থ হিসাবে প্রয়োগ করেছে। এ বিষয়ে আমার বক্তব্য হল এই। প্রথম ১৯টি অধ্যায়ের মধ্যে কোথাও সংজ্ঞা সম্পর্কে আলোচনার প্রয়োজন হয় নি। আর প্রথম থেকে সমনিবেশনের নিয়ম মেনে নেওয়া হয়েছে। কাজেই সংজ্ঞা ও সমার্থতা সূত্রের মধ্যে প্রভেদ না দেখালেও ক্ষতি হয় নি। সর্বশেষ অধ্যায়ে সংজ্ঞা আলোচনা কালে সংজ্ঞা ও সমার্থতা সূত্রের পার্থক্য আলোচনা করেছি (৪৫৩ পৃঃ দ্রষ্টব্য)।

এ প্রসঙ্গে '=' সম্পর্কে একটা কথা বলা দরকার। সংজ্ঞায় ছাড়া বাক্যকলনের কোথাও '=' প্রয়োগের প্রয়োজন নেই। কিন্তু এ চিহ্নটি আমরা নানা কাজে ব্যবহার করেছি। নিচের উদাহরণগুলি দেখলে বোঝা যাবে এ চিহ্নটিকে আমরা কত বিভিন্ন কাজে লাগিয়েছি।

(১) B only if $A =$ If B then A, (২) $1 \supset (0 \vee 0) = 1 \supset 0 = 0$

(৩) A_1 = Argument 1, (৪) $p = A \supset B$

প্রথম দৃষ্টান্তে '=' ব্যবহৃত হয়েছে সমার্থক অর্থে ; এ ক্ষেত্রে '='-এর পরিবর্তে পড়া যায় ঃ '—'কে রূপান্তর করে পাওয়া যাবে '—' (বা রূপান্তর করতে হবে'—'ত)। দ্বিতীয় দৃষ্টান্তে চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়েছে সমমান অর্থে ; এ ক্ষেত্রে '='-এর পরিবর্তে পড়া যায় ঃ — কে সরলীকরণ করে পাই —। তৃতীয় দৃষ্টান্তের বক্তব্য 'A_1' হল "Argument 1"-এর সংক্ষেপক। আর চতুর্থ দৃষ্টান্তের বক্তব্য ঃ 'p'-এর পরিবর্তে '$A \supset B$' বসাতে হবে বা বসানো হয়েছে।

উদ্ধৃতি চিহ্নের ছড়াছড়ি দেখে বোঝা যাবে উল্লেখ আর প্রয়োগের পার্থক্য সাধারণভাবে মেনে চলা হয়েছে। তবে '1' ও '0'-এর ক্ষেত্রে অনেক সময় উদ্ধৃতি চিহ্ন পরিহার করেছি। উদ্ধৃতি চিহ্ন থেকে মুক্ত রাখার জন্য উল্লেখ-করা বাক্যকে অনেক সময় পৃথক ছত্রে লিখেছি অথবা কোলন দিয়ে তারপর লিখেছি। যথা,

"প · ফ · ব · ভ" গঠিত হয়েছে 'প', 'ফ', 'ব' আর 'ভ' দিয়ে

এ বাক্য এভাবে লিখেছি

প · ফ · ব · ভ

গঠিত হয়েছে এ প্রতীকগুলি দিয়ে ঃ প, ফ, ব, ভ।

সত্যাপেক্ষ বাক্যের নাম সম্পর্কে একটা কথা। "*p* or *q*" আকারের বাক্যকে অনেকে disjunctive বাক্য বা disjunction বলে অভিহিত করেন। আমরা একে বৈকল্পিক বাক্য (alternative বাক্য বা alternation) বলে চিহ্নিত করেছি। আর যে আকারের বাক্যকে disjunctive বলে অভিহিত করা উচিত বলে মনে করেছি তার ("এমন নয় যে— এবং—" আকারের বাক্যের) নামকরণ করেছি প্রাতিকল্পিক বাক্য।

আর একটা কথা। অনেকে "If *p* then *q*" আকারের বাক্যকে implication আখ্যায়, আর "*q* if and only if *p*" আকারের বাক্যকে equivalence আখ্যায় অভিহিত করেন। এ আখ্যা দুটি বিভ্রান্তিকর বলে মনে হয়। আমরা প্রথম প্রকারের বাক্যকে প্রাকল্পিক (conditional) আর দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যকে দ্বিপ্রাকল্পিক (biconditional) বলে উল্লেখ করেছি। আর "implication" ও "equivalence" এ কথা দুটি প্রয়োগ করেছি অন্য অর্থে।

*　　　*　　　*

এ বইটি আমার "Logic of Truth-functions"-এর বাংলা অনুবাদ নয়। বস্তুত ঐ গ্রন্থের সঙ্গে এ বইর কোনো মিল নেই। আবার, এ বইটি আমার "নব্য যুক্তিবিজ্ঞান"-এর বৃহত্তর সংস্করণও নয়। তবে 'দর্শন' পত্রিকায় সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান বিষয়ে যেসব প্রবন্ধ লিখেছিলাম সেগুলির কিছু কিছু অংশ দুটি বইতেই স্থান পেয়েছে। ফলে এদের মধ্যে কোথাও কোথাও মিল দেখা যাবে।

যদি কোনো একটি গ্রন্থ এ বইকে প্রভাবিত করে থাকে তাহলে গ্রন্থটি কোয়াইন্‌-এর Methods of Logic। বহুদিন ধরে কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতকোত্তর শ্রেণীতে আমি এ্যামব্রোস্‌-ল্যাজারোবিট্‌স্‌, কোপি, সুপিস, হিউয়েস্‌-লন্‌ডি ও জেফ্রির বই (গ্রন্থপঞ্জি দ্রষ্টব্য) পড়িয়ে আসছি। এসব গ্রন্থও এ বইকে প্রভাবিত করে থাকতে পারে।

বাংলায় সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান আলোচনা করার মত পরিভাষা এখনও গড়ে ওঠে নি। ফলে প্রয়োজনমত পারিভাষিক শব্দ উদ্ভাবন করে নিতে হয়েছে। পরিভাষা তালিকার তারকাচিহ্নিত শব্দগুলি আমার রচনা, অন্যগুলি সংগৃহীত।

বানানের ব্যাপারে দু একটি কথা বলা দরকার। অন্ত বিসর্গ সর্বত্র বর্জন করেছি, আর কিছু (পারিভাষিক) শব্দের বানান সরল করার চেষ্টা করেছি। যথা, 'স্বতঃসত্য', 'পরতঃসাধ্য'র পরিবর্তে লিখেছি ঃ স্বতসত্য, পরতসাধ্য ; 'ডি মরগ্যান'-এর ('De Morgan'-এর) পরিবর্তে 'ডি মরগেন'।

*　　　*　　　*

যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ডঃ প্রণবকুমার সেন এ বইর ১—১৯ অধ্যায় আদ্যন্ত দেখে দিয়েছেন। তিনি যে সব পরামর্শ দিয়েছিলেন তা সাধ্যমত গ্রহণ করার চেষ্টা করেছি। এই বইর পাণ্ডুলিপি পরীক্ষা করে তিনি পর্ষদের কাছে যে প্রশংসনমুখর প্রতিবেদন পাঠিয়েছিলেন তা দেখে আমি অভিভূত হয়েছি। এ পাণ্ডুলিপি যে প্রতিকূলতার সম্মুখীন হয়েছিল ডঃ সেনের সোচ্চার অনুমোদন না পেলে তা অতিক্রম করা সম্ভব হত না। ডঃ সেনের কাছে আমি বিশেষভাবে ঋণী।

আর ঋণী, পর্ষদের মুখ্য প্রশাসনিক আধিকারিকের কাছে। এতদিন অধ্যাপক প্রদ্যুম্ন মিত্রকে কবি ও সমালোচক বলেই জানতাম। একজন সহৃদয় কলাকুশল প্রকাশক হিসাবে ওঁকে নতুন করে আবিষ্কার করলাম। গ্রন্থনা ও প্রকাশনার ব্যাপারে ওঁর সৃজনশীল উদ্যম, তৎপরতা ও তৎপরায়ণতা ছাড়া এ বই এ আকারে এত দ্রুত (প্রায় তিন মাসের মধ্যে) মুদ্রিত ও প্রকাশিত হতে পারত না। অধ্যাপক মিত্রের সহকারীদেরও আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই। যখনই চেয়েছি তখনই এরা সবাই সহযোগিতার হাত বাড়িয়ে দিয়েছেন।

আর সক্রিয় সহযোগিতা পেয়েছি মডার্ন প্রিণ্টার্স-এর শ্রীসুরেশ দত্তের কাছ থেকে। তাঁকে ও তাঁর প্রেসের কর্মীদের আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই।

ধন্যবাদ জানাই শিল্পী শ্রীবিমল দাস ও শ্রীহেমকেশ ভট্টাচার্যকে। শ্রীদাস এ বইর অঙ্গসজ্জার ভার নিয়েছিলেন। আর এ বইর অন্তর্গত রৈখিক চিত্রগুলি শ্রীভট্টাচার্যের আঁকা।

*　　　*　　　*

মূল পাণ্ডুলিপিতে ছিল প্রথম ১৯টি অধ্যায়। সর্বশেষ অধ্যায়টি ১-১৯ অধ্যায়ের মুদ্রণ শেষ হওয়ার মুখে, অনেক কাজের মধ্যে, তাড়াহুড়া করে লেখা। এ অধ্যায়ে কিছু কিছু ভুল থেকে যাওয়া সম্ভব। যে বিশ্রী ভুলটি নজরে পড়েছে তা এ অধ্যায়ের শেষাংশে সংশোধন করে দিয়েছি (৪৯৬ পৃঃ দ্রষ্টব্য)।

সব শেষে একটা আবেদন। সংকেতলিপিতে লেখা বইর নির্ভুল মুদ্রন সহজসাধ্য নয়। তারপর লেখককেই যদি প্রুফ্ সংশোধন করতে হয় তাহলে মুদ্রনপ্রমাদের সম্ভাবনা আরও বেড়ে যায়। ফলে এ বইতে কিছু মুদ্রনপ্রমাদ ঘটে থাকবে। এবং এমন আরও ভুল থাকতে পারে যার মূলে আছে লেখকের অনবধানতা। এ রকম কোনো ভুলভ্রান্তি যদি পাঠকের নজরে পড়ে তাহলে দয়া করে আমায় জানালে বাধিত হব ; পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে দেব।

দর্শন বিভাগ
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়
মে দিবস, ১৯৭৮

রমাপ্রসাদ দাস

সূচীপত্র

ভূমিকা : যুক্তি, যুক্তি-আকার ও বৈধতা

২

বাক্য : বাক্যের প্রকারভেদ

৩

সত্যাপেক্ষ বাক্য

৪

নিষেধক, সংযৌগিক ও বৈকল্পিক বাক্য

৫

দণ্ড ও বর্শা অপেক্ষক

৬

প্রাকল্পিক বাক্য

৭

দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য

৮

কেবল দণ্ড ও বর্শা দিয়ে বাক্য ব্যক্তকরণ

যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষা

১০

যৌগ সত্যসারণী ও প্রাথমিক যুক্তিবিধি

১১

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ : সত্যসারণী

১২
বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়

১৩
সাত প্রকার বাক্যসম্বন্ধ

১৪
বিভিন্ন সত্যাপেক্ষকের পারস্পরিক সম্বন্ধ

১৫

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ : আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

১৬

সত্যশাখী পদ্ধতি (Truth Tree Method)

১৭

বিহিতাকার (Normal Forms)

১৮

প্রতিমানতা (Duality)

১৯

অবরোহ পদ্ধতি

২০

অবরোহতন্ত্রীকরণ : PM তন্ত্র

পরিশিষ্ট

১

ভূমিকা : যুক্তি, যুক্তি-আকার ও বৈধতা

১. যুক্তি

যদি যুক্তিবিজ্ঞান পাঠ করব বলে মনস্থ করি তাহলে যুক্তিবিজ্ঞানের বিষয়বস্তু কী তা জেনে নেবার দরকার।
আমরা যুক্তিবিজ্ঞান পাঠ করব বলে মনস্থ করেছি।
সুতরাং যুক্তিবিজ্ঞানের বিষয়বস্তু কী তা জেনে নেবার দরকার ॥

যুক্তিবিজ্ঞানের বিষয়বস্তু কী ?—এ প্রশ্নের উত্তর "যুক্তিবিজ্ঞান" কথাটির মধ্যে নিহিত আছে : যুক্তিবিজ্ঞান হল যুক্তির বিজ্ঞান, যুক্তিসংক্রান্ত বিজ্ঞান। "যুক্তি"র প্রতিশব্দ হিসাবে "অনুমান" কথাটিও ব্যবহৃত হয়। আর যুক্তি বা অনুমান কী তা আমরা মোটামুটি জানি। প্রাত্যহিক জীবনে আমাদের প্রায়শ অনুমান করতে হয়, যুক্তি প্রয়োগ করতে হয়। কিন্তু যুক্তি কী এ সম্বন্ধে আমাদের পরিষ্কার ধারণা আছে কি ?

যদি যুক্তি কী এ সম্বন্ধে আমাদের পরিষ্কার ধারণা থাকত তাহলে আমরা সবাই যুক্তির লক্ষণ দিতে পারতাম।
কিন্তু আমরা সবাই যুক্তির লক্ষণ দিতে পারি না।
সুতরাং যুক্তি কী এ সম্বন্ধে আমাদের সবাইর পরিষ্কার ধারণা নেই ॥

কিন্তু তাহলেও আমরা সবাই যুক্তি দেখে চিনতে পারি, যুক্তির উদাহরণ দিতে পারি, উদাহরণ দিয়ে যুক্তি কী তা বোঝাবার চেষ্টা করতে পারি। ধরা যাক, তোমায় কেউ প্রশ্ন করল : যুক্তি কী ? তাহলে তুমি হয়ত নিম্নোক্তরূপ কোনো উদাহরণ উল্লেখ করবে :

যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান,
ঐ পর্বত ধূমবান,
সুতরাং ঐ পর্বত বহ্নিমান।

যদি অরুণ বুদ্ধিমান হয় তাহলে অরুণ এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারবে,
অরুণ এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারল না ;
সুতরাং অরুণ বুদ্ধিমান নয়।

আশু প্রথম শ্রেণীর এম.এ অথবা (আশু) দ্বিতীয় শ্রেণীর এম.এ,
আশু প্রথম শ্রেণীর এম.এ নয় ;
সুতরাং আশু দ্বিতীয় শ্রেণীর এম.এ।

এমন নয় যে ইন্দিরাও প্রথম স্থান অধিকার করবে এবং
ঈশানও প্রথম স্থান অধিকার করবে,
ইন্দিরা প্রথম স্থান অধিকার করেছে ;
সুতরাং ঈশান প্রথম স্থান অধিকার করতে পারে নি।

এবং বলবে—এসব যার দৃষ্টান্ত তাই যুক্তি॥ এ উক্তি নির্ভুল—এ কথা মেনে নিলাম। কিন্তু, বলা বাহুল্য, এ উক্তি যথেষ্ট নয়। যুক্তি সম্বন্ধে আরও বিশদভাবে আলোচনা করার দরকার।

২. যুক্তির অবয়ব

উপরোক্ত যুক্তি-দৃষ্টান্ত থেকে বোঝা গেল, যুক্তি হল বাক্যসমষ্টি। বলা বাহুল্য, যেকোনো বাক্যসমষ্টি যুক্তি বলে গণ্য হতে পারে না। যথা, এ বইর দ্বিতীয় অনুচ্ছেদে যেসব বাক্য আছে সেগুলির সমষ্টি যুক্তি বলে গ্রাহ্য নয়। কতকগুলি বাক্য কী সম্বন্ধে আবদ্ধ হলে, বা এদের মধ্যে কী সম্বন্ধ আছে বলে দাবী করা হলে, বাক্যসমষ্টি যুক্তির মর্যাদা পায় তা ক্রমশ বোঝা যাবে। আপাতত যা দিয়ে যুক্তি গঠিত হয় তার দিকে নজর দেওয়া যাক।

যেসব বাক্য দিয়ে যুক্তি গঠিত হয় তাদের বলে যুক্তির অবয়ব। উপরোক্ত প্রত্যেকটি যুক্তিতে তিনটি করে অবয়ব। কিন্তু সব যুক্তিতে তিনটি অবয়ব থাকবে এমন কথা নেই। নিম্নোক্ত যুক্তি দুটি লক্ষ কর—এদের প্রথম দুটিতে দুটি করে অবয়ব, আর শেষেরটিতে চারটি অবয়ব।

অরুণ এসেছে এবং আশিস এসেছে
সুতরাং অরুণ এসেছে।

ইন্দিরা আসবে
সুতরাং ইন্দিরা আসবে অথবা
উষসী আসবে।

যদি অরুণ আসে তাহলে আরতি আসবে, এবং
যদি আরতি আসে তাহলে ইন্দ্রনীল আসবে, এবং
যদি ইন্দ্রনীল আসে তাহলে উৎপলা আসবে ;
সুতরাং যদি অরুণ আসে তাহলে উৎপলা আসবে।

প্রত্যেক যুক্তি-অবয়ব এক একটি বাক্য, ঠিক। কিন্তু বাক্যগুলি প্রয়োগের প্রয়োজন বা উদ্দেশ্য অভিন্ন নয়। এদিক থেকে দেখলে—যুক্তি-অবয়ব দু রকম ঃ হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত (বাক্য)। কোনো যুক্তিতে যে বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করার চেষ্টা করা হয় তাকে বলে সিদ্ধান্তবাক্য, সংক্ষেপে—সিদ্ধান্ত। আর যে বাক্যের সাহায্যে সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রমাণ করার চেষ্টা করা হয় তাকে বলে হেতুবাক্য। লক্ষণীয়, উপরোক্ত প্রত্যেকটি উদাহরণে সর্বশেষ বাক্যটি সিদ্ধান্ত আর এর পূর্ববর্তী বাক্যগুলি (বা বাক্যটি) হেতুবাক্য। আরও লক্ষণীয়, হেতুবাক্যের শেষে ও সিদ্ধান্তের আরম্ভে* "সুতরাং" কথাটি যুক্ত হয় ; এ কথাটির পরিবর্তে

* "সুতরাং" সিদ্ধান্তের অংশ নয় ; "সুতরাং"-এর পরবর্তী অংশটিই সিদ্ধান্ত।

"সেহেতু", "কাজেই"—এ সব শব্দও ব্যবহৃত হয়। বিভিন্ন যুক্তিতে অবয়বের সংখ্যা ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কিন্তু এটা সহজবোধ্য যে প্রত্যেক যুক্তিতে অন্তত দুটি অবয়ব থাকবে : সিদ্ধান্ত ও অন্তত একটি হেতুবাক্য।

আর একটা কথা। যুক্তির যেসব উদাহরণ দেওয়া হয়েছে তাতে আছে—প্রথমে হেতুবাক্য তারপর সিদ্ধান্ত। কিন্তু আমরা প্রায়ই প্রথমে সিদ্ধান্ত তারপর এর সমর্থক হেতুবাক্য উল্লেখ করি। এরকম ক্ষেত্রে সিদ্ধান্তের পরে এবং হেতুবাক্যের পূর্বে "কেননা" যুক্ত হয়। যথা

ঐ পর্বত বহ্নিমান
কেননা, ঐ পর্বত ধূমবান এবং
যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান।

হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত যেকোনো ক্রমে—প্রথমে হেতুবাক্য তারপর সিদ্ধান্ত, অথবা প্রথমে সিদ্ধান্ত তারপর হেতুবাক্য—উল্লেখ করা যায়, ঠিক। কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞানের বিধান হল : প্রথমে হেতুবাক্য তারপর সিদ্ধান্ত উল্লেখ করা বাঞ্ছনীয়। আমরা এ বিধান মেনে চলব।

আরও একটা কথা। সাধারণত হেতুবাক্যগুলি স্বতন্ত্রভাবে পৃথক পৃথক ছত্রে লিখিত হয়। কিন্তু এদের মধ্যে যে যোগসূত্র আছে তা দেখানো দরকার, দেখানো দরকার—একই যুক্তির সব হেতুবাক্য যুক্তভাবে একই সিদ্ধান্ত প্রমাণ করার চেষ্টা করে। এ যোগসূত্রটি দেখাতে হলে "এবং" বা এর একার্থক কোনো শব্দ ব্যবহার করা প্রয়োজন। আমরা সর্বশেষ উদাহরণ দুটিতে "এবং" দিয়ে হেতুবাক্যগুলি যুক্ত করেছি। আর অন্যান্য উদাহরণে "এবং"-এর বদলে কমা ব্যবহার করেছি। কোনো যুক্তিতে হেতুবাক্যের মধ্যে এদের যোগসূত্র-জ্ঞাপক "এবং" না থাকলেও এ রকম ক্ষেত্রে "এবং" প্রচ্ছন্ন আছে বলে ধরে নেওয়া দরকার।

৩. "যুক্তি" ও "অনুমান"

বাংলায় "যুক্তি" কথাটি অনেক সময় হেতুবাক্য অর্থে ব্যবহৃত হয়। যথা, যখন বলা হয় "এ উক্তিটি যুক্তিহীন" তখন এ কথাই বলা হয় যে এ উক্তি সমর্থন করার মত হেতুবাক্য নেই। আমরা কিন্তু "যুক্তি" কথাটি ইংরেজি "argument"-এর প্রতিশব্দ হিসাবে ব্যবহার করছি। আবার, নৈয়ায়িকদের "অনুমান" আর "argument" ঠিক একার্থবাচক নয়। তবু আমরা "argument"-এর প্রতিশব্দ হিসাবে "যুক্তি", "অনুমান" এ দুটি কথাই ব্যবহার করব ; "এটা একটা যুক্তি", "এটা একটা অনুমান" সমার্থক বাক্য হিসাবে প্রয়োগ করব।

"যুক্তি" ও "অনুমান" একার্থক হিসাবে ব্যবহার করব বলে স্থির করেছি, ঠিক। কিন্তু এদের মধ্যে কিছুটা পার্থক্য আছে। অনেক ক্ষেত্রে কেবল "যুক্তি" কথাটি দিয়ে কাজ চলে না, অনুমান কথাটি প্রয়োগ করার দরকার। কেননা, আমরা যে অর্থে "যুক্তি" ব্যবহার করছি সে অর্থে এ শব্দটি দিয়ে গঠিত ক্রিয়াপদ—"যুক্তি করা"—ব্যবহার করা যায় না। কিন্তু "অনুমান করা" এ ক্রিয়াপদ ব্যবহার করা যায়। এ কথাটি প্রয়োগ করে আমরা বলতে পারি : অমুক হেতুবাক্য থেকে অমুক সিদ্ধান্ত অনুমান করা হল। কোনো যুক্তি প্রসঙ্গে বলা যায় না

এখানে যুক্তি করা হয়েছে যে—

এখানে ঐ হেতুবাক্য থেকে এ সিদ্ধান্ত যুক্তি করা হয়েছে

(কেননা, বাংলায় "যুক্তি করা" মানে পরামর্শ করা, মন্ত্রণা করা)। কিন্তু বলা যায়

এখানে অনুমান করা হয়েছে যে—

এখানে ঐ হেতুবাক্য থেকে এ সিদ্ধান্ত অনুমান করা হয়েছে।

লক্ষণীয়, উক্ত বাকভঙ্গি অনুসারে—কোনো সমগ্র যুক্তি সম্পর্কে বলা যায় ঃ এটা একটা অনুমান ; আরও বলা যায় ঃ এ অনুমানে অমুক হেতুবাক্য থেকে অমুক সিদ্ধান্ত অনুমান করা হয়েছে।

৪. যুক্তি-অবয়ব ঃ যৌগিক ও আণবিক বাক্য

যে সব বাক্য দিয়ে উক্ত যুক্তিদৃষ্টান্তগুলি গঠিত হয়েছে সেগুলির গঠনের দিকে একটু নজর দাও। দেখবে, এতে দু রকমের বাক্য আছে—যৌগিক ও অযৌগিক বাক্য। বলা বাহুল্য, "এবং", "অথবা", "যদি—তাহলে—" প্রভৃতি যোজক শব্দ দিয়ে যে বাক্য গঠিত হয় তাকে বলে যৌগিক বাক্য, আর যে বাক্য যৌগিক নয় তাকে অযৌগিক বাক্য বলে। যৌগিক ও অযৌগিক বাক্যের পার্থক্য আর একটু বিশদভাবে আলোচনা করা যাক।

যে বাক্যের কোনো অংশ (এক বা একাধিক অংশ) পূর্ণাঙ্গ বাক্য বলে গণ্য তাকে যৌগিক বাক্য বলে।

উদাহরণ ঃ

রাম বুদ্ধিমান এবং শ্যাম বোকা। রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে। এমন নয় যে রামও প্রথম হবে এবং শ্যামও প্রথম হবে। যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে রাম এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারবে ॥

এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটির দুটি অংশ স্বতন্ত্রভাবে বাক্য বলে গণ্য ; সুতরাং এগুলি যৌগিক বাক্য।

যে বাক্যের কোনো অংশ স্বতন্ত্রভাবে পূর্ণাঙ্গ বাক্য বলে গণ্য হতে পারে না তাকে বলে অযৌগিক (বা সরল) বাক্য।

উদাহরণ ঃ

রাম বুদ্ধিমান। শ্যাম বোকা। রাম আসবে। শ্যাম আসবে। রাম এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারবে ॥

এ বাক্যগুলির কোনোটির কোনো অংশ পূর্ণাঙ্গ বাক্য বলে গণ্য নয়, কাজেই এগুলি অযৌগিক বাক্য।

অযৌগিক বাক্যের অপর নাম "আণবিক বাক্য"। আমরা সাধারণত এ নামটিই ব্যবহার করব। "অণু" থেকে "আণবিক"। যৌগিক বাক্যের অন্তর্গত অযৌগিক বাক্যগুলি যেন এর অণু, বাক্যাণু। এ বাক্যাণু দিয়ে যৌগিক বাক্য গঠিত হয়।

আণবিক ও যৌগিক বাক্যের পার্থক্য বুঝলাম। এখন একটা প্রশ্ন ঃ

রাম বুদ্ধিমান নয়

এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান

এ বাক্যগুলি আণবিক না যৌগিক ? উত্তর : আমরা যৌগিক বাক্যের যে লক্ষণ দিয়েছি সে লক্ষণ অনুসারে উক্ত বাক্যগুলি যৌগিক। কেননা এদের একটি অংশ স্বতন্ত্রভাবে বাক্য বলে গণ্য—"রাম বুদ্ধিমান"—এ অংশটি। সাধারণত দুই বা ততোধিক বাক্য যুক্ত করে যে বাক্য পাওয়া যায় তাকেই বলে যৌগিক বাক্য। মনে রাখতে হবে : যৌগিক বাক্যের যে লক্ষণ দেওয়া হয়েছে সে লক্ষণ অনুসারে

—নয় (নি, না)   এমন নয় যে—

এ গড়নের বাক্য যৌগিক বাক্য বলে গণ্য। এখানে শূন্যস্থানে কোনো আণবিক বাক্য বসালে যৌগিক বাক্য পাওয়া যাবে।

৫. যোজক ও অঙ্গ

যোজক : যৌগিক বাক্যের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ করলে দেখা যাবে—"এবং", "অথবা", "যদি—তাহলে—" প্রভৃতি দিয়েই যৌগিক বাক্য গঠিত হয়। এরকম শব্দ বা শব্দসমষ্টিকে বলে বাক্যযোজক। এ বইতে আমরা এদের সংক্ষেপে যোজক* বলেও উল্লেখ করব। লক্ষ করে থাকবে, যুক্তির বা যৌগিক বাক্যের যে সব উদাহরণ দেওয়া হয়েছে তাতে

এমন নয় যে—, —এবং—, —অথবা—, যদি—তাহলে—, এমন নয় যে—এবং—

এ যোজকগুলি ব্যবহার করা হয়েছে।

অঙ্গ : কোনো যৌগিক বাক্যের অন্তর্ভুক্ত আণবিক বাক্যকে আমরা ঐ বাক্যের অঙ্গ বলে অভিহিত করব। যথা বলব : "রাম বুদ্ধিমান এবং শ্যাম বোকা" এ বাক্যের দুটি অঙ্গ—(১) "রাম বুদ্ধিমান", (২) "শ্যাম বোকা"। আরও বলতে পারি : এ যৌগিক বাক্যটি একটি দ্বৈতাঙ্গী বাক্য। লক্ষণীয়, "এমন নয় যে শ্যাম বুদ্ধিমান" এ বাক্যে আছে একটি অঙ্গ ; এটি একাঙ্গী বাক্য।

আরও একটা কথা। যৌগিক বাক্যকে যেমন একাঙ্গী, দ্বৈতাঙ্গী বলে বর্ণনা করতে পারি, যোজককে তেমনি একাঙ্গী, দ্বৈতাঙ্গী বলে চিহ্নিত করা যায়। এটা সহজবোধ্য যে "এবং", "অথবা", "যদি—তাহলে—" এসব দ্বৈতাঙ্গী যোজক—মানে এদের প্রত্যেকটি দুটি অঙ্গকে—অঙ্গবাক্যকে—যুক্ত করে। কিন্তু "এমন নয় যে" একাঙ্গী যোজক ; এ যোজক দিয়ে যে যৌগিক বাক্য গঠিত হয় তার একটি মাত্র অঙ্গ। এ পর্যন্ত যে সব যোজকের সঙ্গে আমাদের পরিচয় হয়েছে তার মধ্যে কেবল "এমন নয় যে" একাঙ্গী, অন্য সব কয়টি দ্বৈতাঙ্গী যোজক।

* এ কথা ঠিক যে, যোজকমাত্রই বাক্যযোজক নয়। যথা, Socrates is wise, These leaves are green—এখানে 'is' আর 'are' হল পদযোজক। আর পদযোজক থেকে পৃথক করার জন্যই "অথবা", "যদি তাহলে" প্রভৃতিকে বাক্যযোজক বলে চিহ্নিত করা হয়। তবে এ বইতে পদযোজকের কথা বলার দরকার হবে না, কাজেই "বাক্যযোজক"-এর পরিবর্তে সংক্ষেপে "যোজক" ব্যবহার করলেও ক্ষতি নেই।

আরও একটা কথা। মনে রাখতে হবে—

কোনো যুক্তির অন্তর্ভুক্ত কোনো বাক্যকে ঐ যুক্তির অবয়ব বলে, আর কোনো যৌগিক বাক্যের অন্তর্ভুক্ত কোনো আণবিক বাক্যকে ঐ যৌগিক বাক্যের অঙ্গ বলে।

৬. যুক্তি ও যৌগিক বাক্য

লক্ষ করে থাকবে, এতক্ষণ যুক্তির যেসব উদাহরণ দিয়েছি তার প্রত্যেকটিতে অন্তত একটি যৌগিক বাক্য আছে। কিন্তু সব যুক্তিতে অন্তত একটা যৌগিক বাক্য থাকবে এমন কথা নেই। এমন যুক্তিও থাকতে পারে যার কোনো অবয়বই যৌগিক নয়। যথা

রাম কবি,
সুতরাং রাম মানুষ।

মানুষ মরণশীল,
রাম মানুষ ;
সুতরাং রাম মরণশীল।

অশোক আশিসের চেয়ে বড়,
আশিস উমেশের চেয়ে বড় ;
সুতরাং অশোক উমেশের চেয়ে বড়।

এ যুক্তিগুলির কোন অবয়বই যৌগিক বাক্য নয়। এ জাতীয় যুক্তি আমরা আগে উল্লেখ করি নি। পরেও এ জাতীয় যুক্তির কথা তোলা হবে না। কেননা এরূপ যুক্তি এ বইর আলোচ্য বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত নয়।* যুক্তিবিজ্ঞানের যে খণ্ডিত অংশ এ বইর আলোচ্য সে অংশে আলোচনা করা হয় এমন যুক্তি যার অন্তত একটি অবয়ব যৌগিক বাক্য।

৭. "যুক্তি" : সংকীর্ণ ও ব্যাপক অর্থ

দৈনন্দিন জীবনে আমরা এরকম বাক্য প্রয়োগ করি :

এ মতটি যুক্তিসঙ্গত, এ উক্তিটি অযৌক্তিক, এ উক্তি যুক্তিযুক্ত
তোমার এ বিশ্বাস যুক্তিহীন।

এসব বাক্যে "যুক্তি" কথাটি অত্যন্ত সংকীর্ণ অর্থে ব্যবহৃত হয় ; এখানে "যুক্তি" বলতে বোঝায় নির্ভুল যুক্তি (বা নির্ভুল যুক্তির হেতুবাক্য)। আর আমরা এতক্ষণ উদাহরণ হিসাবে যেসব যুক্তি উল্লেখ করেছি সেগুলির প্রত্যেকটি নির্ভুল যুক্তি। কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞানে "যুক্তি" কথাটি আরও ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। মনে রাখতে হবে ভুল বা উদ্ভট যুক্তিও যুক্তি। যথা

* যাদের স্কুলপাঠ্য যুক্তিবিজ্ঞানে হাতে-খড়ি হয়েছে তাদের জন্য বলতে পারি : যে যুক্তি কেবল অনপেক্ষ (categorical) বাক্য দিয়ে গঠিত সে যুক্তি, যথা ন্যায় অনুমান, এ বইর আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত। আবার যে যুক্তি সম্বন্ধবাচক (relational) বাক্য দিয়ে গঠিত তাও এ বইয়ের আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত।

অরুণা পাশ করেছে
সুতরাং অরুণা ও আরতি এ দু জনই পাশ করেছে।

ইলা অথবা ঈষা আসবে
সুতরাং ইলাও আসবে এবং ঈষাও আসবে।

যদি রাম বিষপান করে থাকে তাহলে রামের মৃত্যু হবে,
রাম বিষপান করে নি ;
সুতরাং রামের মৃত্যু হবে না।

যদি এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা হয় তাহলে এ পৃষ্ঠাটি
কোনো না কোনো ভাষায় লেখা,
এ পৃষ্ঠাটি কোনো না কোনো ভাষায় লেখা ;
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা।

এ সবও যুক্তি। এদের কুযুক্তি বা অপযুক্তি বলতে চাও, বল। কিন্তু "যুক্তি" কথাটি আমরা যে অর্থে ব্যবহার করছি সে অর্থে অপযুক্তিও যুক্তি।

৮. যুক্তিবিজ্ঞানের আলোচ্য ঃ যুক্তির বৈধতা অবৈধতা

যুক্তিপ্রসঙ্গে আমরা "ভুল", "নির্ভুল" এ বিশেষণগুলি প্রয়োগ করেছি। এখন "ভুল"-এর প্রতিশব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়

অশুদ্ধ, অসঙ্গত, দুষ্ট, অসিদ্ধ, অবৈধ (invalid)

আর "নির্ভুল"-এর প্রতিশব্দ হিসাবে

শুদ্ধ, সঙ্গত, নির্দোষ, সিদ্ধ, বৈধ (valid)।

এ প্রত্যেকটি বিশেষণ যুক্তি সম্বন্ধে প্রযোজ্য। তবে আমরা সাধারণত "বৈধ" "অবৈধ"—এ বিশেষণ দুটিই প্রয়োগ করব। প্রসঙ্গত,

এ যুক্তিটি বৈধ

এ কথা এভাবেও ব্যক্ত করা হয়

এ যুক্তিতে সিদ্ধান্ত প্রমাণিত হয়েছে।

আবার, যে যুক্তির সিদ্ধান্ত প্রমাণিত, মানে যে যুক্তি বৈধ, সে সমগ্র যুক্তিকে প্রমাণ আখ্যায় অভিহিত করা হয়।

পূর্ববর্তী বিভাগে যে যুক্তিগুলি উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি যে অবৈধ তা সাধারণ বুদ্ধিতেই বোঝা যায়। আর তার পূর্বে যে সমস্ত যুক্তি উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি যে বৈধ তা বুঝতেও অসুবিধা হওয়ার কথা নয়। কেননা, আমরা বেছে বেছে কয়েকটি সহজবোধ্য উদাহরণ দিয়েছি। কিন্তু বৈধভাবে অনুমান করা, সিদ্ধান্ত প্রমাণ করা, সহজ ব্যাপার নয়। অনুমান করতে গিয়ে, কোনো বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করতে গিয়ে, আমরা হামেশা ভুল করি। আবার কেউ কোনো যুক্তি উত্থাপন করলে, সে যুক্তি প্রমাণ বলে গণ্য কিনা, যুক্তিটি বৈধ কিনা, তা নির্ণয় করা সাধারণ বুদ্ধিতে সব সময় সম্ভব হয় না। এজন্য যুক্তিবিজ্ঞানের শরণ

নিতে হয়। যুক্তিবিজ্ঞানে আমরা এ রকম উত্তরের সাক্ষাৎ পাই : যে যুক্তি অমুক অমুক বিধিবিধান মেনে চলে সে যুক্তি বৈধ, আর যে যুক্তি এসব বিধিবিধান লঙ্ঘন করে সে যুক্তি অবৈধ। যুক্তিবিজ্ঞান এমন পদ্ধতি উদ্ভাবন করার চেষ্টা করে যা প্রয়োগ করে সহজে, প্রায় যান্ত্রিকভাবে, যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করা যায়, বৈধতা প্রমাণ করা যায়।

যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা ও প্রমাণ পদ্ধতি উদ্ভাবন যুক্তিবিজ্ঞানের প্রধান কাজ—এ কথা অত্যুক্তি নয়।

৯. "বৈধ", "অবৈধ" : এদের অর্থ

"বৈধ", "অবৈধ"—এ কথাগুলির মানে ভাল করে বোঝার চেষ্টা করা যাক। বৈধ বা অবৈধ যুক্তি বলতে ঠিক কী বোঝায় ? এর উত্তরে বলতে পারি—

যদি এমন হয় যে কোনো যুক্তির হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে না, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ,

মানে

যে যুক্তি এমন যে এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে না (বা পারত না) সে যুক্তি বৈধ।

অপরপক্ষে

যদি এমন হয় যে কোনো যুক্তির হেতুবাক্য সত্য হলেও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি অবৈধ,

মানে

যে যুক্তি এমন যে এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা, বা এরকম হতে পারে বা পারত, সে যুক্তি অবৈধ।

যথা,

এই পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা

সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) লাল কালিতে ছাপা

এ যুক্তি অবৈধ, কেননা এর হেতুবাক্য সত্য এবং সিদ্ধান্ত মিথ্যা। এবার নিম্নোক্ত যুক্তিটি লক্ষ কর।

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা

সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) কাল কালিতে ছাপা

এ যুক্তিটিও অবৈধ। কিন্তু কেন ? এ যুক্তিতে ত হেতুবাক্য সিদ্ধান্ত দুই সত্য। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলবেন : এ যুক্তি অবৈধ, কেননা এর সিদ্ধান্ত বস্তুত সত্য হলেও, মিথ্যা হতে পারত। মানে এ যুক্তি সম্পর্কে বলা যায়—এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে বা হতে পারত। প্রশ্ন ওঠে : "হতে পারে" বা "হতে পারত" মানে কী ? এ কথার মানে না বললে "অবৈধ" কথাটির মানে ব্যাখ্যা করা হয় না। এখন নিম্নোক্ত যুক্তিটি লক্ষ কর।

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) কাল কালিতে ছাপা

সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা।

এ যুক্তিটি বৈধ। কিন্তু কেন ? এ কথা ঠিক যে এ যুক্তির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা নয় (কেননা হেতুবাক্য সিদ্ধান্ত দুই সত্য)। কিন্তু কোনো যুক্তির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা না হলেই বলা যায় না যে যুক্তিটি বৈধ। যথা, এ যুক্তির অব্যবহিত পূর্ববর্তী যুক্তিটির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা নয় (হেতুবাক্য, সিদ্ধান্ত উভয়ই সত্য), কিন্তু যুক্তিটি অবৈধ। "বৈধ" কথাটির যে অর্থ করা হয়েছে সে অর্থ অনুসারে, কোনো যুক্তিকে বৈধ হতে হলে যুক্তিটি এমন হওয়ার দরকার যে : এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে না (বা হতে পারত না)। এখন আলোচ্য যুক্তির সিদ্ধান্ত যে মিথ্যা হতে পারত না তা কি করে বুঝব ? আর একটি যুক্তি :

এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) লাল কালিতে ছাপা
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা।

এ যুক্তিটিও বৈধ। কিন্তু কেন ? এ যুক্তির সিদ্ধান্ত ত মিথ্যা। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলবেন : এ যুক্তি বৈধ ; এখানে হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত উভয়ই মিথ্যা, ঠিক ; কিন্তু হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারত না। এমন হতে পারে না বা পারত না যে এ যুক্তির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা। কথা হচ্ছে "হতে পারে না", "হতে পারত না" মানে কী ? এ যুক্তির হেতুবাক্য যদি সত্য হত তাহলে সিদ্ধান্ত যে মিথ্যা হতে পারত না তা কি করে বুঝব ? আর "হতে পারে", "হতে পারত না" এ কথাগুলির মানে না বুঝলে বৈধতা কী তাও পরিষ্কার বোঝা যাবে না।

দেখা গেল "বৈধ", "অবৈধ" এ কথাগুলির মানে বুঝতে হলে "হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে না", "—হতে পারে" এ কথাগুলির মানে বোঝার দরকার। এখন এদের মানে বুঝতে হলে যুক্তির আকার বলতে কী বোঝায় তা জেনে নেবার দরকার। পরবর্তী বিভাগে আমরা যুক্তি-আকার সম্বন্ধে আলোচনা করব এবং তারপর আবার বৈধতা অবৈধতার কথা তুলব।

১০. যুক্তির আকার

নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি লক্ষ কর :

(১) যদি রাম যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান,
রাম যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র ;
সুতরাং রাম বুদ্ধিমান।

(1) যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান,
ঐ পর্বত ধূমবান ;
সুতরাং ঐ পর্বত বহ্নিমান ॥

এ যুক্তিগুলির বক্তব্য বিষয় ভিন্ন, লক্ষ্যও ভিন্ন। প্রথমটির লক্ষ্য "রাম বুদ্ধিমান" এ কথা প্রমাণ করা, আর দ্বিতীয়টির "ঐ পর্বত বহ্নিমান" এ বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করা। কিন্তু লক্ষ্য বা বিষয়বস্তু ভিন্ন হলেও এদের মধ্যে গভীর সাদৃশ্য আছে। লক্ষণীয়, দুটি

যুক্তিতেই বক্তব্য বিষয় একই ভাবে, একই ভঙ্গিতে, বিন্যস্ত। বলা যায়—একদিক থেকে যুক্তি দুটি অভিন্ন। এরা অভিন্ন—আকারের দিক থেকে। এদের আকার এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

যদি এমন হয় তাহলে তেমন,
এমন ;
সুতরাং তেমন।

বা এভাবে

যদি——হয় তাহলে·········,
—— ;
সুতরাং ·········।

এখন, "এমন", "তেমন", ড্যাস প্রভৃতির পরিবর্তে শূন্যস্থান-নির্দেশক বর্ণপ্রতীক 'ব', 'ভ' ইত্যাদি ব্যবহার করে আকারটি এভাবে দেখানো সুবিধাজনক :

I

যদি ব হয় তাহলে ভ,
ব ;
সুতরাং ভ।

I হল (১) ও (1) সংখ্যক যুক্তির আকার। এ কথার অর্থ : I-এতে 'ব' ও 'ভ'-এর পরিবর্তে —মানে 'ব'-চিহ্নিত স্থানে ও 'ভ'-চিহ্নিত স্থানে—যথাক্রমে

রাম যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র   রাম বুদ্ধিমান

বসালে (১) পাওয়া যায় ; আর ঐ I-এতেই 'ব' ও 'ভ'-এর জায়গায় যথাক্রমে

ঐ পর্বত ধূমবান   ঐ পর্বত বহ্নিমান

বসালে পাওয়া যায় (1)-সংখ্যক যুক্তিটি।

আরও দুটি যুক্তি :

(২) It is not the case that James is alive and James is dead,
James is alive ;
therefore it is not the case that James is dead.

(2) It is not the case that today is Monday and today is Tuesday,
today is Monday ;
therefore it is not the case that today is Tuesday.

এ যুক্তি দুটির আকার এভাবে ব্যক্ত করা যায় (শূন্যস্থান-নির্দেশক হিসাবে '*p*', '*q*', ব্যবহার করে) :

II

It is not the case that *p* and *q*,
p ;
therefore it is not the case that *q*.

১১. বর্ণ-প্রতীক ও বাক্য-গ্রাহক

যুক্তির আকার দেখাবার জন্য প্রয়োজন—বাক্যযোজক ও বর্ণপ্রতীক (আর কমা, সেমিকোলন প্রভৃতি যতিচিহ্ন)। যোজকগুলির অর্থ সুনির্দিষ্ট ; এদের উপর যৌগিক বাক্যের এবং যুক্তির আকার নির্ভর করে, এরা আকারদায়ক বা আকারধারক শব্দ। এজন্য এদের আকারক * (প্রতীক) বলে। কিন্তু বর্ণপ্রতীকের কোনো অর্থ নেই, এদের কাজ হল শূন্যস্থান দেখানোর কাজ ; এ প্রতীকগুলি দেখলে বোঝা যায় যুক্তি-আকারের অমুক অমুক জায়গায় বাক্য বসালে যুক্তি-আকার থেকে যুক্তি পাওয়া যায়। আকার দেখাতে হলে, সব আকারক প্রতীক বাদ দিলে চলে না। আবার, এরকম কোনো প্রতীকের জায়গায় অন্য প্রতীক বসালে বাক্যের অর্থ পালটে যায়, যথা "যদি—তাহলে—"-এর জায়গায় "এবং" বসালে। আকার দেখাবার জন্য কোনো না কোনো বর্ণপ্রতীকও দরকার, ঠিক। কিন্তু কোনো বর্ণপ্রতীকই অপরিহার্য নয়। আকার দেখাতে হলে কোনো বিশেষ বা কোনো বিশেষ ধরনের বর্ণপ্রতীক ব্যবহার করতে হবে এমন কথা নেই, যে কোনো বা যে কোনো ধরনের বর্ণপ্রতীক ব্যবহার করলেই চলে। যথা II-এর প্রথম ছত্রটি এভাবেও লেখা যেত

It is not the case that *r* and *s*

বা এভাবে It is not the case that ব and ভ

ইংরেজি বাংলার জগাখিচুড়ি, যথা "It is not the case that today is Monday and আজ মঙ্গলবার" আপত্তিকর। কিন্তু "It is not the case that ব and ভ"—এতে আপত্তিকর কিছু নেই, কেননা এখানে 'ব', 'ভ' বাংলা ভাষার অংশ বা উপকরণ বলে গণ্য নয়—এসব কেবল স্থান-প্রদর্শক চিহ্ন হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে।

আমরা যে বর্ণপ্রতীকের কথা বলছি তাদের বলে বাক্য-গ্রাহক। এরা কোনো বাক্য গ্রহণ করলে, এদের জায়গায় কোনো পূর্ণাঙ্গ বাক্য বসালে, তবে যুক্তি-আকার থেকে ঐ আকারের যুক্তি পাওয়া যায়। আমরা এদের সংক্ষেপে গ্রাহক প্রতীক বা গ্রাহক** বলে উল্লেখ করব।

১২. আকার নিষ্কাশন

ওপরে কিভাবে যুক্তির আকার উদ্ধার করেছি তা যদি লক্ষ করে থাক তাহলে নিশ্চয় বুঝেছ যে, কোনো যুক্তির আকার নিষ্কাশন করতে হলে—প্রদত্ত যুক্তির অন্তর্গত

* logical constant

** variable

গ্রাহক প্রতীকমাত্রই বাক্যগ্রাহক নয়। ধরা যাক, সব মানুষ হল মরণশীল, সব কবি হল ভাবুক, সব দার্শনিক হল জ্ঞানী—এ বাক্যগুলির আকার দেখাতে গিয়ে বললাম, এদের আকার : সব ক হল খ। এখানে 'ক' 'খ' গ্রাহকপ্রতীক, কিন্তু বাক্যগ্রাহক নয়, পদগ্রাহক। কাজেই "বাক্যগ্রাহক"-এর বদলে কেবল "গ্রাহক" ব্যবহার করা আপত্তিকর মনে হবে। তবে এ বইতে পদগ্রাহক ব্যবহার করা বা পদগ্রাহকের কথা তোলার দরকার হবে না। এজন্য "বাক্যগ্রাহক"-এর বদলে সংক্ষেপে কেবল "গ্রাহক" লিখলেও ক্ষতি নেই।

প্রত্যেকটি বাক্যযোজক * (ও যতিচিহ্ন) বজায় রেখে,

প্রত্যেকটি আণবিক বাক্যের পরিবর্তে 'p', 'q' প্রভৃতি বাক্যগ্রাহক বসাতে হবে।

এ প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে

যে আণবিক বাক্য কোনো যুক্তির একাধিক জায়গায় আছে তার প্রত্যেকটি জায়গায় একই বর্ণপ্রতীক বা গ্রাহক নিবেশন করতে, মানে বসাতে, হবে ;

এক জায়গায় একটি বর্ণপ্রতীক অন্য জায়গায় অন্য একটি প্রতীক নিবেশন করা চলবে না। একে বলে একরূপ নিবেশনের নিয়ম **। যথা

If it rains then the ground is wet,

it rains ;

therefore the ground is wet.

এখানে প্রথম "it rains" এর জায়গায় যদি 'p' ব্যবহার করা সাব্যস্ত কর, তাহলে দ্বিতীয় "it rains" এর জায়গায়ও 'p' নিবেশন করতে হবে। সেরকম, "the ground is wet" দু জায়গায় আছে। দু জায়গাতেই একই বর্ণপ্রতীক বসাতে হবে।

১৩. উপাদান পূরণ : যুক্তির নিবেশন-দৃষ্টান্ত

যুক্তি-আকার যুক্তি নয়। যুক্তির কোনো বিষয়বস্তু থাকে, কোনো প্রতিপাদ্য বিষয় থাকে। কিন্তু যুক্তি-আকারের কোনো বিষয়বস্তু নেই। যুক্তি-আকার হল যুক্তির ছক, ছাঁচ বা কাঠামো। এ কাঠামোতে গ্রাহকের জায়গায় কোনো উপাদান, বিষয়বস্তু বা অর্থপূর্ণ বাক্য, নিবেশন করলে যুক্তি পাওয়া যায়। এভাবে কোনো যুক্তি-আকার থেকে যে যুক্তি পাওয়া যায় তাকে ঐ আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্ত †, সংক্ষেপে—দৃষ্টান্ত, বলে। বলা বাহুল্য, একই আকারের প্রত্যেকটি যুক্তি ঐ আকারের নিবেশন দৃষ্টান্ত বলে গণ্য। যথা (১) ও (1) সংখ্যক যুক্তি I-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত। কোনো যুক্তি-আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্ত পেতে হলে, মানে ঐ আকারের কোনো যুক্তি পেতে হলে, প্রদত্ত আকারের

প্রত্যেকটি বাক্যযোজক ও যতিচিহ্ন বজায় রেখে

প্রত্যেকটি গ্রাহক প্রতীকের জায়গায় কোনো বাক্য নিবেশন করতে হবে,

নিবেশন করতে হবে একরূপ নিবেশনের নিয়ম অনুসারে। এ কথার মানে

যে গ্রাহক প্রতীক যুক্তি-আকারে একাধিক জায়গায় আছে তার প্রত্যেকটি জায়গায় একই বাক্য নিবেশন করতে হবে।

এতক্ষণ আমরা যুক্তি-আকার ও যুক্তি-আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্তের কথা বলেছি। অনুরূপভাবে

* "সুতরাং"ও বাক্যযোজক। এভাবে কথাটা বলতে পারতাম : প্রত্যেকটি আকারক বজায় রেখে......,

** Rule of uniform substitution
Substitution = পরিবর্ত নিবেশন, সংক্ষেপে—নিবেশন

† Substitution instance

বাক্যের আকার ও বাক্যাকারের নিবেশন-দৃষ্টান্তের কথা বলা যায়, এবং বাক্যের আকার দেখানো যায়, ও আকার থেকে নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায়। যথা

Either it is raining or it is hailing
Either Paul is present or Peter is present
Either it is Monday or it is Tuesday

এদের আকার হল

Either p or q

এবং এ আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্ত উপরোক্ত বাক্য তিনটি।

১৪. যুক্তি-আকার ও অবৈধতা

আমরা বলেছিলাম (৮ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

যে যুক্তি এমন যে এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা, বা এ রকম হতে পারে বা হতে পারত, সে যুক্তি অবৈধ।

ঐ প্রসঙ্গে আমরা আরো বলেছিলাম যে

(১)

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) কাল কালিতে ছাপা

এ যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত সত্য হলেও, এমন হতে পারে বা হতে পারত যে এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা। কিন্তু "হতে পারে" বা "হতে পারত"-এর মানে ব্যাখ্যা করতে পারি নি; ফলে অবৈধতার লক্ষণও দিতে পারি নি। এখন বলতে পারি

কোনো যুক্তি-আকারের যদি এমন একটিও নিবেশন-দৃষ্টান্ত থাকে যে ঐ দৃষ্টান্তে হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা, তাহলে ঐ যুক্তি-আকার অবৈধ,
এবং ঐ অবৈধ আকারের সব নিবেশন-দৃষ্টান্তই অবৈধ।

এ রকম কোনো যুক্তি-আকারের কোনো দৃষ্টান্তের সিদ্ধান্ত বস্তুত সত্য হলেও বলা যায়ঃ হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে (বা পারত)—"পারে" ("পারত") মানে, অভিন্ন আকারের অন্য কোনো দৃষ্টান্ত নিয়ে দেখানো যায় যে এর হেতুবাক্য-সত্য-ও-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা। যথা, উপরোক্ত যুক্তিটির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত সত্য, ঠিক। কিন্তু ঐ আকারের আর একটি দৃষ্টান্ত, যেমন

(২)

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) লাল কালিতে ছাপা

এ যুক্তি নিলে দেখা যায় যে এর হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং এ যুক্তি অবৈধ। আর এটি অবৈধ বলে এ আকারের সব যুক্তি অবৈধ। সুতরাং (১)-সংখ্যক যুক্তিটিও অবৈধ। লক্ষণীয় (১) ও (২) নিম্নোক্ত আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্তঃ

ব
সুতরাং ব এবং ভ।

আমরা দেখলাম, এ আকার অবৈধ কেননা এর হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে ; "হতে পারে" মানে—এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায় যার হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা।

১৫. অবৈধতা প্রমাণ

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, যদি কোনো যুক্তি-আকারের এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত দেখাতে পারি যার হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা তাহলে আকারটির বৈধতার দাবী খণ্ডিত হয়, আকারটির অবৈধতা প্রমাণিত হয়। উদাহরণ

If p then q,
q ;
therefore p.

এ আকারটি অবৈধ, কেননা এ আকারের নিম্নোক্ত নিবেশন-দৃষ্টান্তে—

If Tagore committed suicide then Tagore is dead,
Tagore is dead ;
therefore Tagore committed suicide.

—এ যুক্তিতে, হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

If p then q,
it is not the case that p ;
therefore it is not the case that q.

এ যুক্তি-আকারটিও অবৈধ। কেননা এ আকারের নিম্নোক্ত দৃষ্টান্তটিতে—

If Tagore committed suicide then Tagore is dead,
it is not the case that Tagore committed suicide ;
therefore it is not the case that Tagore is dead.

—এ যুক্তিতে, হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

অবৈধ যুক্তি †-দৃষ্টান্ত প্রদর্শন করে যুক্তির অবৈধতাও প্রমাণ করা যায়। কেননা, আমরা জানি, কোনো যুক্তি যদি অবৈধ হয় তাহলে সে আকারের সব যুক্তি অবৈধ। কোনো যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে হলে

প্রথমে প্রদত্ত যুক্তির আকার উদ্ধার করতে হবে,
তারপর ঐ আকারের এমন একটি নিবেশন দৃষ্টান্ত খুঁজে বের করতে হবে যার হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

এভাবে কোনো যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করাকে, বা বৈধতার দাবী খণ্ডন করাকে, বলে ঔপমিক পদ্ধতিতে অবৈধতা প্রমাণ বা ঔপমিক পদ্ধতিতে বৈধতার দাবী খণ্ডন (refutation by logical analogy)। 'উপমা' থেকে 'ঔপমিক'। 'ঔপমিক যুক্তি' মানে একই আকারের

† "অবৈধ যুক্তি" মানে এমন যুক্তি যার হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

যুক্তিদৃষ্টান্ত। এ পদ্ধতিকে নিবেশন-দৃষ্টান্তের সাহায্যে অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি বলেও উল্লেখ করতে পারি।

উদাহরণ

যদি এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা হয় তাহলে এ পৃষ্ঠাটি কোনো ভারতীয় ভাষায় লেখা,
এ পৃষ্ঠাটি কোনো ভারতীয় ভাষায় লেখা,
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা।

এ যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যায় এভাবে ঃ এ যুক্তিটির আকার হল এই—

যদি ব হয় তাহলে ভ,
ভ ;
সুতরাং ব।

এ আকারের আর একটি যুক্তি নেওয়া যাক

যদি এ বইর লেখক ব্রাহ্মণ হয় তাহলে এ বইর লেখক হিন্দু,
এ বইর লেখক হিন্দু ;
সুতরাং এ বইর লেখক ব্রাহ্মণ। *

এ যুক্তি দৃষ্টান্তের হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা (সুতরাং এ যুক্তি অবৈধ)। সুতরাং উক্ত যুক্তি-আকারটি অবৈধ (এবং এ আকারের সব যুক্তি অবৈধ)। সুতরাং "যদি এ পৃষ্ঠাটি···বাংলায় লেখা" এ যুক্তিটিও অবৈধ ॥

আলোচ্য অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতির একটা অসুবিধা আছে। এ পদ্ধতিতে অবৈধতা প্রমাণ করতে হলে, তোমাকে এমন একটি যুক্তি-দৃষ্টান্ত নিতে হবে যার সম্বন্ধে সকলে স্বীকার করবে, অন্তত তোমার প্রতিপক্ষ** স্বীকার করবে, যে ঃ এ যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা। কিন্তু এ রকম দৃষ্টান্ত পাওয়া সহজ নয়। কেননা, তুমি যে দৃষ্টান্ত উল্লেখ করবে তার হেতুবাক্য যে বস্তুত সত্য আর সিদ্ধান্ত যে বস্তুত মিথ্যা—এ দাবী সবাই, বা তোমার প্রতিপক্ষ, মেনে নাও নিতে পারে।

এজন্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা অবৈধতা প্রমাণের জন্য অন্য পদ্ধতিও অনুমোদন করেন। এ পদ্ধতি বা পদ্ধতিগুলি কী তা পরে বোঝা যাবে।

১৬. যুক্তি-আকার ও বৈধতা

আমরা বলেছিলাম (৮ পৃঃ দ্রষ্টব্য) যে

যে যুক্তির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা হতে পারে না (বা পারত না) সে যুক্তি বৈধ।

কিন্তু "হতে পারে না" বা "হতে পারত না"—এ কথাগুলির মানে ব্যাখ্যা করতে পারি নি। এখন এ কথাগুলি বাদ দিয়ে এভাবে বৈধতার লক্ষণ দিতে পারি ঃ

---

* বস্তুত এ বইর লেখক হিন্দু, কিন্তু অব্রাহ্মণ।

** যে ব্যক্তির কোনো যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে যাচ্ছ সে

যদি কোনো যুক্তি-আকার এমন হয় যে এর এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত নেই যাতে হেতুবাক্য-সত্য-ও-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা, তাহলে এবং কেবল তাহলে সে যুক্তি-আকার বৈধ

এবং বৈধ আকারের সব নিবেশন-দৃষ্টান্তই বৈধ। *

এ রকম কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্তের হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হলেও বলা যাবে ঃ হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারত না। "পারত না" মানে—এ আকারের যুক্তির এমন কোনো দৃষ্টান্ত নেই (লক্ষণীয় "থাকতে পারত না" বা "—পারে না" বলছি না, বলছি "নেই") যাতে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা।

কিন্তু "থাকতে পারে না"র বদলে "নেই" বললেই সব অসুবিধা দূর হয় না। যথা, এটা সর্বজনস্বীকৃত যে

If p then q,
p ;
therefore q.

এ আকারটি বৈধ। দাবী করা হয় যে, এ আকারের এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত নেই যার হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা। কিন্তু, নেই যে তা কি করে বুঝব? আমরা কি সব সম্ভাব্য দৃষ্টান্ত বিচার করে দেখেছি? বলা বাহুল্য, সব নিবেশন-দৃষ্টান্ত বিচার করা সম্ভব নয়। তাহলে এ আকারের এমন কোনো নিবেশন দৃষ্টান্ত নেই যাতে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা—এ দাবী করা হয় কিসের জোরে?

"হতে পারে" আর "নয়" (বা "হতে পারে না")-এর মধ্যে যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে তা লক্ষণীয়। "এমন হতে পারে" এ আকারের উক্তির সত্যতা প্রমাণ, বা "এমন হতে পারে না" এ আকারের উক্তির মিথ্যাত্ব প্রমাণ খুব সহজ। যথা, যদি দেখাতে পারি অমুক দার্শনিক (কোনো একজন দার্শনিক) অসাধু তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল ঃ "দার্শনিকরা অসাধু হতে পারে"—এ বাক্য সত্য, বা "দার্শনিকরা অসাধু হতে পারে না"—এ বাক্য মিথ্যা। সেরকম, আমরা দেখেছি, যদি কোনো যুক্তি-আকারের এমন কোনো দৃষ্টান্ত দেখাতে পারি যার হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল আকারটি অবৈধ। কিন্তু "এমন নয়" বা "এমন হতে পারে না"—এ আকারের উক্তির সত্যতা প্রমাণ করা খুব শক্ত। যেমন, কোনো মানুষই আট ফুট লম্বা নয় বা হতে পারে না—এ উক্তির সত্যতা প্রমাণ করা শক্ত। লক্ষ লক্ষ মানুষের ক্ষেত্রে যদি দেখাও যে এদের কেউ আট ফুট লম্বা

* "বৈধ", "অবৈধ" এ কথাগুলি যুক্তি সম্পর্কেও প্রয়োগ করা হয় আবার যুক্তি-আকার সম্পর্কেও প্রয়োগ করা হয়। লক্ষণীয় কোনো যুক্তি বৈধ (অবৈধ)—এ কথা বললে একথাও বলা হয়ে যায় যে ঐ আকারের সব যুক্তিই বৈধ (অবৈধ)। এর কারণ—বৈধ অবৈধ—এ সব আকারবিষয়ক ধারণা। অপরপক্ষে, কোনো বাক্য 'ব' (যথা রাম এসেছে এবং শ্যাম এসেছে) বস্তুত সত্য (বা বস্তুত মিথ্যা) বললে কেবল ঐ 'ব' সম্পর্কেই উক্তি করা হয়, ঐ আকারের অন্য বাক্য সম্বন্ধে (যথা 'যদু বুদ্ধিমান এবং মধু বোকা' সম্বন্ধে) কিছু বলা হয় না। যথা, "রাম ··এসেছে" সত্য বললে একথা বলা হয় না যে "যদু·· বোকা"ও সত্য।

নয় তাহলেও প্রমাণিত হয় না যে, কোনো মানুষই আট ফুট লম্বা নয়, বা এরকম লম্বা হতে পারে না। সেরকম, কোনো যুক্তি-আকারের বৈধতা প্রমাণ করা সহজ নয়, মানে, কোনো যুক্তি-আকারের এমন কোনো দৃষ্টান্ত নেই যার হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা—এটা দেখানো সহজ নয়; সম্ভবও নয়। বলা বাহুল্য, নিবেশন দৃষ্টান্ত দেখিয়ে এবং এরকম উক্তি করে—

এ দৃষ্টান্তে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা নয়
সে দৃষ্টান্তে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা নয়
ঐ দৃষ্টান্তে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা নয়

—যুক্তি-আকারের বৈধতা প্রমাণ করা যায় না। ঔপমিক পদ্ধতিতে অবৈধতা প্রমাণ করা যায়, বৈধতা প্রমাণ করা যায় না। পরে দেখব, যুক্তিবিজ্ঞানীরা বৈধতা প্রমাণের নানা পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন। এসব পদ্ধতির সঙ্গে পরিচয় হলে, কী অর্থে

অমুক যুক্তি-আকারের এমন কোনো নিবেশন দৃষ্টান্ত নেই (বা থাকতে পারে না) যার হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত মিথ্যা

—এ রকম উক্তি গ্রাহ্য তা বোঝা যাবে। আপাতত বলতে পারি: বৈধতার দাবী একটা চ্যালেঞ্জ; এবং এ দাবী করে অবৈধতা প্রদর্শনের দায়িত্ব অন্যের ঘাড়ে চাপানো হয়। যথা—

If p then q,
p;
$\therefore$ q.

এ দাবী করলে এ কথাই বলা হয় যে: আমি চ্যালেঞ্জ করছি—তুমি এ আকারের এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত দেখাতে পারবে না যার হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা। আর তুমি যদি এমন নিবেশন দৃষ্টান্ত দেখাতে না পার তাহলে আমার দাবী মেনে নিতে হবে—মেনে নিতে হবে: এ আকারের এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত নেই যার হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা। এ রকম চ্যালেঞ্জ করে বলতে পারি

p and q,
$\therefore$ p.

p,
$\therefore$ p or q.

If p then q,
p;
$\therefore$ q.

If p then q,
it is not the case that q;
$\therefore$ it is not the case that p.

p or q,
it is not the case that p;
$\therefore$ q.

It is not the case that p and q,
p;
$\therefore$ it is not the case that q.

If p then q,
if q then r;
$\therefore$ if p then r.

—এসব যুক্তি-আকারের এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত দেখাতে পারবে না (পার কিনা দেখ) যার হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা। আর যদি না পার, তাহলে আমাদের দাবী—এরা যে বৈধ আকার এ দাবী—মেনে নিতে হবে।

১৭. বৈধতা ও সত্যতা

বৈধতার লক্ষণ থেকে বোঝা গেল যে

যদি কোনো যুক্তি বৈধ হয় এবং এর হেতুবাক্য সত্য হয়, তাহলে সিদ্ধান্তটি মিথ্যা হতে পারে না।

কিন্তু যদি কোনো বৈধ যুক্তির হেতুবাক্য মিথ্যা হয়, তাহলে? তাহলে যুক্তিটির সিদ্ধান্ত সত্য না মিথ্যা? উত্তর ঃ

বৈধ যুক্তির হেতুবাক্য মিথ্যা হলে, সিদ্ধান্তটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে—নিশ্চয় করে কিছু বলা যায় না।

উদাহরণ

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা (মিথ্যা)
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা। (সত্য)

এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা এবং (এ পৃষ্ঠাটি) বাংলায় লেখা (মিথ্যা)
সুতরাং এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা। (মিথ্যা)

এ দুটি যুক্তিই বৈধ, কেননা এরা নিম্নোক্ত আকারের নিবেশন-দৃষ্টান্ত ঃ

ব এবং ভ
সুতরাং ব।

এবং এ আকারটি বৈধ (এ আকারটি বৈধ, কেননা এ আকারের এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত নেই যার হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা)। দুটি যুক্তিই বৈধ অথচ প্রথমটির সিদ্ধান্ত সত্য, দ্বিতীয়টির সিদ্ধান্ত মিথ্যা। একই আকারের দুটি বৈধ যুক্তির একটির সিদ্ধান্ত সত্য আর অন্যটির সিদ্ধান্ত মিথ্যা হল এজন্য যে ঃ যুক্তিগুলির হেতুবাক্য মিথ্যা।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে যে

সত্য সিদ্ধান্ত পেতে হলে—

(১) বৈধভাবে অনুমান করার দরকার, যুক্তিটি বৈধ হওয়ার দরকার, আর
(২) যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য হওয়ার দরকার।

কাজেই দুটি প্রশ্ন ওঠে ঃ

(ক) বৈধভাবে অনুমান করব কি করে, কোনো যুক্তি বৈধ কিনা কি করে বুঝব?
(খ) সত্য হেতুবাক্য সংগ্রহ করব কি করে, কোনো বাক্য (হেতুবাক্য) সত্য কিনা কি করে বুঝব?

যুক্তিবিজ্ঞানে প্রথম প্রশ্নটির উত্তর পেতে পারি। কেননা, যুক্তিবিজ্ঞানে বৈধভাবে অনুমান করার নিয়ম ও যুক্তির বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতির সন্ধান পাওয়া যায়। কিন্তু, যুক্তিবিজ্ঞানে

দ্বিতীয় প্রশ্নটির উত্তর পাওয়া যায় না। কেননা, কোনো বাক্য বস্তুত সত্য কিনা তা নিশ্চিতভাবে নির্ণয় করার এবং সত্য হেতুবাক্য সংগ্রহ করার কোনো সুনির্দিষ্ট নিয়ম রচনা করা সম্ভব নয়। উদাহরণ :

যদি অশোক বৌদ্ধধর্ম গ্রহণ করে থাকেন তাহলে অন্তত একজন ভারতীয় নরপতি বৌদ্ধধর্মাবলম্বী ছিলেন,
অশোক বৌদ্ধধর্ম গ্রহণ করেছিলেন ;
সুতরাং অন্তত একজন ভারতীয় নরপতি বৌদ্ধধর্মাবলম্বী ছিলেন।

যদি আজিজের মাসিক আয় ৫০০ টাকা হয় তাহলে আজিজকে আয়কর দিতে হয়,
এমন নয় যে আজিজকে আয়কর দিতে হয় ;
সুতরাং এমন নয় যে আজিজের মাসিক আয় ৫০০ টাকা।

কমলবাবুর নির্বাচন নাকচ হবে অথবা জেলাশাসকের শাস্তি হবে,
এমন নয় যে কমলবাবুর নির্বাচন নাকচ হয়েছে ;
সুতরাং জেলাশাসকের শাস্তি হবে।

–এ যুক্তিগুলির সিদ্ধান্ত সত্য না মিথ্যা ?—এ জাতীয় প্রশ্নের জবাব যুক্তিবিজ্ঞানে পাওয়া যায় না। যুক্তিবিজ্ঞান বলবে : উক্ত যুক্তি (এবং এ আকারের সব যুক্তি) বৈধ, এ আকারের কোনো যুক্তির হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে না। কিন্তু উক্ত হেতুবাক্যগুলি (বা সিদ্ধান্তগুলি) সত্য কিনা তা যুক্তিবিজ্ঞানের আলোচ্য নয়, আর এমন কোনো যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি নেই (এবং থাকতেও পারে না) যা প্রয়োগ করে নিশ্চিতভাবে এদের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয় করা যায়। কেননা, কে বৌদ্ধধর্ম গ্রহণ করেছিলেন, কার মাসিক আয় কত, বা কার নির্বাচন নাকচ হয় নি—এসব যুক্তিবিজ্ঞানে কেন, কোনো বিজ্ঞানেরই আলোচ্য বিষয় হতে পারে না। অশোক বৌদ্ধধর্ম গ্রহণ করেছিলেন কিনা—তা জানতে হলে ইতিহাস পড়তে হয়, আজিজকে আয়কর দিতে হয় কিনা—তা নির্ণয় করতে হলে আয়কর বিভাগে অনুসন্ধান করতে হবে, আর কমলবাবুর নির্বাচন নাকচ হয়েছে কিনা বা জেলাশাসকের শাস্তি হয়েছে কিনা—তা জানার জন্য প্রাসঙ্গিক নথিপত্তর দেখার দরকার। যুক্তিবিজ্ঞান থেকে এ জাতীয় সাহায্য পাওয়া যায় না। যুক্তিবিজ্ঞানী বলেন :

(কী কী নিয়ম মেনে চললে তোমার অনুমান বৈধ হবে, কিভাবে কোনো যুক্তির বৈধতা নির্ণয় করবে, তা বলে দিতে পারি। এখন, তুমি যদি সত্য হেতুবাক্য সংগ্রহ করতে পার আর বৈধভাবে অনুমান করার নিয়ম মেনে চল তাহলে সত্য সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারবে। কিন্তু সত্য হেতুবাক্য সংগ্রহ করার দায়িত্ব তোমার, যুক্তিবিজ্ঞানীর নয়।)

যুক্তিবিজ্ঞানী ডি মরগেন বলেছেন : (যুক্তির সিদ্ধান্ত সত্য না মিথ্যা তা নির্ণয় করা যুক্তিবিজ্ঞানের লক্ষ্য নয় ; যাকে সিদ্ধান্ত বলে দাবী করা হয় তা প্রকৃতই সিদ্ধান্ত* কিনা

* সিদ্ধ অন্ত কিনা, যুক্তির অন্ত বাক্যটি সিদ্ধ (নির্ভুল বা প্রমাণিত) কিনা।

(অর্থাৎ তা বৈধভাবে হেতুবাক্য থেকে নিঃসৃত হয় কিনা) এটা নির্ণয় করাই যুক্তিবিজ্ঞানের লক্ষ্য। এ কথার মানে এই নয় যে—যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ হল যুক্তির (বিশেষ বিশেষ যুক্তির) বৈধতা বিচার করা। যুক্তিবিজ্ঞানে কোনো বিশেষ যুক্তির বৈধতা বিচার করা হয় না। যুক্তিবিজ্ঞান সাধারণভাবে বৈধতা বিচার ও বৈধতা প্রমাণ (ও অবৈধতা প্রমাণ) পদ্ধতি আলোচনা করে। এদিক থেকে যুক্তিবিজ্ঞান গণিতের মত। গণিত আমাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করার পদ্ধতি শিখিয়ে দেয়। এ পদ্ধতি অনুসরণ করে আমি আমার ব্যক্তিগত আয়ব্যয়ের হিসাব রাখতে পারি, তুমি যে হিসাব রেখেছ তা শুদ্ধ কিনা তা পরীক্ষা করতে পারি। এরকম হিসাব রক্ষা বা হিসাব পরীক্ষা গণিতের কাজ নয়, এসব হল গাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োগের ফল, এসব গণিতের বিষয়বস্তুর অন্তর্ভুক্ত নয়। ঠিক সেরকম, যুক্তিবৈজ্ঞানিক নিয়ম অনুসরণ করে আমি অনুমান করতে পারি, তুমি যে যুক্তি উত্থাপন করেছ তার বৈধতা পরীক্ষা করতে পারি। এভাবে অনুমান করা বা বৈধতা পরীক্ষা করা কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ নয়। যুক্তিবিজ্ঞান বৈধতা বিচার পদ্ধতির সন্ধান দিয়ে, কোন্ কোন্ যুক্তি-আকার বৈধ তা বলে দিয়ে, বা বৈধভাবে অনুমান করার নিয়ম রচনা করে দিয়েই খালাস। যে কথাটা আমরা বলতে চেয়েছি তা এভাবেও বলা যায় ঃ যুক্তিবিজ্ঞান আর যুক্তি-বৈজ্ঞানিক পদ্ধতির প্রয়োগ এক জিনিষ নয়। বলা বাহুল্য, যুক্তিবিজ্ঞানের প্রয়োগ যুক্তিবিজ্ঞানের আলোচ্য-বিষয়ের বহির্ভূত ॥

১৮. সংকেতলিপি

গণিতের মত, যুক্তিবিজ্ঞানের একটা উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য হল প্রতীকের ব্যাপক ব্যবহার। কাজেই বিভিন্ন প্রকারের প্রতীকের সঙ্গে পরিচিত হওয়ার দরকার। প্রথমে, প্রশ্ন ওঠে প্রতীক কী ?

প্রতীক ঃ কোনো কিছু নির্দেশ করবার, মানে—বোঝাবার, জ্ঞাপন করবার, জন্য যে লিখিত (বা কথিত) চিহ্ন বা সংকেত ব্যবহার করা হয় তাকে বলে প্রতীক। যেমন, কোনো উত্তরের পাশে "√" দিয়ে বোঝানো হয় যে, উত্তরটি শুদ্ধ ; কাজেই "√" একটি প্রতীক। প্রতীককে প্রধানত দুভাগে ভাগ করা যায় ঃ শাব্দ প্রতীক ও অ-শাব্দ প্রতীক।

শাব্দ প্রতীক ঃ আমাদের সবচেয়ে পরিচিত প্রতীক হল শব্দ। শব্দ প্রয়োগ করে আমরা কিছু বোঝাই, নির্দেশ করি বা জ্ঞাপন করি। যথা "টেবিল" শব্দটি টেবিল নামক দ্রব্য বোঝায়, "সাধুতা" শব্দটি একটি গুণ নির্দেশ করে, "যায়" একটি ক্রিয়া জ্ঞাপন করে। প্রত্যেক শব্দই এক একটি প্রতীক। শব্দকে বলে শাব্দ প্রতীক।

অ-শাব্দ প্রতীক ঃ শব্দ-নয়-এমন প্রতীকও আমরা ব্যবহার করি ; যেমন, গণিতের '+', '−', '×', '÷' ইত্যাদি। এ রকম প্রতীককে বলে অ-শাব্দ প্রতীক। যুক্তিবিজ্ঞানেও বহু অশাব্দ প্রতীক ব্যবহৃত হয়। বলা বাহুল্য, বর্ণ-প্রতীকও এক প্রকারের অশাব্দ প্রতীক। এ প্রসঙ্গে একটা কথা। মনে রাখবে ঃ 'প্রতীক' বা 'সংকেত' বলতে সাধারণত অশাব্দ প্রতীকই বোঝায়। যথা, যখন বলা হয়

যদি করুণা আসে তাহলে খগেন আসবে

এ বাক্যের প্রতীকীকৃত বা সংকেতীকৃত রূপ হল

যদি ক তাহলে খ

তখন প্রতীক বা সংকেত বলতে বোঝায় অশাব্দ প্রতীক।

বর্ণপ্রতীক ঃ যুক্তিবিজ্ঞানে দু রকম বর্ণপ্রতীক ব্যবহৃত হয় ঃ গ্রাহক প্রতীক ও (বাক্য-) সংক্ষেপক প্রতীক। গ্রাহক প্রতীক ব্যবহার করা হয় বাক্য এবং যুক্তির আকার দেখাবার জন্য। আমরা জানি (১১ পৃঃ দ্রষ্টব্য), যে বর্ণপ্রতীক দিয়ে আকারের শূন্যস্থান নির্দেশ করার কাজ করানো হয় তাকে বলে গ্রাহক (প্রতীক)। যথা

If p then q (১)

এ আকারে 'p', 'q' হল গ্রাহক। আমরা বাক্য-গ্রাহক হিসাবে সাধারণত নিম্নোক্ত বর্ণ-প্রতীকগুলি ব্যবহার করব ঃ

p, q, r, s, t, u, v।

বাক্য সংক্ষেপকরণের জন্যও বর্ণপ্রতীক ব্যবহার করা হয়। যথা

If Pierce is dead then Quine is alive (২)

এ বাক্যকে সংক্ষেপে ব্যক্ত করতে পারি এভাবে

If P then Q (1)

এখানে (1) হল (২)-এর সংক্ষিপ্ত রূপ, এটা একটা বাক্য, আকার নয় ; আর 'P', 'Q'ও গ্রাহক নয়। বর্ণপ্রতীক 'P', 'Q' এখানে আণবিক বাক্যের সংক্ষেপক। বাক্য সংক্ষেপ করার জন্য আমরা সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর ব্যবহার করব। (১) ও (1)-এর পার্থক্য লক্ষণীয়। (১) হল আকার, এ প্রসঙ্গে সত্য মিথ্যার কথা ওঠে না ; আর (1) হল বাক্য—সত্য বা মিথ্যা বাক্য।

আকারক ও বিষয়ক

আর এক দিক থেকে প্রতীককে দু ভাগে ভাগ করা যায় ঃ স্থিরার্থ প্রতীক (constant) ও গ্রাহক প্রতীক (variable)। গ্রাহকের কথা আগেই বলা হয়েছে। গ্রাহক ছাড়া অন্য সব প্রতীকই স্থিরার্থ। "অমুক", "তমুক", "যাহা—তাহা", "যখন—তখন" প্রভৃতি ভিন্ন সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত শব্দগুলি, যথা—"মানুষ", "সত্যবাদী", "ভাষা", "যুক্তিবিজ্ঞান", "প্রতীক" "স্থিরার্থ" ইত্যাদি স্থিরার্থ, কেননা এদের অর্থ স্থির। সেরকম যোজক "এবং", "অথবা", "যদি—তাহলে"—এসবও স্থিরার্থ প্রতীক। স্থিরার্থ প্রতীক আবার দু রকম ঃ (১) উপাদানজ্ঞাপক, বিষয়বস্তুজ্ঞাপক বা বিষয়ক প্রতীক (non-logical constant), আর (২) আকারজ্ঞাপক, আকারধারক বা আকারক প্রতীক (logical constant)।

বলা বাহুল্য, "এবং", "অথবা", "যদি–তাহলে–" প্রভৃতি আকারক (প্রতীক)*। এ জাতীয় প্রতীক বাক্যের ও যুক্তির আকার নিয়ন্ত্রিত করে ; এরাই বাক্যের ও যুক্তির আকার

* সেরকম, "is", "are", "not" প্রভৃতিও।

ধারণ করে থাকে। এজন্য এদের ধারক বলেও অভিহিত করা যায়। কেউ কেউ "এবং", "অথবা" প্রভৃতি আকারক প্রতীককে কারক (operator) বলে অভিহিত করেন।

আকারক বা ধারক ভাষার অপরিহার্য উপকরণ। এ জাতীয় প্রতীকের কোনোটি ব্যবহার না করে, দর্শন বিজ্ঞান, আলাপ আলোচনা, এমন কি কোনো অর্থবহ কথনই সম্ভব নয়। অপরপক্ষে, বিষয়ক প্রতীক বিশেষ বিশেষ বিষয় সংক্রান্ত, এরা বাক্যের বিষয়বস্তু নির্দেশ করে; এ জাতীয় কোনো প্রতীকই সব আলাপ আলোচনায়, দর্শনে বিজ্ঞানে অপরিহার্য নয়। যেমন, "গণতন্ত্র", "নির্বাচন", "ভোটাধিকার"—এসব রাষ্ট্রবিজ্ঞানে অপরিহার্য হতে পারে, কিন্তু অন্য বিজ্ঞানে এদের প্রয়োজন নাও থাকতে পারে। এদের বাদ দিয়ে আলাপ আলোচনা সম্ভব—এরা ভাষার অপরিহার্য উপকরণ নয়। সেরকম পদার্থ-বিদ্যার "গতি", "শক্তি", "বিদ্যুৎ" ইত্যাদি। এ শব্দগুলি যা বোঝায় তাতে আমার ঔৎসুক্য না থাকলে আমার ব্যক্তিগত "অভিধান"-এতে এদের স্থান নাও থাকতে পারে। কিন্তু আকারক ব্যবহার না করে সার্থক আলাপ-আলোচনাই সম্ভব নয়; এমন কি কোনো পরিণত ভাষাই সম্ভব নয়।

যুক্তিবিজ্ঞান যুক্তি-আকার নিয়ে আলোচনা করে; কাজেই এতে বিষয়বস্তুজ্ঞাপক প্রতীকের, "রাম", "মানুষ", "গণতন্ত্র" প্রভৃতি বিষয়কের, কোনো স্থান নেই। যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষার উপকরণ হল গ্রাহক প্রতীক ও আকারক। আরও বিশদভাবে বলতে গেলে, যুক্তি-বিজ্ঞানের যে অংশ আমাদের আলোচ্য সে অংশের ভাষা-উপকরণ হল—

(১) (বাক্য-) গ্রাহক ঃ p, q, r, s, t —ইত্যাদি, ব, ভ, ম —ইত্যাদি

(২) আকারক ঃ এমন নয় যে, এবং, অথবা, যদি—তাহলে —ইত্যাদি

(৩) যতিচিহ্ন ও বন্ধনী ঃ " , ", " ; ", "(", ")"—ইত্যাদি

এখন নব্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা "এবং", "অথবা", "যদি-তাহলে"—প্রভৃতি শাব্দ (আকারক) প্রতীকের পরিবর্তে অশাব্দ প্রতীক ব্যবহার করেন। যথা "অথবা"র পরিবর্তে "v" চিহ্নটি ব্যবহার করেন, যেমন

ব অথবা ভ

-এর পরিবর্তে লেখেন

ব v ভ।

এ রকম অবর্ণ অশাব্দ চিহ্নকে বলে অর্থলেখ বা ভাবলেখ (ideogram)। প্রসঙ্গত, " ? ", " ∴ " গণিতের "১", "২", "৩", "+", "−", "×", "÷"—এসবও অর্থলেখ। অপরপক্ষে, সাধারণ ভাষার বর্ণ বা শব্দকে—যথা, "এ", "মানুষ" প্রভৃতিকে বলে ধ্বনিলেখ (phonogram)।

১৯. সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানের বৈশিষ্ট্য

এ বইর নাম দিয়েছি সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান। আমরা কিন্তু সাংকেতিক যুক্তি-বিজ্ঞানের কথা না তুলে সাধারণভাবে যুক্তিবিজ্ঞানের বিষয়বস্তুর কথাই বলে আসছি। এর সমর্থনে বলতে পারি ঃ

সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান আর গতানুগতিক বা বুনিয়াদী যুক্তিবিজ্ঞানের মধ্যে বিরোধ নেই। একই শাস্ত্রের ক্রমোন্নতি ও সম্প্রসারণের দুটি পর্যায়ের যে পার্থক্য, সাংকেতিক ও গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের ঠিক সে পার্থক্য। সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান গতানুগতিক যুক্তি-বিজ্ঞানেরই পরিশোধিত পরিণত ও পরিবর্ধিত রূপ। এজন্য অনেকে যুক্তিবিজ্ঞান বলতে এর পরিণত রূপটিই বোঝেন। এতে আপত্তির কিছু নেই। কেননা গতানুগতিক যুক্তি-বিজ্ঞান,—আরও সঠিকভাবে বলতে গেলে, গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ নব্য যুক্তি-বিজ্ঞানীদের কাছে গ্রাহ্য সে অংশ—সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানের অঙ্গীভূত। আমরাও যুক্তি-বিজ্ঞান কথাটি এ অর্থে নেব, 'যুক্তিবিজ্ঞান' আর 'সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান' একার্থক হিসাবে ব্যবহার করব।

একজন প্রখ্যাত যুক্তিবিজ্ঞানী সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানের তিনটি বৈশিষ্ট্য উল্লেখ করেছেন :

(১) গ্রাহক প্রতীকের ব্যবহার, (২) অর্থলেখ প্রতীকের ব্যবহার, ও (৩) অবরোহতন্ত্রীকরণ।

(১) গ্রাহক প্রতীক যে কেবল সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানেই ব্যবহৃত হয় তা নয়, গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানেও গ্রাহক ব্যবহৃত হয়েছে। বরং বলতে পারি—যুক্তিবিজ্ঞানে প্রথম গ্রাহক ব্যবহারের কৃতিত্ব প্রাচীন যুক্তিবিজ্ঞানশিরোমণি আরিস্টটলের। তবে সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানে গ্রাহক অনেক ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়; এবং বিষয়ক প্রতীক একেবারেই ব্যবহার করা হয় না।

(২) অর্থলেখ প্রতীকের ব্যবহার গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে নেই বললেই চলে। এটা সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞানের একটা উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য।

(৩) অবরোহতন্ত্রীকরণ বলতে কী বোঝায় তা এখানে ব্যাখ্যা করা সম্ভব নয়।

২০. বাক্য কলন (Sentential Calculus)** .

যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ এ বইর আলোচ্য তার নাম বাক্য কলন। কেন এ অংশকে বাক্য কলন বলে অভিহিত করা হয় তা বুঝতে হলে প্রথমে "কলন" ("calculus.') কথাটির মানে বুঝে নেবার দরকার। "কলন" এসেছে "কল্" থেকে, আর √কল্=গণনা করা, হিসাব করা (to calculate)। কাজেই কলন বলতে বোঝায় : গণনাকরণ, সংখ্যাকরণ বা হিসাবকরণ। প্রসঙ্গত, এ "কল্" থেকেই এসেছে "সংকলন" (যার মানে যোগকরণ)। আর "ব্যবকলন" (যার মানে বিয়োগকরণ)। ব্যাপক অর্থে, কলন বলতে বোঝায় : সমস্যা সমাধানের—বা সংকেতলিপি ব্যবহার করে, আকারসর্বস্ব নিয়ম অনুসারে

* যাদের স্কুলপাঠ্য যুক্তিবিজ্ঞানের সঙ্গে পরিচয় আছে তাদের লক্ষ্য করে বলতে পারি—'যুক্তিবিজ্ঞান' কথাটি বর্তমানে যে অর্থে ব্যবহৃত হয় সে অর্থে গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের আরোহ অংশ যুক্তিবিজ্ঞানের অন্তর্ভুক্ত নয়। আরোহের আলোচনা একটি ভিন্ন নামে চিহ্নিত হয়। এ আলোচনা বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি নামে অভিহিত হয়।

** বা Propositional Calculus

সিদ্ধান্ত অনুমানকরণের—শৃঙ্খলাবদ্ধ পদ্ধতি। আরও সাধারণভাবে—যেকোনো গণনাকরণ বা হিসাবকরণ পদ্ধতি। এ অর্থে স্কুলপাঠ্য গণিতও একটি কলন।*

আমরা প্রতীক ব্যবহার করে কেবল আকারসর্বস্ব নিয়মের ভিত্তিতে প্রমাণকরণের পদ্ধতি আলোচনা করব ; গণিতের মত, গণনা বা হিসাবকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে কোনো বিশেষ প্রকারের সিদ্ধান্ত অবরোহণ করা যায় কিনা, কোনো বিশেষ প্রকারের সিদ্ধান্তের বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় বা প্রমাণ করা যায় কিনা—এসব এ বইতে আলোচনা করব। কাজেই গণিতের মত এ বইর আলোচ্য বিষয়ও কলন বলে গণ্য। আর, আমাদের আলোচ্য বিষয়কে সাধারণভাবে কলন না বলে বাক্য কলন বলা হয় এজন্য—

যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ এ বইর আলোচ্য তাতে কেবল এমন যুক্তি বা যুক্তি-আকার আলোচনা করা হয় যার অন্তর্গত অযৌগিক বাক্যকে অখণ্ডভাবে, অবিশ্লেষিতরূপে, নিলেই চলে। মানে, এদের আন্তর গঠন—কোন্ শব্দটি উদ্দেশ্য, কোন্‌টি বিধেয়, কোন্ শব্দটি উদ্দেশ্য বিধেয়ের সংযোগকারী সম্বন্ধ বোঝায় এসব—বিবেচনা করা দরকার হয় না। যথা

If this book is not difficult then Logic is an easy subject,
this book is not difficult ;
∴ Logic is an easy subject.

এ যুক্তির আকার দেখাতে হলে, বা এর বৈধতা বিচার বা প্রমাণ করতে হলে এর অন্তর্গত অযৌগিক বাক্যগুলির আভ্যন্তরিক গঠনের দিকে নজর দেবার দরকার নেই। এর আকার দেখাতে গিয়ে বলার দরকার নেই —এর আকার হল :

If A is not B then C is D, [This book=A†, difficult=B
A is not B ; Logic=C, easy subject=D]
∴ C is D.

কেবল একথা বললেই চলে যে : এর আকার হল

If p then q, [This book is not difficult=p
p ; Logic is an easy subject=q]
∴ q.

এটা স্বতবোধ্য যে এ আকারটি বৈধ। পরে দেখব, এ আকার যে বৈধ তা প্রমাণ করা যায়। এখন নিম্নোক্ত যুক্তিটি লক্ষ কর।

* গণিতবিদ্‌রা যখন অণুকলন (infinitesimal calculus), অন্তরকলন (differential calculus) ও সমাকলন (integral calculus)-এর কথা বলেন তখন স্পষ্টতই তারা "কলন" কথাটি একটি বিশেষ অর্থে ব্যবহার করেন। কেবল এ রকম অতিবিশেষিত অর্থে কথাটি ব্যবহার করা অসুবিধাজনক ; বস্তুত কথাটি ব্যাপক অর্থেই ব্যবহৃত হয়। কথাটির ব্যাপকতম অর্থেই এককালের নীতিবিদ্‌রা "সুখবাদীকলন" ("hedonistic calculus")-এর কথা বলতেন ; সুখের পরিমাপ করা যায়, একাধিক সুখ দুঃখ যোগ বিয়োগ করে মোট ফল (সুখ বা দুঃখ) নির্ণয় করা যায়—এ ভ্রান্ত ধারণার বশেই সুখবাদীকলনের কথা বলতেন।

† এ রকম ক্ষেত্রে "=" এর জায়গায় পড়তে হবে : '—' এর পরিবর্তে '—' বসিয়ে, যথা
'Logic' এর পরিবর্তে 'C' বসিয়ে

All kings are men ;
all men are mortal ;
∴ all kings are mortal.

বলা বাহুল্য, এ যুক্তিটি বৈধ, এখন ধরা যাক, এ যুক্তির আকার এভাবে দেখানো হল :

p, [All kings are men=p
q ; all men are mortal=q
∴ r. all kings are mortal=r]

এটা কি যুক্তি-আকার ? এর অন্তর্গত বাক্যগুলির মধ্যে যোগসূত্র কোথায় ? উক্ত যুক্তির অন্তর্গত বাক্যগুলিকে অখণ্ডভাবে নেওয়ার পরিণতি লক্ষ কর। মূল যুক্তিটি ছিল বৈধ। কিন্তু এ আকারটি অবৈধ। অবৈধ—কেননা এর এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায় যার হেতুবাক্য সত্য, কিন্তু সিদ্ধান্ত মিথ্যা। যথা

[p,] এ বইটি বাংলায় লেখা,
[q;] এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা ;
[∴ r.] ∴ এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা.

কাজেই উক্তরূপ যুক্তির আকার এভাবে দেখানো চলবে না। এরূপ যুক্তির অবয়বের আন্তর গঠন—কোন শব্দটি কোন শ্রেণী বোঝায় এবং নির্দেশিত শ্রেণীগুলির সম্বন্ধ কী তা—দেখানো দরকার। যথা, উক্ত যুক্তির আকার এভাবে দেখানো দরকার :

All A are B, বা এভাবে : the class A is included in the class B,
all B are C ; the class B is included in the class C ;
∴ all A are C. ∴ the class A is included in the class C.

বা আরও সংক্ষেপে এভাবে :

$$A \subseteq B,$$
$$B \subseteq C; \qquad [\text{ is included in} = \subseteq]$$
$$\therefore A \subseteq C$$

প্রসঙ্গত, যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ এ জাতীয় যুক্তি নিয়ে আলোচনা করে সে অংশের নাম শ্রেণী কলন (class calculus)। আকারসর্বস্ব যুক্তিবিজ্ঞানের বিভিন্ন অংশ বিভিন্ন প্রকারের কলন। এ বইর আলোচ্য বিষয় কেবল বাক্য কলন। কাজেই এ বইতে শেষোক্ত প্রকারের যুক্তি বা যুক্তি-আকারের কথা আর একেবারেই তুলব না।

অনুশীলনী

১. শূন্যস্থান পূর্ণ কর :
 (i) যদি কোনো যুক্তি বৈধ হয় এবং এর হেতুবাক্য মিথ্যা হয় তাহলে ——।
 (ii) যদি কোনো যুক্তি বৈধ হয় এবং এর হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে ——।
 (iii) যদি কোনো যুক্তি অবৈধ হয় এবং এর হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে ——।
 (iv) যদি কোনো যুক্তি অবৈধ হয় এবং এর হেতুবাক্য মিথ্যা হয় তাহলে ——।

২. (i) এমন একটি বৈধ যুক্তিদৃষ্টান্ত দাও যার হেতুবাক্য মিথ্যা, সিদ্ধান্ত সত্য।
(ii) এমন একটি বৈধ যুক্তিদৃষ্টান্ত দাও যার হেতুবাক্য মিথ্যা, সিদ্ধান্ত মিথ্যা।
(iii) এমন একটি যুক্তিদৃষ্টান্ত দাও যার হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

৩. নিম্নোক্ত যুক্তি-আকার দুটির এমন নিবেশন দৃষ্টান্ত (একটি করে) দাও যাতে হেতুবাক্য মিথ্যা, সিদ্ধান্ত সত্য :

ব এবং ভ ∴ ব ব ∴ ব অথবা ভ

যদি সম্ভব হয় তাহলে এদের এমন নিবেশনদৃষ্টান্ত দাও যার হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। আর যদি সম্ভব না হয়, তাহলে কেন সম্ভব নয় তা বল।

৪. নিম্নোক্ত যুক্তিটির আকার উদ্ধার কর :

If Arun is present then Barun is absent and if Arun is not present then Barun is absent,
Arun is present or not ;
∴ Barun is absent.

৫. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রমাণ কর :

(i) If the grass is wet, it has rained ; the grass is not wet ∴ it has not rained.
(ii) If the grass is wet, it has rained ; it has rained ∴ the grass is wet.
(iii) He is a fool or he is a knave, he is a fool ∴ he is not a knave.

২

বাক্য ঃ বাক্যের প্রকারভেদ

১. উক্তি, বিবৃতি, বচন

এতক্ষণ আমরা বলে এসেছি—যুক্তি হল বাক্যসমষ্টি, বাক্যই যুক্তির অবয়ব। কিন্তু সব রকমের বাক্য যুক্তির অবয়ব হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে না। কেননা ঃ প্রত্যেক যুক্তিতে দাবী করা হয় যে—সিদ্ধান্ত সত্য কেননা হেতুবাক্য সত্য। কিন্তু হেতুবাক্য বা সিদ্ধান্ত বস্তুত মিথ্যাও হতে পারে। এর থেকে বোঝা যায়, যে সব বাক্য সত্য বা মিথ্যা বলে বিবেচিত হতে পারে একমাত্র সে সব বাক্যই যুক্তির অবয়ব হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে।। প্রশ্নবোধক, অনুজ্ঞাবোধক, আবেগজ্ঞাপক, ইচ্ছাবোধক ও নির্দেশক—এ পাঁচ রকমের বাক্যের মধ্যে প্রথম চার প্রকারের বাক্য যুক্তির অবয়ব হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে না, কেননা—এদের সত্য বা মিথ্যা হওয়ার যোগ্যতা নেই। কেবল নির্দেশক বাক্য, আর নির্দেশক বাক্য দিয়ে গঠিত যৌগিক বাক্য, যথা

রাম বুদ্ধিমান,

যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে রাম এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারবে

সত্য বা মিথ্যা বলে গণ্য ; সুতরাং কেবল এ জাতীয় বাক্য দিয়ে যুক্তি গঠিত হতে পারে। এখন, যে বাক্য সম্বন্ধে সার্থকভাবে "সত্য", "মিথ্যা" এ বিশেষণগুলির কোনোটি প্রয়োগ করা যায়, মানে

যে বাক্য সত্য বা মিথ্যা হতে পারে, তাকে বলে বিবৃতি বা উক্তি (statement) বা বচন (proposition)।

তাহলে বলতে পারি ঃ যুক্তির অবয়ব হল বিবৃতি বা বচন। আর ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় ঃ সব বচনই বাক্য, কিন্তু সব বাক্য বচন নয় ; কেবল সত্য বা মিথ্যা বলে বর্ণিত হতে পারে এমন বাক্যই বচন।

২. বচনের বৈশিষ্ট্য ঃ বাক্য ও বচন

বচনের বৈশিষ্ট্য হল এই যে বচন সত্য বা মিথ্যা। এবং সত্য মিথ্যা—এগুলি বিরুদ্ধ ধর্ম। আরও বিশদভাবে বলতে পারি,

বচনের বৈশিষ্ট্য হল এই যে

(১) কোনো বচন যদি সত্য হয় তাহলে তা সত্য, আর কোনো বচন যদি মিথ্যা হয় তাহলে তা মিথ্যা, অর্থাৎ

(২) এমন হতে পারে না যে কোনো একটি বচন সত্যও বটে মিথ্যাও বটে, মানে

এমন হতে পারে না যে একই বচন এক সময় এক জায়গায় বা এক জনের পক্ষে সত্য, আর অন্য সময়, অন্য জায়গায় বা অন্য জনের পক্ষে মিথ্যা।

(৩) যদি কোনো বচন সত্য না হয় তাহলে তা মিথ্যা, আর যদি মিথ্যা না হয় তাহলে সত্য।

এ বাক্যগুলির প্রথমটিতে যে নীতি ব্যক্ত হয়েছে তাকে বলে তাদাত্ম্য নীতি (law of identity), দ্বিতীয়টিতে যা ব্যক্ত হয়েছে তাকে বলে অবাধকতা নীতি (law of non-contradiction), আর তৃতীয়টিতে যা ব্যক্ত হয়েছে তার নাম নির্মধ্যম নীতি (law of excluded middle)।

আমরা আগে বলেছি ঃ যে বাক্য সম্বন্ধে "সত্য", "মিথ্যা"—এ বিশেষণগুলির কোনোটি প্রয়োগ করা যায় না সে বাক্য বচন বলে গণ্য নয়। যথা, "তোমার নাম কী?", "আপনি বসুন" এ সব বচন নয়। এখন (১) আর (২)-তে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় ঃ যে বাক্য সম্বন্ধে "সত্য" "মিথ্যা" এ দুটি বিশেষণই প্রয়োগ করা যায় সে বাক্যও বচন বলে গণ্য হতে পারে না। কেননা, বচন হল এমন বাক্য যা সত্য (মিথ্যা) হলে সর্বস্থানে, সর্বকালে, সর্ব অবস্থাতে এবং সর্বলোকের পক্ষে সত্য (মিথ্যা)। এখন নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর্ ঃ

(১) আজ সোমবার। এখন বৃষ্টি হচ্ছে। ওখানে আগুন লেগেছে।
আমি যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র। সে অনুপস্থিত। তুমি বদমেজাজী।
বালিগঞ্জ কাছে। বোম্বাই দূরে। রাম আগে এসেছে। শ্যাম পরে এল।

—এ বাক্যগুলি বচন বলে গণ্য নয়, কেননা ঃ এ গুচ্ছের প্রত্যেকটি বাক্য সম্বন্ধে "সত্য", "মিথ্যা" এ দুটি বিশেষণই প্রযোজ্য ; (আসলে এরা স্বরূপত বা স্বভাবত * সত্যও নয় মিথ্যাও নয়, অবস্থা ভেদে সত্য বা মিথ্যা)॥ লক্ষণীয়, এমন হতে পারে যে এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটি এক সময়, এক বস্তু সম্বন্ধে, এক জায়গা থেকে বা এক জনের মুখে উচ্চারিত হলে সত্য, আর অন্য সময়, অন্য বস্তু সম্বন্ধে, অন্য জায়গা থেকে বা অন্য মুখে উচ্চারিত হলে মিথ্যা। যথা, কোনো সোমবারে যদি উচ্চারিত হয় "আজ সোমবার" তাহলে উক্ত বাক্যটি সত্য, আর যদি অন্য দিন উচ্চারিত হয় তাহলে বাক্যটি মিথ্যা। এমন কি, সঠিকভাবে বলতে গেলে

(২) রাম অসুস্থ। জ্যোতি বসু মুখ্যমন্ত্রী।
রাম দৈর্ঘ্যে ছ ফুট লম্বা। রাম শ্যামের চেয়ে লম্বা।

—এ সবও বচন নয়, কেননা এ বাক্যগুলি সম্বন্ধে "সত্য" "মিথ্যা" এ দুটি বিশেষণই প্রয়োগ করা যায়॥ যথা, "রাম অসুস্থ" এক সময় সত্য, অন্য সময় মিথ্যা। "রাম দৈর্ঘ্যে ৬ ফুট লম্বা"—এ কথা এক রাম সম্বন্ধে সত্য, অন্য রাম সম্বন্ধে মিথ্যা (কোন্ রামের কথা বলা হচ্ছে তা স্পষ্ট করে বলা হয় নি)।

তবে (১) ও (২) গুচ্ছে যে জাতীয় বাক্য উল্লেখ করা হয়েছে তাদের বচনে রূপান্তরিত করা যায়। সাধারণত কোনো বিষয়ে উক্তি করতে গিয়ে আমরা স্থানকাল উল্লেখ করি না,

---

* intrinsically

কোন্ বস্তু সম্বন্ধে উক্তি করা হল তা স্পষ্টভাবে বলি না (ধরে নিই শ্রোতা তা বুঝতে পারবে)। কিন্তু আমাদের বক্তব্য যদি স্পষ্ট ও পরিপূর্ণভাবে ব্যক্ত করি তাহলে দেখা যাবে আমাদের উচ্চারিত বা লিখিত বাক্য বচন বলে গণ্য। দেখা যাবে—পরিপূর্ণভাবে ও স্পষ্টভাবে ব্যক্ত কোনো বাক্য যদি সত্য হয় তাহলে তা সর্বকালে সর্ব অবস্থাতেই সত্য, আর মিথ্যা হলে সর্বকালে সর্ব অবস্থাতেই মিথ্যা। উদাহরণ

এখন কলকাতায় বৃষ্টি নামল

এ বাক্য বচন বলে বিবেচ্য নয়, কেননা এ বাক্য সত্যও হতে পারে মিথ্যাও হতে পারে। কিন্তু বক্তার বক্তব্যটি স্পষ্ট করে আরও বিশদভাবে বলতে পারি:

উনিশ শ' তিয়াত্তর সালে পয়লা আষাঢ় দুপুর বারোটায় কলকাতার কলেজ স্কোয়ারে বৃষ্টি নামল।

শেষোক্ত বাক্যটি বচন বলে গণ্য, কেননা এ বাক্য সম্বন্ধে "সত্য" "মিথ্যা" এ দুটি বিশেষণই প্রযোজ্য নয়। ধরা যাক বাক্যটি বস্তুত সত্য। তাহলে এটি চিরকালই সত্য, সর্ব অবস্থাতেই সত্য থাকবে; কলকাতা নগরী বিলুপ্ত হলেও এ বাক্য সত্য থাকবে।

বচনের স্বরূপ আলোচনা করতে গিয়ে আমরা উক্তরূপ রূপান্তরের কথা বলেছি, বলেছি সঠিকভাবে বলতে গেলে, (১), (২)-তে যে জাতীয় বাক্য উল্লেখ করা হয়েছে সে জাতীয় বাক্য বচন নয়। তবে বস্তুত আমরা উক্তরূপ রূপান্তর করব না। আমরা ধরে নেব উক্তরূপ বাক্যের বক্তা কী বলছেন তা বুঝতে পারছি, সুতরাং উক্তরূপ বাক্যকেও বচন বলে মেনে নেব। যথা, আমরা ধরে নেব—

যদি আজ সোমবার হয় তাহলে কাল মঙ্গলবার,
আজ সোমবার;
∴ কাল মঙ্গলবার।

—এ যুক্তিতে বক্তা "আজ", "কাল" বলতে কবেকার কথা বলছেন তা বুঝতে পারছি। কাজেই "আজ সোমবার", "কাল মঙ্গলবার", "যদি আজ……মঙ্গলবার"—এগুলিকেও বচন বলে গণ্য করব।

৩. বচন ও বাক্যের পার্থক্য

আমরা বলেছি বচন হল এক প্রকারের বাক্য—যে বাক্য সম্বন্ধে "সত্য" বা "মিথ্যা" প্রয়োগ করা যায়। অনেকে বলেন: বচন ও বাক্যের পার্থক্য দেখাতে গিয়ে কেবল একথা বলাই যথেষ্ট নয়; বচন ও বাক্যের মধ্যে আরও গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য বর্তমান। এঁরা এদের পার্থক্য এভাবে দেখান।

বিভিন্ন বাক্যে একই বচন ব্যক্ত হতে পারে। যথা,

ডি মরগেন একজন বিখ্যাত ইংরেজ যুক্তিবিজ্ঞানী
De Morgan is a famous English logician

এ দুটি বাক্যে একই বচন ব্যক্ত হয়েছে। এখানে বাক্য দুটি, কিন্তু বচন একটি। আবার একই বাক্যে ভিন্ন ভিন্ন বচন ব্যক্ত হতে পারে। যথা,

আমি যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র

এ বাক্য যদি রাম উচ্চারণ করে তাহলে বস্তুত বলা হয়—রাম যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র, আর যদি শ্যাম উচ্চারণ করে তাহলে বস্তুত বলা হয়—শ্যাম যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র। এখানে বাক্য একটি, কিন্তু উক্তি বা বচন দুটি। এ প্রসঙ্গে আরও বলা হয় যে প্রত্যেক বাক্য কোনো না কোনো ভাষার অন্তর্গত। কাজেই বাক্য সম্বন্ধে এ জাতীয় উক্তি করা যায়

'ডি মরগেন একজন বিখ্যাত ইংরেজ যুক্তিবিজ্ঞানী'—এটা একটা বাংলা বাক্য

'De Morgan is a famous English logician'—এটা একটা ইংরেজী বাক্য

কিন্তু এ দুটি বাক্যেতে যে অভিন্ন বচন ব্যক্ত হয়েছে তা কোনো বিশেষ ভাষার বাক্য নয়। বাক্যের জাত আছে ; এটা বাংলা, ওটা ইংরেজী ইত্যাদি ; কিন্তু বচনের জাত নেই। এজন্য, যদি এ ঘোষণা শুনি যে

রাম বুদ্ধিমান—এ বাংলা বাক্যটি সত্য

তাহলে আমরা বিস্মিত হই, "রাম……সত্য" এ বাক্যটিকে উদ্ভট বলে মনে করি। যদি "রাম বুদ্ধিমান" এ দাবী সত্য হয়, তাহলে যে কোনো ভাষায় ব্যক্ত কর না কেন, দাবীটি বা উক্তিটি সত্য। রাম বুদ্ধিমান—একথা বললে বলা হয়ে যায় যে এ বাক্যে যে বচন ব্যক্ত হয়েছে তা সত্য।

এ প্রসঙ্গে আরও বলা হয় ঃ বচন বাক্য নয় ; বাক্যের সাহায্যে, বাক্য প্রয়োগ করে, আমরা বচন ব্যক্ত করি। এজন্য, সঠিকভাবে বলতে গেলে,

রাম বুদ্ধিমান—এ বাক্য সত্য, বা

রাম বুদ্ধিমান—এ বচন সত্য

এ কথা না বলে, বলা উচিত

"রাম বুদ্ধিমান"—এ বাক্যে যে বচন ব্যক্ত হয়েছে তা সত্য।

৪. "বাক্য" শব্দটির ব্যবহার

বচন বাক্য নয়, বাক্যের মাধ্যমে বচন ব্যক্ত হয়—একথা মেনে নিলেও এদের মধ্যে যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে তা অস্বীকার করা যায় না। বাক্য ছাড়া বচন ব্যক্ত করা যায় না ; বচনের উদাহরণ দিতে গেলে কোনো না কোনো (ভাষার) বাক্যের আশ্রয় নিতে হয়। তাহলে, সব বচনই বাক্য—একথা বললে ক্ষতি কী? তাছাড়া বাক্যের অতিরিক্ত, বাক্য থেকে পৃথক, বিশুদ্ধ বচন বলে কিছু আছে কিনা সে সম্বন্ধে দার্শনিকদের মধ্যে মতভেদ আছে। বাক্য ও বচনের মধ্যে যে পার্থক্যই থাকুক, বিশুদ্ধ যুক্তিবিজ্ঞানের দিক থেকে তার বিশেষ গুরুত্ব নেই। এদের সম্বন্ধ কী, পার্থক্য কী বা আদৌ কোনো পার্থক্য আছে কিনা—এসব দার্শনিক আলোচনার বিষয়, বিশুদ্ধ যুক্তিবিজ্ঞানের আলোচ্য বিষয় নয়। সত্য বা মিথ্যা হতে পারে কেবল এরূপ বাক্যই যুক্তির অবয়ব হতে পারে—একথা মনে রেখে, যুক্তিবিজ্ঞানে "বচন" ব্যবহার না করে "বাক্য" কথাটি ব্যবহার করলে কী ক্ষতি?

তারপর, বাংলায়—"বাক্য", "বিবৃতি", "উক্তি", "বচন" এ কথাগুলির মধ্যে বিশেষ পার্থক্য নেই, অনেক সময় এদের একার্থক শব্দ হিসাবে ব্যবহার করা হয়। আবার, "বাক্য" কথাটি অত্যন্ত ব্যাপক অর্থেও ব্যবহৃত হয়। আমরা এ ব্যাপক অর্থেই কথাটি ব্যবহার করব। "বচন" শব্দটি যে অর্থে যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত হয় সে অর্থে

যদি রাম আসে তাহলে শ্যাম আসবে (১)

এটা বচন, কিন্তু

যদি প তাহলে ফ (২)

এটা বচন (বিবৃতি বা উক্তি) নয়, এটা বচনাকার। আমরা যে অর্থে "বাক্য" শব্দটি প্রয়োগ করার প্রস্তাব করছি সে অর্থে, বচনও বাক্য, বচনাকারও বাক্য। যথা, উপরোক্ত (১)ও বাক্য, (২)ও বাক্য। যেখানে বচন ও এর আকারের পার্থক্য দেখাবার দরকার সেখানে "বচন" কথাটিও ব্যবহার করব, আর যেখানে তা দরকার নেই সেখানে সাধারণভাবে "বাক্য" ব্যবহার করব।

বাক্য বা বচন নানান প্রকার। নিচে কয়েক প্রকারের বাক্যের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দেওয়া হল।

৫. প্রথম পর্যায়ের বাক্য ও দ্বিতীয় পর্যায়ের বাক্য

সাধারণত আমরা কোনো বস্তু, ঘটনা, বস্তুস্থিতি, ব্যাপার বা পরিস্থিতি সম্বন্ধে উক্তি করে থাকি। তবে কখনও কখনও* কোনো ভাষা সম্বন্ধেও—শব্দ বা বাক্য বা বাক্যসমষ্টি সম্বন্ধেও—উক্তি করি। এখন,

> যে বাক্যে কোনো বস্তু, ঘটনা, বস্তুস্থিতি, ব্যাপার বা পরিস্থিতি সম্বন্ধে কোনো উক্তি করা হয় তাকে বলে প্রথম পর্যায়ের বাক্য,

যথা :

> এ টেবিলটা বাদামী, ফুলদানীটা হাত থেকে পড়ে ভেঙ্গে গেল,
> মৃত্যুর হাত থেকে অব্যাহতি পাওয়ার জো নেই।

আর

> যে বাক্যে কোনো শব্দ, বাক্যাংশ, বাক্য বা বাক্যসমষ্টি সম্পর্কে উক্তি করা হয় তাকে বলে দ্বিতীয় পর্যায়ের বাক্য।

যথা :

> "টেবিল" কথাটি ইংরেজী শব্দ
> "জো" একটা বাংলা শব্দ
> "স্বতসত্য" ব্যাকরণসম্মত নয়,
> "রাম বুদ্ধিমান" এ কথা সত্য নয়
> "রাম বুদ্ধিমান, সুতরাং রামের ছোট ভাই শ্যামও বুদ্ধিমান" এ যুক্তি অবৈধ।

* যথা : অন্যের কথার প্রতিবাদ করতে গিয়ে, ব্যাকরণ শেখাতে গিয়ে, যুক্তিবিজ্ঞানে—বাক্য বা যুক্তি সম্বন্ধে মন্তব্য করতে গিয়ে,

অনুরূপভাবে, প্রথম পর্যায়ের শব্দের (ভাষার) আর দ্বিতীয় পর্যায়ের শব্দের (ভাষার) পার্থক্যের কথা বলতে পারি। যে শব্দগুলি কোনো বস্তু সম্পর্কে প্রযোজ্য সেগুলি প্রথম পর্যায়ের শব্দ। যথা ঃ

লাল, নীল, শক্ত, নরম, সাধু, মরণশীল, সত্যবাদী।

আর যে শব্দগুলি কোনো শব্দ, বাক্য বা বাক্যসমষ্টি (যথা যুক্তি) সম্পর্কে প্রযোজ্য সেগুলি দ্বিতীয় পর্যায়ের শব্দ। যথা ঃ

সত্য, মিথ্যা, যথার্থ, অযথার্থ, সঙ্গত, অসঙ্গত, বৈধ, অবৈধ, যুক্তিযুক্ত, অযৌক্তিক।

লক্ষণীয়, কোনো বস্তু (দ্রব্য, গুণ ইত্যাদি) সম্পর্কে এ শব্দগুলি প্রয়োগ করা যায় না। যুক্তি-বিজ্ঞানে মূল্যায়নের জন্য এদের বিশেষভাবে প্রয়োজন। আবার

সমার্থক, বিরুদ্ধ, প্রতিপাদন করে**, নিঃসৃত হয়

এসবও দ্বিতীয় পর্যায়ের ভাষার অন্তর্গত, কেননা কেবল বাক্য সম্পর্কে এ কথাগুলি প্রয়োগ করা যায়। যথা ঃ

অমুক ঘটনা তমুক ঘটনার সমার্থক, অমুক ব্যাপার তমুক ব্যাপারের সমার্থক

এ আকারের বাক্য উদ্ভট, অর্থহীন। ঘটনার (ব্যাপারের) আবার অর্থ কী ? বাক্যের, এবং কেবল বাক্যেরই, অর্থ থাকতে পারে। কাজেই সমার্থতা সম্বন্ধ খাটতে পারে কেবল বাক্যের মধ্যে। যথা, বলতে পারি

"রাম সাধু" আর "রাম অসাধু নয়" সমার্থক।

সেরকম, কেবল বাক্য সম্পর্কেই "প্রতিপাদন করে", "নিঃসৃত হয়" এসব কথা প্রয়োগ করা যায় ; ঘটনা বা ব্যাপার সম্বন্ধে এসব কথা খাটে না। কাজেই এ জাতীয় শব্দ দিয়ে কেবল দ্বিতীয় পর্যায়ের বাক্যই গঠিত হতে পারে।

৬. প্রয়োগ (Use) ও উল্লেখ (Mention) ঃ উদ্ধৃতিচিহ্ন

এ প্রসঙ্গে পারিভাষিক "প্রয়োগ" ("use") ও "উল্লেখ" ("mention")-এর পার্থক্যের কথা বলে নেওয়া ভাল। ধরা যাক, কোনো বস্তু বা ব্যাপার সম্বন্ধে উক্তি করলাম, মানে প্রথম পর্যায়ের বাক্য ব্যবহার করলাম। এ রকম ক্ষেত্রে হাল আমলের পরিভাষায় বলা হয় ঃ বাক্যটি বা অন্তর্গত শব্দগুলি প্রয়োগ করা হল (আর ব্যাপারটি বা বস্তুটি উল্লেখ করা হল)। যথা, রামের কথা বলতে গিয়ে যদি বলি

রাম বুদ্ধিমান

তাহলে "রাম বুদ্ধিমান" বাক্যটি, "রাম", "বুদ্ধিমান" এ শব্দগুলি, প্রয়োগ করা হল। তার মানে, যখন প্রথম পর্যায়ের বাক্য ব্যবহার করি তখন আমরা প্রয়োগ করি শব্দ ও বাক্য, (আর উল্লেখ করি বস্তু ও ব্যাপার)।

** implies

ধরা যাক, দ্বিতীয় পর্যায়ের কোনো বাক্য ব্যবহার করলাম, কোনো শব্দ বা বাক্য সম্বন্ধে উক্তি করলাম। এরকম ক্ষেত্রে হালের পরিভাষায় বলা হয় : শব্দ বা বাক্যটি উল্লেখ করা হল। যথা

"মানুষ" বাংলা শব্দ—এখানে "মানুষ" শব্দটি উল্লেখ করা হয়েছে

কিন্তু মানুষ মরণশীল—এখানে "মানুষ" শব্দটি প্রয়োগ করা হয়েছে

সেরূপ

"রাম বুদ্ধিমান" সত্য—এখানে "রাম বুদ্ধিমান" বাক্যটি উল্লেখ করা হয়েছে

কিন্তু রাম বুদ্ধিমান —এখানে "রাম বুদ্ধিমান" বাক্যটি প্রয়োগ করা হয়েছে

এখন, কোনো শব্দ, বাক্য বা বাক্য সমষ্টি (যথা যুক্তি) উল্লেখ করা হয়েছে—মানে শব্দ, বাক্য ইত্যাদি সম্বন্ধেই উক্তি করা হয়েছে*—এ কথা বোঝাতে হলে উদ্ধৃতি চিহ্নের প্রয়োজন। যথা, যদি "মানুষ" শব্দটি উল্লেখ করি, "মানুষ" কথাটি সম্পর্কে উক্তি করি, এবং বলি যে এটি একটি বাংলা শব্দ, তাহলে কথাটা এভাবে ব্যক্ত করলে চলবে না :

মানুষ বাংলা শব্দ,

বলার দরকার :

"মানুষ" বাংলা শব্দ

মানুষ বাংলা শব্দ—এ জাতীয় উক্তি অসঙ্গত (আমরা মানুষরা কি বাংলা শব্দ ?)। সেরকম,

রাম সাধুর বিরুদ্ধ হল রাম অসাধু
রাম সাধুর সমার্থক রাম অসাধু নয়
রাম কনিষ্ঠ পুত্র প্রতিপাদন করে রামের জ্যেষ্ঠ ভ্রাতা আছে বা ছিল
এ ফুলটা লাল থেকে নিঃসৃত হয় এ ফুলটা রঙিন

এসব বাক্য (লক্ষণীয় এগুলি দ্বিতীয় পর্যায়ের বাক্য) অ-সুগঠিত, অসঙ্গত ; কেননা বাক্যগুলিতে উল্লেখ-করা অঙ্গগুলি উদ্ধৃতি চিহ্নের মধ্যে রাখা হয় নি। মনে রাখবে

— -এর বিরুদ্ধ হল —
— -এর সমার্থক —
— প্রতিপাদন করে —
— থেকে নিঃসৃত হয় —

এ রকম আকারে শূন্য স্থানে যে বাক্য লিখিত হবে তাকে উদ্ধৃতি চিহ্নের মধ্যে রাখার দরকার। এ কথা নিশ্চয়ই বুঝেছ, উদ্ধৃতি চিহ্ন সংক্রান্ত বিধানটি এই : যে শব্দ বা বাক্য উল্লেখ করা হবে তাকে উদ্ধৃতি চিহ্নের মধ্যে রাখতে হবে।

এ বিধান মেনে চলতে হলে একই বাক্যে বারবার উদ্ধৃতি চিহ্ন ব্যবহারের প্রয়োজন হতে পারে। কিন্তু বারবার উদ্ধৃতি চিহ্ন ব্যবহার করা অসুবিধাজনক। এজন্য আমরা

* বস্তু, ব্যাপার ইত্যাদি সম্পর্কে যে উক্তি করা হয় নি—

ক্ষেত্র বিশেষে উদ্ধৃতি চিহ্ন পরিহার করব। তবে এ চিহ্ন পরিহার করতে হলে আমরা নিম্নোক্ত রীতি মেনে চলব।

কোলনের পর কতকগুলি শব্দ বা বাক্য লিখে তার শেষে ড্যাস দিয়ে "এ বাক্যগুলি", "এ শব্দগুলি" এ রকম কথা যুক্ত করব—বুঝতে হবে, কোলন ও ড্যাসের মধ্যবর্তী শব্দ বা বাক্যগুলি উল্লেখ করা হয়েছে,

এবং এরকম ক্ষেত্রে উদ্ধৃতি চিহ্নের দরকার নেই।

কোনো বাক্য (শব্দ বা শব্দ সমষ্টি) পৃথক ছত্রে লিখে তার পূর্ববর্তী বা পরবর্তী ছত্রে "এ বাক্যটি" ("এ শব্দ" বা "শব্দগুলি") লিখব—বুঝতে হবে পৃথক-ছত্রে-লেখা বাক্যটি (শব্দ বা শব্দগুলি) উল্লেখ করা হয়েছে,

এবং এরকম ক্ষেত্রে উদ্ধৃতি চিহ্নের প্রয়োজন নাই।

উদাহরণ

মনে রাখবে : সত্য, মিথ্যা, বৈধ, অবৈধ—এগুলি দ্বিতীয় পর্যায়ের বিশেষণ।

রাম বুদ্ধিমান

এ বাক্যের বিরুদ্ধ হল

রাম বুদ্ধিমান নয় ॥

৭. ব্যাপারবিষয়ক (Factual) ও যৌক্তিক (Logical) বাক্য

আমরা সাধারণত মনে করি : বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ভর করে কোনো বাস্তব অবস্থা, বস্তুস্থিতি, ঘটনা, পরিস্থিতি বা ব্যাপারের উপর। কিন্তু দেখা যাবে : কোনো কোনো বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো বাস্তব ব্যাপারের উপর নির্ভরশীল নয়। প্রথম প্রকারের বাক্যকে বলে ব্যাপারবিষয়ক বা ব্যাপারসাপেক্ষ (factual) বাক্য ; আর দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যকে বলে ব্যাপারনিরপেক্ষ বা যৌক্তিক (logical) বাক্য। আরও বিশদভাবে বলতে গেলে—

যে বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো (বাস্তব) ব্যাপারের ওপর নির্ভর করে তাকে ব্যাপারসাপেক্ষ বা পরতসাধ্য* বাক্য বলে।

এরূপ কোনো বাক্য সত্য কিনা তা নির্ণয়ের জন্য অনুষঙ্গী ব্যাপার অনুসন্ধান করার দরকার, বাস্তব ব্যাপারের সঙ্গে বাক্যটির সংগতি বা আনুরূপ্য আছে কিনা দেখার দরকার। উদাহরণ :

এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা
এ বইটি যুক্তিবিজ্ঞানের বই
মহাত্মা গান্ধী ভারতের প্রথম প্রধানমন্ত্রী
জওহরলাল নেহেরু ভারতের প্রথম রাষ্ট্রপতি

এ বাক্যগুলি ব্যাপারসাপেক্ষ। এদের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো ব্যাপারের বা বস্তুস্থিতির ওপর নির্ভর করে। যেমন প্রথম বাক্যটি সত্য, কেননা বস্তুত এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা ;

* ব্যাপারবিষয়ক বা আপতিক বা ব্যাপারবশ

তারপর দ্বিতীয় বাক্যটির সঙ্গে বাস্তব ব্যাপারের সংগতি আছে বলে এ বাক্যটিও সত্য। কিন্তু শেষোক্ত বাক্য দুটি মিথ্যা, কেননা বাস্তব ব্যাপারের সঙ্গে এদের সংগতি নেই।

যে বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো বাস্তব ব্যাপারের ওপর নির্ভর করে না তাকে বলে ব্যাপারনিরপেক্ষ, আকারসাপেক্ষ বা স্বতসিদ্ধ* বাক্য বা যৌক্তিক বাক্য।

এরূপ বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয়ের জন্য কোনো ব্যাপার অনুসন্ধানের, কোনো ব্যাপারের সঙ্গে এদের মিল আছে কিনা তা দেখার, দরকার নেই। উদাহরণ ঃ

এখন বৃষ্টি হচ্ছে অথবা এখন বৃষ্টি হচ্ছে না
রাম বুদ্ধিমান অথবা রাম বুদ্ধিমান নয়
বাদুড় স্তন্যপায়ী অথবা বাদুড় স্তন্যপায়ী নয়
যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান
রাম বুদ্ধিমান এবং রাম বুদ্ধিমান নয়
বাদুড় স্তন্যপায়ী এবং বাদুড় স্তন্যপায়ী নয়

এগুলি যৌক্তিক বাক্য। এদের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো ব্যাপারের ওপর নির্ভর করে না। যথা, বৃষ্টি হওয়া না হওয়ার ওপর প্রথম বাক্যটির সত্যতা নির্ভর করে না ; এ বাক্যটি সত্য কিনা তা জানার জন্য বাইরে তাকিয়ে দেখার দরকার নেই—বস্তুত বৃষ্টি হচ্ছে, কি হচ্ছে না, তা জানার দরকার নেই। শেষোক্ত বাক্য দুটি মিথ্যা, এদের মিথ্যাত্বও কোনো ব্যাপারের ওপর নির্ভর করে না। এজন্য রামের বুদ্ধি পরীক্ষা না করেও, বা রাম কে তা না জেনেও, বলে দেওয়া যায় "রাম বুদ্ধিমান এবং রাম বুদ্ধিমান নয়" এ বাক্য মিথ্যা।

ব্যাপারসাপেক্ষ ও যৌক্তিক বাক্যের পার্থক্য এভাবে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

ব্যাপারসাপেক্ষ বাক্য বস্তুত সত্য—বাস্তব ব্যাপারের অনুরূপ বলে সত্য, বা
বস্তুত মিথ্যা—বাস্তব ব্যাপারের সঙ্গে সংগতি নেই বলে মিথ্যা।

যৌক্তিক বাক্য—অনিবার্যভাবে, আবশ্যিকভাবে সত্য, অবশ্যই সত্য, বা
অনিবার্যভাবে, আবশ্যিকভাবে মিথ্যা, অবশ্যই মিথ্যা ॥

আমরা ব্যাপারসাপেক্ষ বাক্য প্রসঙ্গে "পরতসাধ্য" আর যৌক্তিক বাক্যপ্রসঙ্গে "স্বতসিদ্ধ" প্রয়োগ করেছি। এ কথাগুলির মানে বুঝতে পারলে উক্ত দু প্রকারের বাক্যের পার্থক্য আরও ভাল করে বোঝা যাবে।

ব্যাপারসাপেক্ষ বাক্য পরতসাধ্য ঃ এ কথার মানে—এরূপ কোনো বাক্য সত্য কি মিথ্যা তা বাক্য অতিরিক্ত কিছুর, ব্যাপারের, ওপর নির্ভর করে ; এজন্য বলতে পারি ঃ এরূপ বাক্য ব্যাপারবশত সত্য বা ব্যাপারবশত মিথ্যা। এবং এরূপ বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব প্রতিষ্ঠা করতে হলে বাক্যের সঙ্গে অনুষঙ্গী ব্যাপারের আনুরূপ্য দেখানো দরকার।

যৌক্তিক বাক্য স্বতসিদ্ধ ঃ এ কথার মানে—এরূপ বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব কোনো বাস্তব ব্যাপারের ওপর নির্ভরশীল নয়, এবং এরূপ কোনো বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব

ব্যাপারনিরপেক্ষ, অবশ্যম্ভব বা আকারবশ

দেখাবার জন্য কোনো ব্যাপার অনুসন্ধানের প্রয়োজন নেই। এদের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ভর করে বাক্যে ব্যবহৃত আকারক শব্দের ওপর। কাজেই এরূপ কোনো বাক্য সত্য নাকি মিথ্যা, ব্যবহৃত আকারক শব্দগুলি লক্ষ করলেই তা বোঝা যায়। যথা, যে ব্যক্তি "অথবা" ও "এমন নয় যে"-এর মানে বোঝে সে-ই বুঝবে যে

রাম বুদ্ধিমান অথবা এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান

এ ফুলটি লাল অথবা এমন নয় যে এ ফুলটি লাল

এ সব বাক্য সত্য ; বুঝবে যে

ব অথবা এমন নয় যে ব

—এ আকারের যে কোনো বাক্য সত্য, অবশ্যই সত্য।* আর যে ব্যক্তি "এবং" আর "এমন নয় যে"-এর মানে বোঝে সে একথাও জানে যে

রাম বুদ্ধিমান এবং এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান

এ ফুলটা লাল এবং এমন নয় যে এ ফুলটা লাল

এ জাতীয় বাক্য, মানে

ব এবং এমন নয় যে ব

—এ আকারের যে কোনো বাক্যই মিথ্যা।* যৌক্তিক বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব কেবল বাক্যের আকারের ওপর নির্ভর করে, এবং এরূপ বাক্যের আকার দেখেই বোঝা যায়—এ রকম বাক্য সত্য, ঐ রকম বাক্য মিথ্যা। এজন্য যৌক্তিক বাক্য প্রসঙ্গে বলা হয় যে : এরূপ বাক্য

আকারবশত সত্য, অথবা আকারবশত মিথ্যা।**

এখন, যে বাক্য আকারবশত সত্য তাকে বলে স্বতসত্য (tautologous) বাক্য, বা সংক্ষেপে স্বতসত্য (tautology), আর যে বাক্য আকারবশত মিথ্যা তাকে বলে স্বতমিথ্যা (inconsistent, self-contradictory) বাক্য, বা সংক্ষেপে—স্বতমিথ্যা (inconsistency, self-contradiction)। তাহলে আমরা তিন রকম বাক্যের কথা বলতে পারি :

স্বতসত্য, স্বতমিথ্যা ও পরতসাধ্য।

স্বতসত্য : যে বাক্য আবশ্যিকভাবে, অনিবার্যভাবে সত্য, আকারবশত সত্য তাকে বলে স্বতসত্য (বাক্য)।

স্বতমিথ্যা : যে বাক্য আবশ্যিকভাবে, অনিবার্যভাবে মিথ্যা, আকারবশত মিথ্যা তাকে বলে স্বতমিথ্যা (বাক্য)।

পরতসাধ্য : যে বাক্য আবশ্যিকভাবে সত্য বা মিথ্যা নয়, আকারবশত সত্য বা মিথ্যা নয়, যে বাক্য বস্তুত সত্য বা বস্তুত মিথ্যা, তাকে পরতসাধ্য বাক্য বলে ∎

* "এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান"-এর বদলে পড়তে পার : "রাম বুদ্ধিমান নয়", সেরকম "এমন নয় যে এ ফুলটা লাল"-এর বদলে "এ ফুলটা লাল নয়"। এ জাতীয় অন্যান্য বাক্যও অনুরূপভাবে পড়তে পার।

** logically true, logically false। এদের আক্ষরিক অনুবাদ হল : যৌক্তিকভাবে সত্য, যৌক্তিকভাবে মিথ্যা।

ওপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে—

> কোনো স্বতসত্য বচনের (পরতসাধ্য) অঙ্গবচনগুলির পরিবর্তে যে বচনই নিবেশন করা হোক না কেন, নিবেশনের ফলে পাওয়া যাবে কেবল স্বতসত্য বচন।

যথা :

যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান (১)

এটি একটি স্বতসত্য বচন। এ বচনে "রাম বুদ্ধিমান"-এর বদলে "এ ফুলটি লাল", এবং "বাদুড় স্তন্যপায়ী" বসালে পাই যথাক্রমে নিম্নোক্ত স্বতসত্য বচন

যদি এ ফুলটি লাল হয় তাহলে এ ফুলটি লাল
যদি বাদুড় স্তন্যপায়ী হয় তাহলে বাদুড় স্তন্যপায়ী

এ কথাটা এ ভাবেও বলতে পারি : (১) বচনটির যা আকার তার, মানে—

যদি ব হয় তাহলে ব

—এ আকারের, সব (নিবেশন-) দৃষ্টান্তই সত্য, এর কোনো মিথ্যা দৃষ্টান্ত থাকতে পারে না। আবার

> কোনো স্বতমিথ্যা বচনের (পরতসাধ্য) অঙ্গবচনগুলির পরিবর্তে যে বচনই নিবেশন করা হোক না কেন, নিবেশনের ফলে পাওয়া যাবে কেবল স্বতমিথ্যা বচন

যথা :

রাম বুদ্ধিমান এবং এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান (২)

—এ স্বতমিথ্যা বচনে "রাম বুদ্ধিমান"-এর পরিবর্তে "শ্যাম বাঙালী", "এ ফুলটি সাদা" নিবেশন করে পাই নিম্নোক্ত স্বতমিথ্যা বচনগুলি :

শ্যাম বাঙালী এবং এমন নয় যে শ্যাম বাঙালী
এ ফুলটি সাদা এবং এমন নয় যে এ ফুলটি সাদা।

ওপরে যা বলা হল তা এভাবেও ব্যক্ত করতে পারতাম : (২)-সংখ্যক বচনের আকারের

ব এবং এমন নয় যে ব

—এ আকারের কোনো (নিবেশন-) দৃষ্টান্ত সত্য হতে পারে না। কিন্তু দেখা যাবে পরতসাধ্য বচনের অঙ্গগুলির বদলে কোনো বচন নিবেশন করে সত্য বাক্য পাওয়া যায়, আবার অন্য কোনো বচন নিবেশন করে মিথ্যা বাক্য পাওয়া যায়। যথা :

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা এবং এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা (৩)

এ বাক্যটি বস্তুত সত্য। কিন্তু এ বাক্যের প্রথম অঙ্গের বদলে "এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা" আর দ্বিতীয় অঙ্গের বদলে "এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা" নিবেশন করে পাই নিম্নোক্ত মিথ্যা বাক্য :

এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজিতে লেখা এবং এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা,

আর (৩)-এর প্রথম অঙ্গের পরিবর্তে "রবীন্দ্রনাথ ২৫শে বৈশাখ জন্মগ্রহণ করেন" এবং দ্বিতীয়

অঙ্গের পরিবর্তে "রবীন্দ্রনাথ 'গীতাঞ্জলী' রচনা করেন" নিবেশন করে পাই নিম্নোক্ত সত্য বাক্য ঃ

রবীন্দ্রনাথ ২৫শে বৈশাখ জন্মগ্রহণ করেন এবং রবীন্দ্রনাথ 'গীতাঞ্জলী' রচনা করেন।

উপরোক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে, পরতসাধ্য বচনের, যথা (৩)-এর, কোনো কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত সত্য, কোনো কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত মিথ্যা।

আমরা তিন প্রকারের বচনের কথা বলেছি। এখন তিন প্রকারের বচনাকারের কথা বলতে পারি এবং এভাবে এদের সংজ্ঞা দিতে পারি

স্বতসত্য বচনাকার ঃ যে বচনাকারের কোনো মিথ্যা দৃষ্টান্ত থাকতে পারে না* তাকে স্বতসত্য বচনাকার বলে।

স্বতমিথ্যা বচনাকার ঃ যে বচনাকারের কোনো সত্য দৃষ্টান্ত থাকতে পারে না* তাকে স্বতমিথ্যা বচনাকার বলে।

পরতসাধ্য বচনাকার ঃ যে বচনাকারের সত্য দৃষ্টান্তও সম্ভব, মিথ্যা দৃষ্টান্তও সম্ভব তাকে বলে পরতসাধ্য বচনাকার।

উদাহরণ

স্বতসত্য আকার ঃ যদি ব হয় তাহলে ব**

স্বতমিথ্যা আকার ঃ ব এবং এমন নয় যে ব

পরতসাধ্য আকার ঃ ব এবং ভ।

বৈধ বাক্য ঃ "বৈধ", "অবৈধ"—এ কথাগুলি সাধারণত যুক্তিপ্রসঙ্গে প্রয়োগ করা হয়, ঠিক। তবে বচনাকার, এমন কি সাধারণভাবে বাক্য প্রসঙ্গেও, এ বিশেষণগুলি প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।† এ প্রয়োগ অনুসারে

"বৈধ বাক্য" বলতে বোঝায় ঃ স্বতসত্য বাক্য—স্বতসত্য বচনাকার ও এদের দৃষ্টান্ত। আর "অবৈধ বাক্য" বলতে বোঝায় ঃ স্বতমিথ্যা ও পরতসাধ্য বাক্য।

৮. যুক্তিবিজ্ঞান ও স্বতসত্য

আমরা বলেছি, কোনো বাক্য স্বতসত্য (বা বৈধ) কিনা বাক্যটির আকার দেখেই তা বোঝা যায়। এ কথা ঠিক নয়। এমন অনেক বাক্য আছে যার আকার দেখে সহজে, সাধারণ বুদ্ধিতে, বোঝা যায় না বাক্যটি বৈধ না অবৈধ। যথা ঃ

(১) যদি এমন হয় যে ব এবং ভ, তাহলে ব অথবা ম

(২) যদি এমন হয় যে ব এবং ভ হলে ম হবে, তাহলে—যদি ব হয় তাহলে ভ হলে ম হবে

* বা, নেই

** অথবা ঃ ব অথবা এমন নয় যে ব।

† কোনো বচন বৈধ বললে একথাও বলা হয়ে যায় যে ঐ আকারের সব বচনই বৈধ। কিন্তু কোনো বচন 'ব' বস্তুত সত্য বা বস্তুত মিথ্যা বললে কেবল ঐ বচন সম্পর্কেই উক্তি করা হয়। ১৬ পৃষ্ঠার পাদটীকা দ্রষ্টব্য। ঐ পাদটীকায় "যুক্তি" ও "বাক্য"-এর পরিবর্তে "বচন" পড়লে যা পাবে তা বর্তমান পাদটীকার বিশদ ব্যাখ্যা।

এ দুটি আকার বৈধ, কিন্তু বচনাকার দেখে সহজে সাধারণ বুদ্ধিতে বোঝা যায় না যে এরা বৈধ বা স্বতসত্য। তবে কেবল সাধারণ বুদ্ধির উপর নির্ভর করে চলার দরকার হবে না। এ জাতীয় কোনো বাক্য বৈধ কি অবৈধ যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে তা সহজেই নির্ণয় করা যায়। যুক্তিবিজ্ঞান বাক্যের বৈধতা নির্ণয় ও প্রমাণের জন্য নানা পদ্ধতি উদ্ভাবন করে; এ সব পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রায় যান্ত্রিকভাবে বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা ও প্রমাণ করা যায়।

দেখা যাবে

> বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা- ও প্রমাণ- পদ্ধতি উদ্ভাবন যুক্তিবিজ্ঞানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ আলোচ্য বিষয়।

আমরা আগে বলেছি

যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা- ও প্রমাণ- পদ্ধতি উদ্ভাবন যুক্তি বিজ্ঞানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ কাজ। এ উক্তি দুটির মধ্যে কিন্তু কোনো বিরোধ নেই। কেন নেই, তা বুঝে নাও।

আমরা (সিদ্ধান্ত) অনুমান করি, সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করি, কোনো হেতুবাক্য **থেকে**, কিন্তু কোনো সূত্র বা নীতি **অনুসারে**। যথা

৩+৩=৬ এবং ৬=৩×২, সুতরাং ৩+৩=৩×২

এ যুক্তির সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয়েছে ৩+৩=৬ আর ৬=৩×২—এ দুটি হেতুবাক্য থেকে, কিন্তু নিম্নোক্ত নীতি বা সূত্র অনুসারে :

যদি ক=খ এবং খ=গ হয় তাহলে ক=গ (I)

সেরকম

রাম বুদ্ধিমান হলে রাম শিক্ষকদের প্রিয়পাত্র, (i)
রাম বুদ্ধিমান ; (ii)
∴ রাম শিক্ষকদের প্রিয়পাত্র (iii)

এ যুক্তির সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয়েছে (i) আর (ii) থেকে, কিন্তু নিম্নোক্ত নীতি অনুসারে

যদি এমন হয় যে ব হলে ভ, এবং ব ; তাহলে ভ (II)

আরও বিশদভাবে,

যদি এমন হয় যে 'ব' সত্য হলে 'ভ' সত্য, এবং 'ব' সত্য ; তাহলে 'ভ' সত্য হবে (II)

এখন, যে নীতি অনুসারে অনুমান করা হয় সে নীতি (বা বাক্য) যদি স্বতসত্য বা বৈধ হয় তাহলে অনুমানটি বৈধ। যেমন, প্রথম যুক্তিটি বৈধ কেননা (I) বৈধ, সেরূপ দ্বিতীয় যুক্তিটিও বৈধ কেননা এ যুক্তির ভিত্তি* হল (II), আর, এটা সহজবোধ্য যে, (II) বৈধ।

† এদের দৃষ্টান্ত, যথাক্রমে—
(১) যদি এমন হয় যে রাম বুদ্ধিমান এবং শ্যাম বোকা, তাহলে রাম বুদ্ধিমান অথবা যদু বুদ্ধিমান।
(২) যদি এমন হয় যে রাম প্রথম এবং শ্যাম দ্বিতীয় হলে যদু তৃতীয় স্থানের অধিকারী হবে তাহলে—
যদি রাম প্রথম হয় তাহলে শ্যাম দ্বিতীয় হলে যদু তৃতীয় স্থানের অধিকারী হবে।

* যে নীতি অনুসারে কোনো অনুমান করা হয় সে নীতি হল সে যুক্তি বা অনুমানের ভিত্তি।

আর যে নীতি অনুসারে অনুমান করা হয় তা যদি অবৈধ হয় তাহলে অনুমানটিও অবৈধ। যথা

৬ আর ৯ অসমান, এবং ৯ আর ৯–৩ অসমান, সুতরাং ৬ আর ৯–৩ অসমান। এ অনুমান করা হয়েছে নিম্নোক্ত নীতি অনুসারে

যদি ক আর খ অসমান এবং খ আর গ অসমান হয় তাহলে ক আর গ সমান (III) এ কথা সহজবোধ্য যে এ বাক্যটি অ-স্বতসত্য, অবৈধ। যেহেতু এ নীতিটি অবৈধ সেহেতু উক্ত যুক্তিও অবৈধ।

সেরকম,

ঐ পর্বত ধূমবান হলে ঐ পর্বত বহ্নিমান,
ঐ পর্বত বহ্নিমান
∴ ঐ পর্বত ধূমবান

এ যুক্তির ভিত্তি হল নিম্নোক্ত বাক্যটি ঃ

যদি এমন হয় যে ব হলে ভ, এবং ভ ; তাহলে ব (IV)

আরও বিশদভাবে—

যদি এমন হয় যে 'ব' সত্য হলে 'ভ' সত্য, এবং 'ভ' সত্য ; তাহলে 'ব' সত্য হবে (IV) এখন, এ বাক্যটি স্বতসত্য নয়, সুতরাং উপরোক্ত যুক্তিটি অবৈধ। (IV)-সংখ্যক আকারটি দেখেই হয়ত বোঝা যাবে না যে বাক্যটি অ-স্বতসত্য, অবৈধ। পরে বাক্যের বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতির সঙ্গে পরিচিত হলে দেখতে পাবে এরকম বাক্য অবৈধ, দেখতে পাবে—এরকম বাক্য যে অবৈধ তা অতি সহজেই দেখানো যায়।

ওপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে ঃ কোনো যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা বা প্রমাণ করতে হলে, যুক্তিটি সরাসরি বিচার না করে, যুক্তিটির ভিত্তিবাক্যের বৈধতা (স্বতসত্যতা) বিচার করলেই চলে। এ বিচার করে যদি দেখা যায় যে বাক্যটি স্বতসত্য তাহলে দাবী করতে পারি—যুক্তিটি বৈধ, আর যদি দেখা যায় যে বাক্যটি স্বতসত্য নয় তাহলে দাবী করতে পারি—যুক্তিটি অবৈধ ॥

তারপর কোনো অনুমানের ভিত্তিবাক্য কী, কোন্ নীতি অনুসারে অনুমান করা হয়েছে, তা উদ্ধার করা মোটেই কঠিন নয়। ওপরে আমরা চারটি যুক্তি এদের ও ভিত্তিনীতি উল্লেখ করেছি। এগুলি একটু যত্ন সহকারে লক্ষ করলেই বুঝতে পারবে—

প্রথমে, প্রদত্ত যুক্তির আকার উদ্ধার করে নিয়ে,
তারপর, হেতুবাক্যের পূর্বে "যদি এমন হয় যে" আর "∴"-এর জায়গায় "তাহলে" লিখলে যুক্তিটির, বা ঐ আকারের সব যুক্তির ভিত্তিবাক্য পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ

আজ সোমবার হলে কাল মঙ্গলবার, এবং
কাল মঙ্গলবার হলে পরশু বুধবার ;
∴ আজ সোমবার হলে পরশু বুধবার।

এ যুক্তির আকার স্পষ্টতই :

ব হলে ভ, এবং ভ হলে ম ; ∴ ব হলে ম

এ আকার থেকে উপরোক্ত নির্দেশ অনুসারে পাই

যদি এমন হয় যে ব হলে ভ, এবং ভ হলে ম ; তাহলে ব হলে ম ।

এ বাক্যটিই প্রদত্ত যুক্তির ভিত্তিবাক্য, এ বাক্য বা নীতি অনুসারে আলোচ্য যুক্তিটি গঠন করা হয়েছে । প্রসঙ্গত, এ বাক্যটি বৈধ, সুতরাং আলোচ্য যুক্তিটিও বৈধ ।

৯. বৈধতার লক্ষণ : সারসংকলন

আমরা নানাভাবে বৈধতার লক্ষণ দেবার চেষ্টা করেছি । এ প্রসঙ্গে যে সব উক্তি করেছি তা একত্র সংগৃহীত হল । এ উক্তিগুলি সমার্থক বলে গণ্য ।

প্রথমে বলেছি (৮ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

> যদি এমন হয় যে কোনো যুক্তির হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে না, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ ।

তারপর বলা হয়েছে (১৬ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

> যদি কোনো যুক্তির আকার এমন হয় যে যুক্তি-আকারটির এমন কোনো নিবেশন-দৃষ্টান্ত নেই যাতে হেতুবাক্য-সত্য-ও-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ ।

সর্বশেষে বলতে চেয়েছি

> যদি কোনো যুক্তির ভিত্তিনীতি স্বতসত্য বাক্য হয়, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ ।*

১০. সত্যমূল্য

আমরা জানি : বচন মাত্রই সত্য অথবা মিথ্যা, এবং যা সত্য বা মিথ্যা হতে পারে তাকেই বচন বলে । এখন, সত্য ও মিথ্যা—এ ধর্মগুলিকে (এদের যে কোনোটিকে) নির্দেশ করার জন্য নব্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা "সত্যমূল্য" কথাটি ব্যবহার করেন । এ ব্যবহার অনুসারে বলতে পারি : সত্যমূল্য দু প্রকার : সত্য ও মিথ্যা ।** লক্ষণীয় যে, মিথ্যাও একটি সত্যমূল্য । "সত্যমূল্য" কথাটি ব্যবহার করার সুবিধা লক্ষ কর ।

যা সত্য বা মিথ্যা হতে পারে তাই বচন

এ কথার পরিবর্তে বলতে পারি

যার কোনো সত্যমূল্য থাকতে পারে তাই বচন ।

---

* পরে দেখব (অধ্যায় ১২. বিভাগ ১২ দ্রষ্টব্য), এ কথাও বলা যায় :
যদি কোনো যুক্তির 'হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা'—এ কল্পনা স্ববিরোধী হয় বা এ কল্পনা থেকে স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ ।

** বা : সত্যতা ও মিথ্যাত্ব ।

আবার

"এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা" এ বচনটি সত্য না মিথ্যা ?

"এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা" এ বচনটি সত্য না কি মিথ্যা ?

এ প্রশ্ন দুটি এভাবে উত্থাপন করতে পারি

"এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা" এ বচনের সত্যমূল্য কী ?

"এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা" এ বচনের সত্যমূল্য কী ?

এবং এর উত্তরে বলতে পারি প্রথম বচনটির সত্যমূল্য হল—সত্য, আর দ্বিতীয়টির সত্যমূল্য—মিথ্যা।

১১. যৌগিক বচন ও সত্যমূল্য নির্ণয়

যৌগিক বচনের নিম্নোক্ত আকারগুলি লক্ষণীয়

এমন নয় যে ব   ব এবং ভ   ব অথবা ভ

এ আকারের যৌগিক বচনের একটি বৈশিষ্ট্য হল এই যে ঃ

এরূপ কোনো যৌগিক বচনের অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানা থাকলে সমগ্র যৌগিক বচনটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়।

অর্থাৎ যদি এ কথা আমাদের বলে দেওয়া হয় যে এ যৌগিক বচনের অমুক অঙ্গ সত্য অমুক অঙ্গ মিথ্যা তাহলে এ তথ্যের ভিত্তিতে সম্পূর্ণ যৌগিক বচনটি সত্য না কি মিথ্যা তা আমরা নির্ণয় করতে পারি। ধরা যাক, কেউ এ উক্তি করল যে

রাম বুদ্ধিমান এবং রাম পরিশ্রমী

আরও ধরা যাক, আমাদের জানা আছে বা আমাদের বলে দেওয়া হল যে, এ বচনের দ্বিতীয় অঙ্গটি, "রাম পরিশ্রমী"—এ বচনটি মিথ্যা (আর প্রথম অঙ্গটি সত্য)। তাহলে এ তথ্যের ভিত্তিতে আমরা বলতে পারি ঃ সমগ্র যৌগিক বচনটি মিথ্যা। কেননা উক্ত যৌগিক বচনে দাবী করা হয়েছে যে দুটি অঙ্গই সত্য ; কিন্তু একটি অঙ্গ মিথ্যা হলে, এ দাবী টেকে না। "ব অথবা ভ" আকারের একটি বচন নেওয়া যাক ঃ

রাম দশম শ্রেণীতে পড়ে অথবা রাম একাদশ শ্রেণীতে পড়ে।

ধরা যাক, জানা গেল যে

"রাম দশম শ্রেণীতে পড়ে" সত্য

"রাম একাদশ শ্রেণীতে পড়ে" মিথ্যা

এ তথ্যের ভিত্তিতে বলতে পারি ঃ উক্ত যৌগিক বচনটি সত্য। কেননা ঐ বচনে দাবী করা হয়েছে যে, অন্তত একটি অঙ্গ সত্য, আর একটি অঙ্গ সত্য বলে যৌগিক বচনটি সত্য। এবার "এমন নয় যে ব"-এর একটা দৃষ্টান্ত নেওয়া যাক

এমন নয় যে শ্যাম বুদ্ধিমান

এ বাক্যের অন্তর্গত আণবিক বচনটির ("শ্যাম বুদ্ধিমান"-এর) সত্যমূল্য জানা থাকলে বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যাবে।

ধরা যাক, "শ্যাম বুদ্ধিমান" সত্য
তাহলে অবশ্যই "এমন নয় যে শ্যাম বুদ্ধিমান" মিথ্যা
আর যদি "শ্যাম বুদ্ধিমান" মিথ্যা
হয়, তাহলে "এমন নয় যে শ্যাম বুদ্ধিমান" সত্য

ওপরে যৌগিক বচনের যে বৈশিষ্ট্যের কথা বলা হল সে বৈশিষ্ট্য যে বচনে বর্তমান তাকে বলে সত্যাপেক্ষ বচন। কেন বলে, তা নিচে ব্যাখ্যা করা হল।

১২. সত্যাপেক্ষক (Truth-function)

যদি এমন হয় যে—কোনো কিছু, ক, অন্যকিছুর, খ-এর, উপর নির্ভর করে, খ-এর অপেক্ষায় থাকে, এবং খ-এর মূল্য জানা গেলে ক-এর মূল্য নির্ণয় করা যায়—তাহলে ক-কে খ-এর অপেক্ষক বলে। যথা

$$a=2b+1$$

এখানে a b-এর অপেক্ষক, কেননা a-এর আঙ্কিক মূল্য কত তা নির্ভর করে b-এর জায়গায় কী মূল্য বসানো হবে তার উপর। যথা b-এর মূল্য যদি 2 হয় তাহলে a-এর মূল্য 5, b-এর মূল্য 3 হলে a-এর মূল্য হবে 7। অনুরূপভাবে

$$a=4b-3c+2$$

এখানে a হল b ও c-এর অপেক্ষক, কেননা a-এর মূল্য নির্ভর করে b ও c-এর মূল্যের উপর, b, c-এর কী মূল্য তা জানা গেলে a-এর মূল্য নির্ণয় করা যায়।

এখন, "অপেক্ষক" কথাটি গণিতেই প্রধান ব্যবহৃত হয়, ঠিক। কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞানে বাক্য প্রসঙ্গেও কথাটি ব্যবহার করা যায়। কেননা, বাক্যও মূল্য—সত্যমূল্য—গ্রহণ করে ; এবং, আমরা দেখেছি, অঙ্গবচনের সত্যমূল্য জানা গেলে যৌগিক বচনের* সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়। এজন্য যৌগিক বচনকে* সত্যাপেক্ষ (truth-functional) বচন বলা হয়। এভাবে আমরা সত্যাপেক্ষ বচনের লক্ষণ দিতে পারি

> যে যৌগিক বচন এমন যে এর সত্যমূল্য আণবিক অঙ্গগুলির সত্যমূল্যের উপর নির্ভর করে, এবং আণবিক অঙ্গগুলির সত্যমূল্য দেওয়া হলে এর সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়, তাকে সত্যাপেক্ষ বচন বলে।

আর যে যোজক দিয়ে সত্যাপেক্ষ বচন গঠিত হয় তাকে বলে সত্যাপেক্ষ যোজক** যথা : "এবং", "অথবা", "এমন নয় যে"। তারপর

> সত্যাপেক্ষ বচনের আকারকে বলে সত্যাপেক্ষক (truth-function)।

আরও বিশদভাবে—

যে বচনাকার এমন যে তার

(১) সব বর্ণপ্রতীক বচনগ্রাহক, আর

* একটু পরেই বুঝতে পারবে—এখানে সব রকমের যৌগিক বচনের কথা বলা হচ্ছে না।

** truth-functional connective

(২) গ্রাহক প্রতীকগুলির জায়গায় আণবিক বচন নিবেশন করে যে নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায় তার সত্যমূল্য নিবেশিত বচনগুলির সত্যমূলের উপর নির্ভর করে, এবং নিবেশিত অঙ্গবচনগুলির সত্যমূল্য জানা গেলে নিবেশন-দৃষ্টান্তগুলির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়,

তাকে বলে সত্যাপেক্ষক।

আর সত্যাপেক্ষকের নিবেশনদৃষ্টান্তকে বলে সত্যাপেক্ষ বচন। যথা

ব এবং ভ

একটি সত্যাপেক্ষক, আর এর নিবেশন-দৃষ্টান্ত

রাম আসবে এবং শ্যাম আসবে

সত্যাপেক্ষ বচন।

লক্ষণীয় উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে, "সত্যাপেক্ষক" কথাটি কেবল বচনাকারের বেলাতেই প্রযোজ্য। তবে অনেক সময় সত্যাপেক্ষক আর সত্যাপেক্ষ বচনের পার্থক্য অগ্রাহ্য করা হয়, এবং সত্যাপেক্ষ বচনকেও সত্যাপেক্ষক বলে উল্লেখ করা হয়।

১৩. অ-সত্যাপেক্ষ বাক্য

সত্যাপেক্ষক আর যৌগিক বচনের সত্যমূল্য নির্ণয় সম্বন্ধে যা বলা হয়েছে তার থেকে এ ধারণা হতে পারে যে, যৌগিক বাক্য মাত্রই সত্যাপেক্ষ বাক্য, আর বচনযোজক মাত্রই সত্যাপেক্ষ যোজক। এ ধারণা কিন্তু ভুল। মানে, এমন যৌগিক বাক্য আছে যার অঙ্গের সত্যমূল্য জানা গেলেও কেবল সে জ্ঞানের ভিত্তিতে সমগ্র বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যথা

ভ, কেননা ব $\qquad$ q because p

ও এদের দৃষ্টান্ত সত্যাপেক্ষ বাক্য নয়—এ আকারের যৌগিক বচনের আণবিক অঙ্গগুলির সত্যতা মিথ্যাত্ব জানা গেলেও কেবল ঐ তথ্যের ভিত্তিতে যৌগিক বচনটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায় না। একটা উদাহরণ ঃ

রাম আত্মহত্যা করেছে, কেননা রাম ক্যানসারে ভুগছিল

ধরা যাক, জানা গেল

(১) "রাম আত্মহত্যা করেছে" সত্য

(২) "রাম ক্যানসারে ভুগছিল" সত্য

এখন এ তথ্যের ভিত্তিতে কি যৌগিক বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়? উত্তর ঃ না, যায় না। কেননা, এমন হতে পারে (১) ও (২) সত্য, কিন্তু রাম আত্মহত্যা করেছে অন্য কারণে। কাজেই (১) ও (২) সত্য—একথা জানলেও, কেবল এ জ্ঞানের ভিত্তিতে উক্ত যৌগিক বাক্যটির সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয় করা সম্ভব নয়। সুতরাং উক্ত বাক্যটি সত্যাপেক্ষ বাক্য নয়। ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে ঃ "কেননা", "because" সত্যাপেক্ষ যোজক নয়। সেরকম, লক্ষণীয়,

for, hence, যেহেতু, সেহেতু, and hence, therefore

এসবও সত্যাপেক্ষ যোজক নয়।

অ-সত্যাপেক্ষ বাক্য ও যোজকের আরও কয়টি উদাহরণ :

—বিশ্বাস করে যে—, —মনে করে যে—

A believes that p, A doubts that p, —says that—, —asserts that—, —denies that—, —expects that—, —wishes that—, —regrets that—, —is afraid that—, —is surprised that—

প্রভৃতি আকারের বাক্য সত্যাপেক্ষ নয়। কেন নয়, দেখ। ধরা যাক, বস্তুত রাম বিশ্বাস করে যে : জওহরলাল নেহেরু স্বাধীন ভারতের প্রথম প্রধানমন্ত্রী, এবং নেহেরু আততায়ীর হস্তে নিহত হয়েছিলেন ; আরও ধরা যাক, রাম বিপ্লবী ভগৎসিং-এর নামও শোনে নি। এখন নিম্নোক্ত বাক্য দুটি লক্ষ কর।

রাম বিশ্বাস করে যে জওহরলাল নেহেরু স্বাধীন ভারতে প্রথম প্রধানমন্ত্রী (১)
রাম বিশ্বাস করে যে বিপ্লবী ভগৎসিং-এর ফাঁসী হয়েছিল (২)

এখানে দুটি অঙ্গবাক্যই—"যে"র পরবর্তী অংশ—সত্য,* অথচ (১) সত্য আর (২) মিথ্যা। আবার

রাম বিশ্বাস করে যে জওহরলাল নেহেরু আততায়ীর হস্তে নিহত হয়েছিলেন (1)
রাম বিশ্বাস করে যে বিপ্লবী ভগৎসিং আত্মহত্যা করেছিলেন (2)

এখানে দুটি অঙ্গবাক্যই মিথ্যা অথচ (1) সত্য আর (2) মিথ্যা। এর থেকে বোঝা গেল "—বিশ্বাস করে যে ব" এ আকারের বাক্যে "ব"-এর জায়গায় যে আণবিক বচন বসতে পারে তার সত্যমূল্যের ওপর উক্ত আকারের বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ভর করে না। আবার

এটা অবশ্যম্ভব যে, এটা সম্ভব যে, It is necessary that, It is possible that

এসবও সত্যাপেক্ষ যোজক নয়। একটা উদাহরণ।

এটা অবশ্যম্ভব যে এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা (i)
এটা অবশ্যম্ভব যে এ লাল ফুলটা লাল (ii)

এখানে দুটি অঙ্গবচনই সত্য অথচ (i) মিথ্যা আর (ii) সত্য। সাধারণভাবে বলতে পারি

—(ক্রিয়াপদ) যে—, —(ক্রিয়াপদ) that—,

আকারের বাক্য অ-সত্যাপেক্ষ।

আবার, "—" implies "—", "—" in equivalent to "—"

আকারের বাক্যও সত্যাপেক্ষ নয়। "implies" যে সত্যাপেক্ষ যোজক নয় তা নিচে দেখানো হল। মনে করা যাক আমরা জানি যে

Jones is an Englishman	: সত্য	Jones is a bachelor	: মিথ্যা
Jones is a logician	: সত্য	Jones is unmarried	: মিথ্যা
		Jones is an Indian	: মিথ্যা

এখন, "Jones is a bachelor" implies "Jones is unmarried" (1)
"Jones is a bachelor" implies "Jones is an Indian" (2)

* বস্তুত ভগৎসিং-এর ফাঁসী হয়েছিল।

এ বাক্য দুটির উভয় অঙ্গই মিথ্যা, অথচ (1) সত্য আর (2) মিথ্যা। আবার

"Jones is a logician" implies "Jones is a man" (i)

"Jones is a logician" implies "Jones is an Englishman" (ii)

এ বাক্য দুটির প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্য সত্য, অথচ (i) সত্য, (ii) মিথ্যা।

১৪ সত্যাপেক্ষক ঃ "সত্য", "মিথ্যা"

আমরা জানি ঃ বচনাকার সম্বন্ধে, সুতরাং সত্যাপেক্ষক সম্বন্ধে, সত্য মিথ্যার কথা ওঠে না ; "সত্য", "মিথ্যা" এ বিশেষণগুলি বচন সম্বন্ধেই প্রযোজ্য। যথা ঃ ব এবং ভ, ব অথবা ভ—এসব আকার সত্যও নয় মিথ্যাও নয়, এদের মধ্যে সত্য মিথ্যা বলে গণ্য হবার মত কিছু নেই। কিন্তু আমরা উক্তরূপ বচনাকার সম্পর্কেও "সত্য", "মিথ্যা" প্রয়োগ করব। যথা, বলব

"ব এবং ভ" মিথ্যা, কেননা 'ব' সত্য ঠিক, কিন্তু 'ভ' মিথ্যা (১)

এ কথা বললে বুঝতে হবে আমরা সংক্ষেপে নিম্নোক্ত উক্তি করছি

"ব এবং ভ"-এর নিবেশন-দৃষ্টান্তটি মিথ্যা, কেননা ব-তে যে বচন নিবেশন করা হয়েছে তা সত্য ঠিক, কিন্তু ভ-তে যে বচন নিবেশন করা হয়েছে তা মিথ্যা (২)

কিন্তু (১)-এর অর্থ বুঝতে গেলে (১)-কে (২)-এর সংক্ষিপ্ত রূপ মনে করার, বা মনে মনে (১)-কে (২)-তে রূপান্তরিত করে নেবার দরকার নেই। আমরা সরাসরি বচনাকার বা সত্যাপেক্ষ সম্পর্কে "সত্য", "মিথ্যা" প্রয়োগ করতে পারি। কেননা—

প্রথমত, যখন বচনাকার সম্পর্কে "সত্য", "মিথ্যা" প্রয়োগ করা হয়, যথা বলা হয় "ব এবং ভ" মিথ্যা, তখন ধরে নিতে পারি, 'ব' 'ভ' এসব গ্রাহক প্রতীক নয় কোনো বচনের সংক্ষিপ্ত রূপ ; যেমন "ব এবং ভ" মিথ্যা বললে মনে করতে পারি যে বলা হয়েছে

বলাই এসেছে এবং ভূদেব এসেছে

বা বরুণ বোকা এবং ভাস্কর বুদ্ধিমান

এ জাতীয় কোনো বাক্য সম্পর্কে উক্তি করা হয়েছে। তাহলে আর বচনাকার সম্পর্কে "সত্য" "মিথ্যা" প্রয়োগ করলে আপত্তি ওঠার কথা নয়।

দ্বিতীয়ত, যুক্তিবিজ্ঞান যুক্তির ও বাক্যের আকার নিয়েই আলোচনা করে। কোনো বাক্য বা যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা ও প্রমাণ করতে হলে, যুক্তি বা বাক্যটির বিষয়বস্তু কী, মানে যুক্তি ও বাক্যের আকারের গ্রাহকপ্রতীকে কোন্ কোন্ বচন নিবেশন করা হল, তা অপ্রাসঙ্গিক ; যুক্তির অবয়বের, বাক্যের বা বাক্যের অঙ্গের, সত্যমূল্য জানতে পারলেই হল। যেমন, যদি বলা হয়

"ব এবং ভ" মিথ্যা কেননা 'ব' সত্য ঠিক, কিন্তু 'ভ' মিথ্যা (১)

তাহলে 'ব' কোন্ বচন বোঝাচ্ছে 'ভ' কোন্ বচন বোঝাচ্ছে "ব এবং ভ"-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত কী—এসব জানার দরকার নেই। কেবল 'ব', 'ভ'-এর সত্যমূল্য উল্লেখ থেকেই* বোঝা গেল

* এবং "এবং"-এর স্বরূপ থেকে

(১)-সংখ্যক উক্তিটি যথার্থ। কাজেই বচনাকারকেও সত্য বা মিথ্যা বলে বর্ণনা করতে কোনো বাধা নেই। বরং বচনাকার বা সত্যাপেক্ষক প্রসঙ্গে "সত্য", "মিথ্যা" প্রয়োগ করা খুব সুবিধাজনক।

আমরা বলেছি (৩৯ পৃঃ দ্রষ্টব্য) আমাদের প্রধান লক্ষ্য হল যুক্তির বৈধতা (ও বাক্যের বৈধতা) নির্ণয় ও প্রমাণ। এখন যে যুক্তি এ বইয়ের আলোচ্য তার অবয়ব হল সত্যাপেক্ষ বাক্য ও এদের আণবিক অঙ্গ। কাজেই আমরা আর অ-সত্যাপেক্ষ বাক্যের কথা না তুলে কেবল সত্যাপেক্ষ বাক্যই আলোচনা করব।

অনুশীলনী

১. (i) Peter is present, (ii) 'Peter is present' is true
(i)-এর 'Peter is present' আর (ii)-এর 'Peter is present'-এর মধ্যে পার্থক্য কী ?

২. *Man* may be defined thus : *man* means what is meant by *rational animal*. —Here what is defined is *man* and not man.
এ বাক্যে কোথায় "man" ব্যবহার করা হয়েছে আর কোথায় উল্লেখ করা হয়েছে তা বল।

৩. A : Is 'a red rose is a rose' a tautology ?
B : But what do you mean by tautology ?
A : A tautology is a sentence that is always true.
এখানে 'tautology' কোথায় ব্যবহার করা হয়েছে, কোথায় উল্লেখ করা হয়েছে ?

৪. (i) Please be seated
(ii) 'Please be seated' is used to make a request
(iii) I do not know what you mean by 'Please be seated'.
এ বাক্যগুলিকে "Please be seated" কোথায় ব্যবহার করা হয়েছে কোথায় উল্লেখ করা হয়েছে, তা বল।

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিতে যদি কোনো অশুদ্ধি দেখ তাহলে শুদ্ধ করে লেখ।
(i) Man is mortal expresses a true proposition
(ii) Man is not an English word
(iii) "True" is an adjective : here "true" is used to mention "true"
(iv) This is a rose implies this is a flower.

৬. নিম্নোক্ত বাক্যটিতে কোন্ কোন্ শব্দ ব্যবহৃত হয়েছে, আর কোন্ কোন্ শব্দ উল্লেখ করা হয়েছে ?

What *is* means is and therefore differs from *is* for '*is* is' would be nonsense.

(Russell)

৭. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টি স্বতসত্য, কোন্‌টি স্বতমিথ্যা, আর কোন্‌টি পরতসাধ্য, বল।

(i) If it rains then it snows
(ii) If it rains then it rains
(iii) It rains or it rains
(iv) It rains and it rains
(v) It rains or it does not rain
(vi) It is raining and it is not raining
(vii) "It rains" implies "it rains".

৮. একটি অসত্যাপেক্ষক বাক্যের উদাহরণ দাও, এবং কেন বাক্যটি অসত্যাপেক্ষক বলে গণ্য তা বুঝিয়ে বল।

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌গুলি সত্যাপেক্ষ বাক্য, কোন্‌গুলি অসত্যাপেক্ষ ?

(i) Aristotle said that slavery is justifiable
(ii) A died before B was born
(iii) 'P' implies 'Q'
(iv) 'P' is equivalent to 'Q'
(v) A is present and B is absent
(vi) It is possible that there is life on moon
(vii) The train was late and so he could not arrive in time
(viii) He took off his clothes and then jumped into the water
(ix) A arrived after B left.

১০. নিম্নোক্ত যোজকগুলির কোন্‌গুলি সত্যাপেক্ষ যোজক কোন্‌গুলি সত্যাপেক্ষ নয় ?

and, and hence, it is not the case that, so it is not the case that, asserts that, either—or—, therefore, is the contradictory of.

৩

সত্যাপেক্ষ বাক্য

১. নিষেধ (Negation)

ধরা যাক, আমরা মনে করি যে,—'ব' বাক্যটি মিথ্যা ; তাহলে আমরা বলতে পারি ঃ 'ব' মিথ্যা। এ কথা না বলে, 'ব' বাক্যটিতে কোনো নঞর্থক শব্দ ব্যবহার করেও আমাদের বক্তব্য ('ব' যে মিথ্যা—এ বক্তব্য) ব্যক্ত করতে পারি। যথা

"রাম বুদ্ধিমান"—এ বাক্যটি মিথ্যা

এ কথার পরিবর্তে বলতে পারি

রাম বুদ্ধিমান নয়।

এভাবে নঞর্থক প্রতীক যুক্ত করাকে বলে নিষেধকরণ বা নিষেধন।

কোনো বাক্যকে নিষেধ করে আমরা অন্য একটি বাক্য পাই। নিষেধ-করে-পাওয়া বাক্যটিকে মূল বাক্যের নিষেধ (negation বা denial) বলে অভিহিত করা হয়। নিষেধলব্ধ বাক্যটিকে নিষেধক বাক্য বলে অভিহিত করা যায়। যথা

এ ফুলটি লাল (১)

এ বাক্যকে নিষেধ করে পাই

এ ফুলটি লাল নয় (২)

এখানে (২) হল (১)-এর নিষেধ। অথবা বলতে পারি (২) একটি নিষেধক বাক্য।

সাধারণ ভাষায় নানান ভাবে নিষেধকরণ করা হয় ঃ

"নয়", "নি", "না" প্রভৃতি নঞর্থক প্রতীক ব্যবহার করে, মূল ক্রিয়ার সঙ্গে "not" "do not", "does not", "fail(s) to" প্রভৃতি ব্যবহার করে।

উদাহরণ

প্রদত্ত বাক্য	প্রদত্ত বাক্যের নিষেধ
রাম বুদ্ধিমান	রাম বুদ্ধিমান নয়
শ্যাম পাশ করেছে	শ্যাম পাশ করে নি
যদু চা খায়	যদু চা খায় না
Tom teaches	Tom does not teach
Dick arrived	Dick did not arrive
Harry passed the test	Harry failed to pass the test

এখন, নিষেধকরণের জন্য বিভিন্ন নঞর্থক প্রতীক ব্যবহার না করে কেবল একটি প্রতীক ব্যবহার করা সুবিধাজনক। এজন্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা একটি নঞর্থক প্রতীক বেছে নিয়েছেন। প্রতীকটি হল

এমন নয় যে— It is not the case that—

এ প্রতীক প্রয়োগ করে কি করে নিষেধ করা যায় লক্ষ কর।

প্রদত্ত বাক্য	প্রদত্ত বাক্যের নিষেধ
রাম বুদ্ধিমান	এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান
Dick arrived	It is not the case that Dick arrived

আবার যুক্তিবিজ্ঞানীরা "এমন নয় যে—"-এর সংক্ষেপক হিসাবে "~" চিহ্নটি ব্যবহার করেন।* একে বলে curl বা tilde, বাংলায়— ঢেউ। কিভাবে ঢেউ ব্যবহার করা হয় লক্ষ কর।

"এমন নয় যে ব"-এর বদলে লেখা হয়ঃ ~ব

আর "~ব" পড়া হয় এভাবেঃ নয় ব। ঢেউ ব। এমন নয় যে ব। 'ব' মিথ্যা॥ সে রকম, "$\sim p$" পড়া হয় এভাবেঃ Not p। curl p। It is not the case that p। 'p' is false॥

ঢেউ ব্যবহার করে কি করে নিষেধকরণ করা হয় তা লক্ষণীয়।

মূল বাক্য	মূলের নিষেধ
Tom teaches	~Tom teaches
Dick departed	~Dick departed
বলাই বুদ্ধিমান	~বলাই বুদ্ধিমান

যুক্তিবিজ্ঞানে

$$\sim p$$

আকারের বাক্যই নিষেধের বা নঞর্থক বাক্যের আদর্শ আকার (যুক্তিবৈজ্ঞানিক আকার) বলে গণ্য। এবং যুক্তিবিজ্ঞানীরা আদর্শ আকারের বাক্য ভিন্ন অন্যরূপ বাক্য প্রয়োগ অনুমোদন করেন না। কাজেই যে সব নঞর্থক বাক্য উক্ত আকারে ব্যক্ত নয় তাদের উক্ত আদর্শ আকারে ব্যক্ত করার দরকার। এ জাতীয় বাক্যকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করতে হলে, মূল বাক্যের অন্তর্গত নঞর্থক চিহ্ন 'নয়', 'not', 'does not' ইত্যাদি বাদ দিয়ে, অর্থাৎ

* এ চিহ্নটি "not"-এর আদ্যক্ষর 'n'-এর প্রলম্বিত, দীর্ঘায়িত রূপ

বাক্যটি সদর্থক বাক্যে রূপান্তরিত করে, বাম ধারে '~' চিহ্নটি ব্যবহার করতে হয়।† উদাহরণ

মূল বাক্য	রূপান্তর
Dick did not arrive	~Dick arrived
It is not raining	~It is raining
রাম আসে নি	~রাম এসেছে

২. ঢেউ ও বন্ধনী

ঢেউ ও ঢেউর ব্যবহার সম্বন্ধে একটা কথা বিশেষভাবে মনে রাখার দরকার। অন্যান্য যোজকগুলি দ্বৈতাঙ্গী (দুটি (অঙ্গ) বাক্যকে যুক্ত করে)। কিন্তু ঢেউ একাঙ্গী যোজক—অর্থাৎ '~' কেবল একটি অঙ্গের সঙ্গে যুক্ত হয়*। যথা "এবং" যোজকটি দুটি বাক্যকে যুক্ত করে, যেমন "ব এবং ভ"—এ বাক্যে 'ব' এবং 'ভ' "এবং"-এর দ্বারা যুক্ত হয়েছে। কিন্তু "~" একাঙ্গী যোজক, এবং "~" কেবল এর অব্যবহিত পরবর্তী আণবিক বাক্যকে** বিশেষিত, প্রভাবিত বা নিয়ন্ত্রিত করে। যথা

'~ব এবং ভ'—এ বাক্যের বক্তব্য : এমন-নয়-যে ব এবং ভ।
'ব' মিথ্যা আর 'ভ' সত্য ॥

এ বাক্যের বক্তব্য এই নয় যে : "ব এবং ভ"—এ বাক্য মিথ্যা।

কোনো যৌগিক বাক্যের নিষেধ পেতে হলে সমগ্র যৌগিক বাক্যটিকে বন্ধনীর মধ্যে রেখে তার বামে '~' ব্যবহার করতে হয়। যথা "ব এবং ভ"-এর নিষেধ এভাবে ব্যক্ত করতে হবে : ~(ব এবং ভ)। নিম্নোক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষণীয়। পাশাপাশি এদের বক্তব্য উল্লেখ করা হল।

(১) ~ব এবং ভ ('ব' মিথ্যা, এবং 'ভ' সত্য) তুলনীয় −৩+৪(=১)
(২) ~(ব এবং ভ) ("ব এবং ভ"—এ বাক্যটি মিথ্যা) −(৩+৪)(=−৭)

---

† সব বাক্যকে এভাবে রূপান্তরিত করা চলে না। যথা "Some flowers are not white" (১)—এখানে (১)-এর পরিবর্তে লেখা যায় না : ~Some flowers are white (২) ; কেননা (১) ও (২) সমার্থক নয়। কেন নয়, দেখ। (১)-এতে বলা হয়েছে—কোনো কোনো ফুল, অন্তত একটা ফুল, অশ্বেত। আর (২)-তে বলা হয়েছে—একথা মিথ্যা যে কোনো ফুল (একটা ফুলও) শ্বেতবর্ণ, তার মানে—কোনো ফুলই শ্বেতবর্ণ নয়। তাহলে (২)-কে এভাবে অনুবাদ করতে পারি : No flowers are white (৩)। বলা বাহুল্য (১) ও (৩) সমার্থক নয় সুতরাং (৩)-এর-সমার্থক (২) আর (১) সমার্থক নয়।

তবে যে সব বাক্য সম্বন্ধে আলোচ্য নিয়ম খাটে না সে সব বাক্য এ বইর আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত। কাজেই আমরা আলোচ্য নিয়মটির উপর নির্ভর করে চলতে পারি।

* অর্থাৎ নিষেধক বাক্যে থাকে একটি অঙ্গবাক্য, যা নিষেধিত হয়।

** পরে দেখব, '~' এর অব্যবহিত পরবর্তী বন্ধনীভুক্ত যৌগিক বাক্যকেও বিশেষিত করে।

(১)-তে 'ব'-এর নিষেধের সঙ্গে 'ভ' সংযোজিত হয়েছে ; সুতরাং (১) হল সংযৌগিক বাক্য। (২) হল "ব এবং ভ"-এর নিষেধ ; সুতরাং এটি নিষেধক বাক্য। প্রথম ক্ষেত্রে "~" কেবল 'ব'-কে প্রভাবিত, বিশেষিত বা নিয়ন্ত্রিত করছে, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে "~" বন্ধনীর অন্তর্গত সমগ্র বাক্যটিকে প্রভাবিত করছে। আবার,

~ব অথবা ভ, ব অথবা ~ভ —এসব বৈকল্পিক বাক্য।

~(ব অথবা ভ), ~(~ব অথবা ভ), ~(~ব অথবা ~ভ) —এসব নিষেধক বাক্য ॥

৩. নিষেধক অপেক্ষকের সত্যসারণী

'$\sim p$' একটি সত্যাপেক্ষক, মানে : 'p' সত্য না কি মিথ্যা তা জানতে পারলে '$\sim p$'-এর সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায়। এটা সহজবোধ্য যে

'p' সত্য হলে '$\sim p$' মিথ্যা

'p' মিথ্যা হলে '$\sim p$' সত্য।

ওপরে যা বলা হল তা নিম্নোক্ত সারণীর (table-এর) আকারে ব্যক্ত করা যায় :

p	$\sim p$
T	F
F	T

এখানে সংক্ষেপকরণের জন্য "সত্য"-এর বদলে T ("True"-এর আদ্যক্ষর) আর "মিথ্যা"র বদলে F ("False"-এর আদ্যক্ষর) ব্যবহৃত হয়েছে।

কেউ কেউ "সত্য"-এর পরিবর্তে "1" আর "মিথ্যা"র পরিবর্তে "0" ব্যবহার করেন। যারা এ সংকেতলিপি ব্যবহার করেন তারা উক্ত সারণীতে যা বলা হয়েছে তা এভাবে ব্যক্ত করবেন :

p	$\sim p$
1	0
0	1

স্পষ্টতই এ সংকেতলিপিতে "সত্য"-এর বদলে "1" আর "মিথ্যা"র বদলে "0" ব্যবহার করা হয়েছে। আমরা সাধারণভাবে এ সংকেতলিপিই ব্যবহার করব।

উক্তরূপ সারণীকে বলে সত্যমূল্য সারণী (truth-value table) বা সংক্ষেপে—সত্যসারণী (truth table)। বলা বাহুল্য, উক্ত সারণী এভাবে পড়তে হবে :

যদি 'p' সত্য (1) হয় তাহলে '$\sim p$' মিথ্যা (0)।

যদি 'p' মিথ্যা (0) হয় তাহলে '$\sim p$' সত্য (1) ॥

ওপরের সারণীতে যা বলা হল তা নিম্নোক্ত সমীকরণ বা "নামতা"র আকারেও ব্যক্ত করা যায়—

$$\sim 1=0 \qquad \sim 0=1$$

প্রথম সমীকরণটির বক্তব্য : যদি কোনো বাক্যের সত্যমূল্য 1 হয় তাহলে তার নিষেধের মূল্য 0,

দ্বিতীয় সমীকরণটির বক্তব্য : যদি কোনো বাক্যের সত্যমূল্য 0 হয় তাহলে তার নিষেধের মূল্য 1 ॥

এ সমীকরণ প্রয়োগ করে আমরা "~ দিয়ে গঠিত বাক্যের সত্যমূল্য নির্ণয় করতে পারি।
উদাহরণ

প্রশ্ন : 'R' মিথ্যা হলে, '~ ~ ~R'-এর সত্যমূল্য কী ?

উত্তর : R=0 ; এখন, '~ ~ ~R'-এর অঙ্গবাক্যের পরিবর্তে এ প্রদত্ত সত্যমূল্য বসিয়ে পাই

R = ~ ~ ~0
= ~ ~1 ('~0' এর বদলে '1' বসিয়ে)
= ~0 ('~1'-এর বদলে '0' বসিয়ে)
= 1 ('~0'-এর বদলে '1' বসিয়ে)

৪. নিষেধের নিষেধ (Double Negation)

আমরা জানি, কোনো বাক্যের নিষেধ পেতে হলে বাক্যটির পূর্বে ঢেউ ব্যবহার করতে হয়। প্রশ্ন : যে বাক্যের আদিতে আগে থেকেই ঢেউ আছে তার নিষেধ গঠন করব কি করে? উত্তর : নিষেধকরণের নিয়ম অনুসারে অবশ্যই আর একটি ঢেউ ব্যবহার করতে হবে। যথা

'~ব'-এর নিষেধ : ~ ~ব, '~ ~ব'-এর নিষেধ : ~ ~ ~ব।

তবে এরকম ক্ষেত্রে দুটি ঢেউ বর্জন করে, "কাটাকাটি" করে মূল বাক্যে ফিরে আসা যায়। যেমন, '~ ~ব'-এর পরিবর্তে লেখা যায় 'ব', '~ ~রাম বুদ্ধিমান'-এর পরিবর্তে 'রাম বুদ্ধিমান'।

আবার ইচ্ছা করলে আমরা প্রদত্ত 'ব'-এর পরিবর্তে লিখতে পারি : ~ ~ব। যে কোনো বাক্যের পূর্বে যুগ্ম ঢেউ ব্যবহার করতে পারি। কোনো প্রদত্ত বাক্যের যুগ্ম ঢেউ যে বর্জন করা যায়, বা কোনো প্রদত্ত বাক্যেতে যে যুগ্ম ঢেউ আমদানি করা যায় তার কারণ হল এই : যেকোনো বাক্য 'ব' ও তার নিষেধের নিষেধ '~ ~ব' সমার্থক। "—" -এর সমার্থক হল "—"-এর বদলে সংক্ষেপক "সমঃ" ব্যবহার করে সূত্রাকারে বলতে পারি*

"~ ~p" সমঃ "p"

একে বলে নিষেধের নিষেধ সূত্র, Double Negation, সংক্ষেপে—DN। এ সূত্র অনুসারে

"~ ~রাম বুদ্ধিমান" সমঃ "রাম বুদ্ধিমান"

বলা বাহুল্য, কেবল যুক্তিবৈজ্ঞানিক ভাষা নয়, সাধারণ ভাষা সম্বন্ধেও এ সূত্র খাটে। যেমন সবাই স্বীকার করবে যে

"এমন নয় যে রাম বুদ্ধিমান নয়" সমঃ "রাম বুদ্ধিমান"।

৫. সমার্থতা সম্বন্ধ

ওপরে আমরা 'সমার্থক' কথাটি প্রয়োগ করেছি। এ কথাটির মানে বুঝে নেবার দরকার। লক্ষণীয়, "সমার্থক" আর "equivalent" একার্থক শব্দ।

*চলতি কথায় বলা হয় : না'তে 'না'তে 'হাঁ' হয়। "মিথ্যা নয়" = "সত্য", "এমন নয় যে মিথ্যা" = "সত্য"।

'ব' ও 'ভ' সমার্থক, বা
'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে সমার্থতার সম্বন্ধ আছে

এ কথার মানে—'ব' ও 'ভ'-এর সত্যমূল্য ভিন্নরূপ হতে পারে না,
মানে—যদি এদের কোনোটির সত্যমূল্য 1 হয় তাহলে অন্যটির মূল্যও 1
যদি এদের কোনোটির সত্যমূল্য 0 হয় তাহলে অন্যটির মূল্যও 0 ॥

আমরা দেখেছি : "p" আর "$\sim\sim p$" সমার্থক। এখন বলতে পারি—এ কথার অর্থ হল

'p'-এর সত্যমূল্য যদি 1 হয় তাহলে '$\sim\sim p$'-এর সত্যমূল্য অবশ্যই 1 হবে, আর
'p'-এর সত্যমূল্য যদি 0 হয় তাহলে '$\sim\sim p$'-এর সত্যমূল্য অবশ্যই 0 হবে।

ধরা যাক, $p=1$। '$\sim\sim p$'-এতে এ মূল্য বসিয়ে পাই : $\sim\sim 1$। এখন
$\sim\sim 1=\sim 0=1$ (নিষেধের নামতা অনুসারে)
$\therefore$ 'p'-এর মূল্য যদি 1 হয় তাহলে '$\sim\sim p$'-এর মূল্যও 1

আবার ধরা যাক, $p=0$। '$\sim\sim p$'-তে এ মূল্য বসিয়ে পাই : $\sim\sim 0$। এখন
$\sim\sim 0=\sim 1=0$ (নিষেধের নামতা অনুসারে)
$\therefore$ 'p'-এর মূল্য যদি 0 হয় তাহলে '$\sim\sim p$'-এর মূল্যও 0।

এর থেকে বোঝা গেল 'p' আর '$\sim\sim p$' সমার্থক।

সমার্থতা সম্বন্ধ পরে আরও বিশদভাবে আলোচিত হবে। আপাতত সমার্থতা সম্বন্ধে একটা কথা বলে নেওয়া ভাল, মনে করছি।

কোনো বাক্য 'ব'-র সত্যমূল্য অভিন্ন, এর সত্যমূল্য যা তাই, অন্যরূপ নয়। 'ব' যদি সত্য হয় তাহলে 'ব' অবশ্যই সত্য, আর যদি মিথ্যা হয় তাহলে অবশ্যই মিথ্যা। এর থেকে বোঝা যায়, প্রত্যেকটি বাক্য নিজে নিজের সমার্থক। মানে

"ব" equiv. "ব" ।*

৬. বিরুদ্ধতা

যে দুটি বাক্য এমন যে এদের সত্যমূল্য অভিন্ন হতে পারে না,
মানে—এমন যে এদের একটি সত্য হলে অন্যটি অবশ্যই মিথ্যা, এবং
একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য—
তাদের পরস্পরের বিরুদ্ধ বাক্য বলে, এবং এদের মধ্যস্থিত সম্বন্ধকে বলে বিরুদ্ধতার সম্বন্ধ।

উদাহরণ :

"রাম বুদ্ধিমান" সত্য হলে "~রাম বুদ্ধিমান" মিথ্যা
"রাম বুদ্ধিমান" মিথ্যা হলে "~রাম বুদ্ধিমান" সত্য

সুতরাং "রাম বুদ্ধিমান" ও "~রাম বুদ্ধিমান" পরস্পরের বিরুদ্ধ বাক্য।

---

* "equiv." হল "is equivalent to"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

নিষেধের স্বরূপ বুঝে থাকলে একথাও বুঝতে পারবে যে

কোনো বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্য পেতে হলে প্রদত্ত বাক্যটিকে নিষেধ করতে হয়।

কোনো বাক্যের পূর্বে ঢেউ ব্যবহার করে বাক্যটির বিরুদ্ধ বাক্য পাওয়া যায় ॥

তার মানে

'~ব' হল 'ব'-এর নিষেধ" equiv. " '~ব' হল 'ব'-এর বিরুদ্ধ"

এজন্য অনেকে '~ব' আকারের অপেক্ষককে বিরুদ্ধ অপেক্ষক বলে অভিহিত করেন। (আমরা একে নিষেধক অপেক্ষক বলে চিহ্নিত করেছি)।

৭. সমার্থতা ও বিরুদ্ধতা

সমার্থতা ও বিরুদ্ধতার সম্বন্ধ খুব ঘনিষ্ঠ।

দুটি বাক্য যদি সমার্থক হয় তাহলে এদের যে কোনো একটিকে নিষেধ করে অন্যটির বিরুদ্ধ বাক্য পাওয়া যায়।

উদাহরণ : আমরা জানি 'p' আর '$\sim\sim p$' সমার্থক

∴ '$\sim p$' আর '$\sim\sim p$' পরস্পর বিরুদ্ধ (প্রথমটিকে নিষেধ করে)

অথবা বলতে পারি : ∴ 'p' আর '$\sim\sim\sim p$' পরস্পর বিরুদ্ধ (দ্বিতীয়টিকে নিষেধ করে)

আবার,

দুটি বাক্য যদি পরস্পরের বিরুদ্ধ হয় তাহলে এদের এদের একটিকে নিষেধ করে অন্যটির সমার্থক পাওয়া যায়।

উদাহরণ : আমরা জানি 'p' আর '$\sim p$' পরস্পর বিরুদ্ধ

∴ '$\sim p$' আর '$\sim p$' সমার্থক (প্রথমটিকে নিষেধ করে)

অথবা বলতে পারি : ∴ 'p' আর '$\sim\sim p$' সমার্থক (দ্বিতীয়টিকে নিষেধ করে)

সূত্রাকারে বলতে পারি—

" 'ব' বিরুদ্ধ 'ভ' " equiv. " '~ব' সমঃ 'ভ' "

equiv. " 'ব' সমঃ '~ভ' "।

৮. "এবং" ও সংযৌগিক অপেক্ষক

দুটি বচন "এবং" ("and") বা এদের একার্থক শব্দের দ্বারা যুক্ত হলে যে যৌগিক বচন গঠিত হয় তাকে বলে সংযৌগিক বচন (conjunctive proposition)। যথা, "রাম চলে যাবে এবং শ্যাম আসবে"—এটা একটা সংযৌগিক বচন। আর সংযৌগিক বচনের আকারকে বলে সংযৌগিক অপেক্ষক (conjunctive function)। অর্থাৎ দুটি বচনমাত্রকে প্রতীক (বা অপেক্ষক) "এবং" ("and")-এর দ্বারা যুক্ত হলে যে বচনাকার গঠিত হয় তাকে সংযৌগিক অপেক্ষক বলে। যথা

প এবং ফ, ভ এবং ~ব, $\sim p$ and q, $\sim p$ and $\sim q$

এ সব সংযৌগিক অপেক্ষক।

যোজক "এবং"-এর সংক্ষেপক প্রতীক : বিন্দু

"এবং"-এর ("and"-এর) সংক্ষেপক প্রতীক হিসাবে " · " ব্যবহার করা হয়। এ চিহ্নটিকে বলে বিন্দু। কি ভাবে বিন্দু ব্যবহার করা হয় লক্ষ কর।

"প এবং ফ"-এর পরিবর্তে লেখা হয় : প · ফ
আর "প · ফ" পড়া হয় এভাবে : প বিন্দু ফ
"p and q"-এর পরিবর্তে লেখা হয় : $p \cdot q$
আর "$p \cdot q$" পড়া হয় এভাবে : p dot q

সংযোগী (Conjuncts)

সংযৌগিক বাক্যের এক একটি অঙ্গকে বলে সংযোগী (conjunct)। যথা, 'রাম চলে যাবে · শ্যাম আসবে'—এ বাক্যের একটি সংযোগী "রাম চলে যাবে", আর একটি সংযোগী "শ্যাম আসবে"। "সংযোগী" মানে : যা সংযুক্ত হয়—যে বচন, বচনগ্রাহক বা অপেক্ষক সংযুক্ত হয়।

" · " একটি দ্বৈতাঙ্গী (binary) যোজক। অর্থাৎ একটি " · " কেবল দুটি বাক্যকে সংযুক্ত করতে পারে ; "—এবং—" আকারের বাক্যের দুটি অঙ্গ। এখন যে কোনো দুটি বাক্যকে—আণবিক কি যৌগিক বাক্যকে—" · "-এর দ্বারা যুক্ত করে সংযৌগিক বাক্য গঠন করা যায়। উদাহরণ হিসাবে নিম্নোক্ত বাক্য দুটি নেওয়া যাক :

(১) রাম আসবে · শ্যাম আসবে (২) যদু আসবে · মধু আসবে

এ বাক্য দুটিকে " · "-এর দ্বারা যুক্ত করে পাই :

রাম আসবে · শ্যাম আসবে · যদু আসবে · মধু আসবে।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় : যোজক " · " একটি দ্বৈতাঙ্গী যোজক, ঠিক; কিন্তু সংযৌগিক বাক্যে দুই বা দুই-এর বেশী যে কোনো সংখ্যক সংযোগী থাকতে থাকতে পারে। বলা বাহুল্য যে, যে বাক্যে n সংখ্যক সংযোগী সে বাক্যে $n-1$ সংখ্যক বিন্দু থাকবে।

৯. সংযৌগিক অপেক্ষকের সত্যসারণী

সংযৌগিক বচন কখন সত্য, কখন মিথ্যা ?

সংযৌগিক বচনে এ দাবী করা হয় যে বচনটির সব অঙ্গই সত্য। যথা,

রাম বোকা · শ্যাম বুদ্ধিমান— এ বচনের দাবী হল :

"রাম বোকা" এ বচনটিও সত্য, "শ্যাম বুদ্ধিমান" এ বচনটিও সত্য।

বস্তুত যদি আমরা বিশ্বাস করি যে স্বতন্ত্রভাবে "রাম বোকা"ও সত্য, "শ্যাম বুদ্ধিমান"ও সত্য তাহলে আমরা আমাদের বিশ্বাস ব্যক্ত করতে গিয়ে অনেক সময় সংযৌগিক আকারে বলি : রাম বোকা এবং শ্যাম বুদ্ধিমান। কাজেই বলতে পারি :

যে সংযৌগিক বচনের সব অঙ্গই সত্য সে সংযৌগিক বচন সত্য।
যে সংযৌগিক বচনের একটি অঙ্গও মিথ্যা সে সমগ্র সংযৌগিক বচনটি মিথ্যা ॥

কেননা, সংযৌগিক বচনে এ দাবী করা হয় যে এর সব অঙ্গই সত্য ; কিন্তু কোনো একটি অঙ্গ মিথ্যা হলে এ দাবী আর টেকে না, সংযৌগিক বচনটি মিথ্যা হয়ে পড়ে। দু একটি উদাহরণ। ধরা যাক

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$$

—এ বাক্যের অন্তর্গত 'E' মিথ্যা। কাজেই বলতে পারি : সমগ্র বাক্যটি মিথ্যা। আবার মনে করা যাক

$$F \cdot G \cdot H \cdot I \cdot J \cdot K$$

—এ বাক্য সম্বন্ধে জানা গেল যে এর অন্তর্গত "F", "G", "H", "I" সত্য। প্রশ্ন : সমগ্র বাক্যটি সত্য নাকি মিথ্যা ? উত্তর : কেবল এ তথ্যের ভিত্তিতে বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায় না। যদি অপর অঙ্গগুলিও সত্য হয় তাহলে বাক্যটি সত্য, নতুবা মিথ্যা। ওপরে সংযৌগিক বাক্য সম্বন্ধে যা বলা হল—এভাবে তার পুনরুক্তি করতে পারি :

যদি 'p' সত্য হয় এবং 'q' সত্য হয় তাহলে "$p \cdot q$" সত্য
যদি 'p' সত্য হয় এবং 'q' মিথ্যা হয় তাহলে "$p \cdot q$" মিথ্যা
যদি 'p' মিথ্যা হয় এবং 'q' সত্য হয় তাহলে "$p \cdot q$" মিথ্যা
যদি 'p' মিথ্যা হয় এবং 'q' মিথ্যা হয় তাহলে "$p \cdot q$" মিথ্যা

"যদি", "হয়", "তাহলে" ইত্যাদি শব্দ বাদ* দিয়ে উক্ত সারণীটি এভাবে ব্যক্ত করা সুবিধাজনক।

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

এখানে "সত্য"র পরিবর্তে "1" আর "মিথ্যা"র পরিবর্তে "0" ব্যবহার করা হয়েছে।

আমরা জানি উক্তরূপ সারণীকে বলে সত্যসারণী। এরূপ সারণীর দণ্ডায়মান রেখাটির বামধারের স্তম্ভগুলিকে বলে আকরস্তম্ভ (reference column বা matrix)। আর ডান ধারের স্তম্ভকে বলে ফলস্তম্ভ (result column)। লক্ষণীয় যে, আকরস্তম্ভে অঙ্গগুলির ('p'-এর, 'q'-এর) সত্যমূল্য-বিন্যাস উল্লেখ করা হয়েছে।** স্পষ্টতই দুটি অঙ্গের সত্যমূল্য মোট চারভাবে বিন্যস্ত হতে পারে :

(১) দুটি অঙ্গই সত্য (1, 1) (২) প্রথম অঙ্গ সত্য, দ্বিতীয় অঙ্গ মিথ্যা (1, 0)
(৩) প্রথম অঙ্গ মিথ্যা, দ্বিতীয় অঙ্গ সত্য (0, 1) (৪) দুইটি অঙ্গই মিথ্যা (0, 0)

এখন, বিভিন্ন অপেক্ষকেরা সত্যসারণী দিতে গিয়ে সব সময় একই ক্রমে, উপরোক্ত ক্রমে,

---

* সারণীটি পড়বার সময় "যদি", "এবং", "তাহলে" এসব যোগ দিয়ে নিয়ে পড়তে হবে।

** আকরস্তম্ভের এক-একটি সারির সত্যমূল্য বিন্যাস হল এক-একটি সত্যসর্ত (মানে সত্যমূল্য সর্ত)। যথা, দ্বিতীয় সারির সত্যসর্ত হল 10।

† যথা "প অথবা ফ", "যদি প তাহলে ফ"—এ সবেরও। এখানে সত্যাপেক্ষক বলতে বুঝছি দুই-অঙ্গ-বিশিষ্ট সত্যাপেক্ষক।

অঙ্গগুলির সত্যমূল্য উল্লেখ করা হয়। অর্থাৎ বিভিন্ন সত্যাপেক্ষকের সত্যসারণীর আকরস্তম্ভগুলি অভিন্ন। কাজেই আকরস্তম্ভগুলি অনুক্ত থাকলেও ক্ষতি নেই (ধরে নিতে হবে অঙ্গমূল্যগুলি প্রচ্ছন্ন আছে)। আকরস্তম্ভ অনুক্ত রেখে "$p \cdot q$"-এর সারণী এভাবে সংক্ষেপ করতে পারি :

$p \cdot q$
1
0
0
0

যেহেতু 11, 10, 01, 00—এ ক্রম (অঙ্গমূল্য বিন্যাসের ক্রম) অনুসরণ করা হয়েছে, সেহেতু : নিঃসঙ্গ "1" হল প্রথম ক্ষেত্রে—(1, 1)-এর ক্ষেত্রে—"$p \cdot q$"-এর সত্যমূল্য। দ্বিতীয় সারির "0" থেকে বোঝা যায়, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে—(1, 0)-এর ক্ষেত্রে—"$p \cdot q$"-এর সত্যমূল্য 0। এ ভাবে অন্য দুটির তাৎপর্য বুঝতে হবে।

এখন, স্থানসংক্ষেপের জন্য উক্ত স্তম্ভটি অনুভূমিক আকারে এভাবে লিখতে পারি : 1000। যদিও এখানে '1', '0' গণিতের সংখ্যাবাচক 1, 0 নয়, তবু উক্তরূপ সত্যমূল্য সমষ্টিকে "সংখ্যা" বলে উল্লেখ করা যায়। বস্তুত এরূপ সত্যমূল্য সমষ্টিকে truth-table number বা matrix number—বাংলায়, ফলসূচক সংখ্যা, বলে চিহ্নিত করা হয়। তাহলে

সংযৌগিক অপেক্ষকের ফলসূচক সংখ্যা হল : 1000

বলা বাহুল্য, এ সংখ্যাটি "$p \cdot q$"-এর পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণীর সংক্ষিপ্ত রূপ। এ "সংখ্যা"য় বা পূর্ণাঙ্গ সারণীতে যা বলা হয়েছে তা কয়েকটি সমীকরণের, "নামতা"র, আকারে ব্যক্ত করা যায়।

সংযৌগিকের নামতা

$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$0 \cdot 0 = 0$

এ নামতাগুলির প্রথম সংখ্যাটি প্রথম অঙ্গ 'p'-এর আর দ্বিতীয় সংখ্যাটি দ্বিতীয় অঙ্গের, 'q'-এর, সত্যমূল্য বোঝাচ্ছে। আর তৃতীয় সংখ্যাটি হল "$p \cdot q$"-এর সত্যমূল্য। বলা বাহুল্য, এখানে* "is equal to"-এর পরিবর্তে '=' ব্যবহার করা হয়েছে।

১০. সংযৌগিক অপেক্ষক সংক্রান্ত নিয়ম

আমরা সংযৌগিক অপেক্ষক সংক্রান্ত কয়েকটি নিয়ম বা সূত্র আলোচনা করতে যাচ্ছি। এ নিয়মগুলি সমার্থক বাক্যের আকারে ব্যক্ত হয়। আমরা সমার্থতা ব্যক্ত করব "—সমঃ—" "—equiv.—" ব্যবহার করে।

পুনরুক্তির সূত্র (Law of Reiteration or Idempotence)

এ নিয়ম অনুসারে, কোনো বাক্য দুবার নিয়ে যদি " · " এর দ্বারা সংযুক্ত করা হয় তাহলে মূল বাক্যে যা বলা হয়েছে, সংযৌগিক বাক্যটিতে তার অতিরিক্ত কিছু বলা হয় না। যথা,

রাম বুদ্ধিমান · রাম বুদ্ধিমান

* সাধারণভাবে আমরা অন্য কাজে, যথা, অনুবাদের কাজে, "=" চিহ্নটি ব্যবহার করব।

এ উক্তি করলে, এ কথাই বলা হয় যে রাম বুদ্ধিমান। সুতরাং

"রাম বুদ্ধিমান · রাম বুদ্ধিমান" equiv. "রাম বুদ্ধিমান"*

উক্ত বাক্যে বচনগ্রাহক 'p' বসিয়ে পাই

"$p \cdot p$" সমঃ "p"*

এ সূত্রটিকে বলে পুনরুক্তির সূত্র, আরও বিশদভাবে—সংযৌগিক সংক্রান্ত পুনরুক্তির সূত্র।

ক্রমান্তরকরণের সূত্র (Law of Commutation)

প্রথমে একটি অসংযৌগিক বাক্যের উদাহরণ।

যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান

এটি একটি প্রাকল্পিক বাক্য। এ যৌগিক বাক্যের অঙ্গগুলির ক্রম পরিবর্তন করে পাই ঃ

যদি ঐ পর্বত বহ্নিমান হয় তাহলে ঐ পর্বত ধূমবান

লক্ষণীয়, উক্ত বাক্য দুটি সমার্থক নয় ঃ এদের প্রথমটি সত্য, কিন্তু দ্বিতীয়টি মিথ্যা হতে পারে। উক্তরূপ বাক্যের অঙ্গগুলির ক্রম বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ, অর্থান্তর না ঘটিয়ে এদের ক্রম পরিবর্তন করা যায় না।

কিন্তু সংযৌগিক বাক্যের অঙ্গগুলির ক্রমের কোনো যৌক্তিক তাৎপর্য নেই। (যে নিয়ম আলোচনা করতে যাচ্ছি তাতে এ কথাই বলা হবে।) উদাহরণ ঃ

রাম এসেছে · শ্যাম এসেছে

এ বাক্যের পরিবর্তে লিখিতে পারি

শ্যাম এসেছে · রাম এসেছে

এটা সহজবোধ্য যে উক্ত বাক্যগুলি সমার্থক। কাজেই বলতে পারি ঃ

"রাম এসেছে · শ্যাম এসেছে" equiv. "শ্যাম এসেছে · রাম এসেছে"

এবং এ বাক্যে বচনগ্রাহক প্রতীক 'p', 'q' নিবেশন করে † পাই

"$p \cdot q$" সমঃ "$p \cdot q$"

এ সূত্রকে বলে (সংযৌগিক সংক্রান্ত) ক্রমান্তরকরণের সূত্র। লক্ষণীয়, গণিতে যোগ ও গুণের বেলাতেও এরূপ নিয়ম খাটে, কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের বেলায় অনুরূপ নিয়ম খাটে না। যথা

২×৩ = ৩×২ ৩+৪ = ৪+৩

কিন্তু এ কথা বলা যায় না যে

২−৩ = ৩−২ ১২÷৩ = ৩÷১২

* "সমঃ" হল "-এর সমার্থক হল—"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ। "সমঃ" ব্যবহৃত হবে ইংরেজী বাক্যের মধ্যে। "P" সমঃ "Q"—পড়তে পারি এভাবে ঃ 'P'-এর সমার্থক হল 'Q', বা এভাবে ঃ 'P' আর 'Q' সমার্থক।

"equiv." হল ' is equivalent to"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ ; "equiv." ব্যবহৃত হবে বাংলা বাক্যের মধ্যে।

† এবং 'equiv.'-এর বদলে "সমঃ" বসিয়ে

যূথ্যন্তরকরণের নিয়ম (Law of Association)

"যূথীকরণ" মানে যূথবদ্ধকরণ। বর্তমান প্রসঙ্গে "যূথীকরণ" বলতে বুঝব বন্ধনীর অন্তর্ভুক্তকরণ। তাহলে যূথ্যন্তরকরণ মানেঃ অন্যভাবে বন্ধনীভুক্তকরণ।

আমরা জানি, 'a'-কে 'b' দিয়ে গুণ করে যা পাই (পাই '$a \times b$)' তাকে আবার 'c' দিয়ে গুণ করে যা পাওয়া যায় তা, মানেঃ

$$(a \times b) \times c$$

আর "$b \times c$" দিয়ে 'a'-কে গুণ করে যা পাওয়া যায় তা, মানে

$$a \times (b \times c)$$

সমমান। তার মানে

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

যথা $(২ \times ৩) \times ৪ = ২ \times (৩ \times ৪)$

এ রকম ক্ষেত্রে বন্ধনীর কোনো তাৎপর্য নেই। সংযোগকরণ সম্বন্ধেও উক্তরূপ উক্তি করা যায়। যেমন

(১) রাম এসেছে · শ্যাম এসেছে (২) যদু এসেছে

এ বাক্য দুটিকে " · " দিয়ে যুক্ত করে পাই

(রাম এসেছে · শ্যাম এসেছে) · যদু এসেছে (i)

(১)-সংখ্যক বাক্যটির অঙ্গগুলি আগেই সংযুক্ত হয়েছে এবং এ সংযৌগিক বাক্যটির সঙ্গে পরে আর একটি বাক্য সংযুক্ত হল—এ কথা বোঝাবার জন্য (১) বাক্যটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়েছে। আবার

(৩) রাম এসেছে (৪) শ্যাম এসেছে · যদু এসেছে

এ বাক্য দুটিকে " · " দিয়ে যুক্ত করে পাই

রাম এসেছে · (শ্যাম এসেছে · যদু এসেছে) (ii)

(৩)-এর সঙ্গে একটি সংযৌগিক বাক্য, (৪), যুক্ত হয়েছে একথা বোঝাবার জন্য (৪)-কে বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়েছে। লক্ষণীয় যে (i) আর (ii)-এর মধ্যে কোনো যৌক্তিক পার্থক্য নেই, এরা সমার্থক বাক্য। অর্থাৎ

"(রাম এসেছে · শ্যাম এসেছে) · যদু এসেছে" equiv.

"রাম এসেছে · (শ্যাম এসেছে · যদু এসেছে)"

এখন, এ বাক্যের অন্তর্গত বচনগুলিতে বচনগ্রাহক প্রতীক নিবেশন করে পাই

"$(p \cdot q) \cdot r$" সমঃ $p \cdot (q \cdot r)$"

এ সূত্রকে বলে যূথ্যন্তরকরণের সূত্র। এ সূত্র অনুসারে—যে বাক্যের প্রত্যেকটি অঙ্গ সংযোগী সে বাক্যের যূথীকরণ পালটে দেওয়া যায়, মানে বন্ধনীচিহ্ন ভিন্নভাবে বসানো যায়।

মনে রাখতে হবে, যে বাক্য একাধিক স্বতন্ত্র যোজক দিয়ে গঠিত সে বাক্যে বন্ধনীর বিশেষ তাৎপর্য আছে। সেক্ষেত্রে অর্থান্তর না ঘটিয়ে প্রদত্ত বন্ধনীর অদলবদল করা যায় না। যথা

"$\sim (p \cdot q \cdot r)$"-এর বদলে লেখা যায় নাঃ $\sim (p \cdot q) \cdot r$

"$a + (b \times c) = x$"-এর বদলে লেখা যায় নাঃ $(a + b) \times c = x$

যে সূত্রগুলি ব্যাখ্যা করা হল নিচে সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল।

পুনরুক্তি ঃ	"$p \cdot p$" সম ঃ "p"	(Idempotence)
ক্রমান্তরকরণ ঃ	"$p \cdot q$" সম ঃ "$q \cdot p$"	(Commutation)
যূথান্তরকরণ ঃ	"$(p \cdot q) \cdot r$" সম ঃ "$p \cdot (q \cdot r)$"	(Association)

১১. সংযৌগিক বচনের আদর্শ আকার

সাধারণ ভাষায় সংযৌগিক বচন নানাভাবে গঠন করা হয়—যথা ঃ

ও, আর, তাছাড়া, also, moreover, furthermore, as well

প্রভৃতি যোজক ব্যবহার করে। অনেক সময়, "এবং", "আর" এসব উহ্য রাখা হয়, কমা ব্যবহার করে এদের কাজ চালানো হয়। যুক্তিবিজ্ঞান কিন্তু বাকভঙ্গির এ রকম বিভিন্নতা অনুমোদন করে না। যুক্তিবিজ্ঞানে

প · ফ $\qquad$ $p \cdot q$

—এ আকারকেই সংযৌগিক বচনের আদর্শ আকার বলে গণ্য করা হয়। কাজেই যে সংযৌগিক বচন আদর্শ আকারে ব্যক্ত নয় তাকে, যুক্তিবৈজ্ঞানিক কাজের জন্য (যথা, বৈধতা বিচারের জন্য), আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করে নেবার দরকার। নিচে কয়েকটি বচনের রূপান্তর দেখানো হল।

John is rich, he is honest
John is rich, also he is honest
John is rich, besides he is honest
John is rich, moreover he is honest
John is rich, he is honest as well
John is rich, in addition he is honest
John is rich, further he is honest
John is rich, furthermore he is honest
John is rich, at the same time he is honest

এ বাক্যগুলিকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করে পাই

John is rich · John is honest

সাধারণ ভাষায় "এবং", "আর" প্রভৃতি দিয়ে কেবল বাক্যযোজনা করা হয় না পদযোজনাও করা হয় ; এ যোজকগুলি দুটি বিশেষ্যের মধ্যে, ক্রিয়াপদের মধ্যে, এমন কি ক্রিয়াবিশেষণের মধ্যেও স্থাপন করা হয়। কিন্তু যে বাক্যে "এবং" প্রভৃতি দিয়ে কেবল বাক্যই সংযুক্ত হয় তাকেই যুক্তিবিজ্ঞানে সংযৌগিক বাক্য বলে। তবে যেসব বাক্যে "এবং", "আর" প্রভৃতি পদের মধ্যে স্থাপিত হয় সে সব বাক্যকে সাধারণত সংযৌগিক বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় ; এবং এরূপ রূপান্তর অবশ্যকর্তব্য। যথা

রাম এবং শ্যাম আসবে = *রাম আসবে · শ্যাম আসবে
রাম আসবে এবং থাকবে = রাম আসবে · রাম থাকবে
রাম আস্তে আর সাবধানে চলে = রাম আস্তে চলে · রাম সাবধানে চলে।

---

* এরকম ক্ষেত্রে "=" হল "-কে 'অনুবাদ' বা রূপান্তর করে পাওয়া যায়"-এর সংক্ষেপক প্রতীক

মনে রাখবে, কোনো বাক্যে "এবং", "and" ইত্যাদির প্রয়োগ দেখলেই এ কথা সব সময় বলা যাবে না যে বাক্যটি সংযৌগিক বাক্য। যথা

রাম ও শ্যাম ঝগড়া করছিল (মারামারি করছিল, তর্ক করছিল)

রাম ও শ্যাম গলায় গলায় বন্ধু

—এসব সংযৌগিক বাক্য নয়। এজন্য এদের সংযৌগিক বাক্যের আকারে "প এবং ফ"-এর আকারে, রূপান্তরিত করা যায় না। যেমন, একথা বলা যায় না যে

রাম ও শ্যাম গলায় গলায় বন্ধু =রাম গলায় গলায় বন্ধু · শ্যাম· ···

রাম আর শ্যাম একই কলেজে পড়ে=রাম একই কলেজে পড়ে · শ্যাম একই······

"কিন্তু", "যদিও", "তথাপি", "but", "although", "yet" প্রভৃতি

"এবং" আর উক্ত শব্দগুলি একার্থক নয়, "এবং"-এর অর্থ আর এদের অর্থের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। "এবং" আর "কিন্তু"র পার্থক্যের কথাই ধরা যাক। "এবং" ব্যবহার করে কেবল এ দাবীই করা হয় যে, সংযুক্ত বাক্য দুটির উভয়ই সত্য। কিন্তু যদি মনে করা হয় যে দুটি বাক্যের মধ্যে কিছুটা অসঙ্গতি আছে, সাধারণত বাক্য দুটি যুগপৎ সত্য হয় না, তবেই এদের "কিন্তু" দিয়ে সংযুক্ত করা হয়। যথা, "রাসবিহারিবাবু পণ্ডিত ব্যক্তি কিন্তু নিরহঙ্কার" এ উক্তির মধ্যে এ ইঙ্গিত আছে যে সাধারণত পণ্ডিত ব্যক্তিরা অহঙ্কারী হন। আর যদি আমরা মনে করি : দুটি সত্য বাক্যের অসঙ্গতির পরিমাণ এত বেশী যে এ অসঙ্গতির প্রতি অন্যের দৃষ্টি আকর্ষণ করা দরকার, তাহলে আমরা "যদিও", "তথাপি", "yet", "although" ইত্যাদি ব্যবহার করি। যথা, "হারিতবাবু নির্বাচনে পরাজিত হয়েছেন তথাপি তাকে মন্ত্রী করা হয়েছে"—এ বাক্যে এ ঈঙ্গিত আছে যে : এটা খুব বিস্ময়ের ব্যাপার যে হারিতবাবু নির্বাচনে পরাজিত হয়েছেন অথচ তাকে মন্ত্রী করা হল। যুক্তিবিজ্ঞানে কিন্তু "এবং" আর

"কিন্তু", "তবু", "তথাপি"

প্রভৃতির পার্থক্য, আবার, "and" আর :

but, but also, although, even though, yet, still,
nevertheless, inspite of the fact, not only—but (also)

—এদের পার্থক্য অগ্রাহ্য করা হয়। কেননা, যে পার্থক্য বাক্যের সত্যমূল্যকে কোনোভাবে প্রভাবিত করে না, যুক্তিবিজ্ঞানের দিক থেকে তা অপ্রাসঙ্গিক, সুতরাং তা অগ্রাহ্য করা চলে। এখন, যে (যে) সর্ত (সত্যসর্ত, truth-condition) পালিত হলে

"$p \cdot q$" আকারের বাক্য (১)

সত্য, ঠিক সে (সে) সর্ত অনুসারে

p but q, p although q, p even though q (২)

—এ আকারের বাক্য সত্য। আর যে যে সর্তে (১) মিথ্যা ঠিক সে সে সর্তে (২) মিথ্যা। ধরা যাক

John is rich and John is honest

এ বাক্য মিথ্যা, কেননা বস্তুত জন্ ধনী নয়। সেক্ষেত্রে

John is rich but John is honest

এ বাক্যও মিথ্যা। আর প্রথম বাক্যটি সত্য হলে দ্বিতীয়টিও সত্য হত। এজন্য যুক্তি-বিজ্ঞানে "and" আর "but" ইত্যাদির পার্থক্য অগ্রাহ্য করা হয়। যুক্তিবিজ্ঞানের বিধান অনুসারে :

It is raining but the sun is shining
It is raining, still the sun is shining
It is raining, yet the sun is shining
It is raining while the sun is shining
It is raining whereas the sun is shining
It is raining but also the sun is shining
It is raining although the sun is shining
It is raining even though the sun is shining
It is raining, nevertheless the sun is shining
Not only it is raining, but also the sun is shining
Not only it is raining but the sun is shining as well
It is raining inspite of the fact that the sun is shining

—এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকে

It is raining · the sun is shining

—এ বাক্যে রূপান্তরিত করতে হবে। এদের প্রত্যেকটির যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকার : $p \cdot q$

রূপান্তরের আরও কয়টি উদাহরণ :

রাম বুদ্ধিমান, ঠিক ; কিন্তু বড় দাম্ভিক=রাম বুদ্ধিমান · রাম বড় দাম্ভিক
রাম পুরস্কার পেয়েছে তবু রাম বিষণ্ণ=রাম পুরস্কার পেয়েছে · রাম বিষণ্ণ
যদিও অনাবৃষ্টি হয়েছে তবুও (তথাপি) ভাল ফসল হয়েছে=
অনাবৃষ্টি হয়েছে · ফসল ভাল হয়েছে
এখন শরৎকাল তথাচ (তত্রাপি) আকাশ মেঘাচ্ছন্ন=
এখন শরৎকাল · আকাশ মেঘাচ্ছন্ন
রাম পাশ করেছে উপরন্তু (তাছাড়া, তদুপরি) বৃত্তি পেয়েছে=
রাম পাশ করেছে · রাম বৃত্তি পেয়েছে
ফসল ভাল হয়েছে অধিকন্তু রেশন ব্যবস্থা চালু হয়েছে=
ফসল ভাল হয়েছে · রেশন ব্যবস্থা চালু হয়েছে
অনাবৃষ্টি সত্ত্বেও ফসল ভাল হয়েছে=অনাবৃষ্টি হয়েছে · ফসল ভাল হয়েছে
এবার যুগপৎ বন্যা ও দুর্ভিক্ষ হল=এবার বন্যা হল · এবার দুর্ভিক্ষ হল
রাম বোকা, শ্যাম বুদ্ধিমান=রাম বোকা · শ্যাম বুদ্ধিমান
যখনই রাম এল তখনই শ্যাম এল*=রাম এল · শ্যাম এল।

বলা বাহুল্য, উপরোক্ত প্রত্যেকটি বাক্য "প · ফ" অপেক্ষকের দৃষ্টান্ত।

* সংযোগী দুটির অতীত কাল লক্ষণীয়। "যখনই রাম আসে তখনই শ্যাম আসে"—এটি কিন্তু সংযৌগিক বচন নয়। পরে বুঝতে পারব, এটা একটা প্রাকল্পিক বচন।

১২. "অথবা" ও বৈকল্পিক অপেক্ষক

দুটি বচন "অথবা" ("or")-এর, বা এদের সমার্থক শব্দের, দ্বারা যুক্ত হলে যে যৌগিক বচন গঠিত হয় তাকে বলে বৈকল্পিক বচন (alternative proposition)। যথা, "রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে"—এটা একটা বৈকল্পিক বচন। আর বৈকল্পিক বচনের আকারকে বলে বৈকল্পিক অপেক্ষক। অর্থাৎ দুটি বচনগ্রাহক প্রতীক (বা অপেক্ষক) "অথবা"-র ("or"-এর) দ্বারা যুক্ত হলে যে বাক্য গঠিত হয় তাকে বলে বৈকল্পিক অপেক্ষক (alternative function)। যথা

প অথবা ফ, প অথবা ~ফ, $\sim p$ or q, $\sim p$ or $\sim q$

—এসব বৈকল্পিক অপেক্ষক।

যোজক "অথবা"র সংক্ষেপক প্রতীক : ফলা

"অথবা" বা "or"-এর সংক্ষেপক প্রতীক হিসাবে "v" ব্যবহার করা হয়।* এ চিহ্নটিকে বলে ফলা (wedge)। কিভাবে ফলা ব্যবহার করা হয় লক্ষ কর।

	"প অথবা ফ"এর পরিবর্তে লেখা হয়	: প v ফ
এবং	"প v ফ" পড়া হয় এভাবে	: প ফলা ফ
সেরকম	"$p \vee q$" পড়া হয় এভাবে	: p wedge q
	অথবা এভাবে	: p vee q
	বা এভাবে	: p vel q ॥

বিকল্প (Alternants)

বৈকল্পিক বাক্যের এক একটি অঙ্গকে বলে বিকল্প (alternant) যথা, "রাম আসবে v শ্যাম আসবে" এ বাক্যের একটি বিকল্প "রাম আসবে", আর একটি "শ্যাম আসবে"। "বিকল্প" মানে : পরিবর্ত (alternative) কল্পনা বা উক্তি।

" · "-এর মত "v" চিহ্নটিও দ্বৈতাঙ্গী যোজক। অর্থাৎ একটি "v" দিয়ে যে বাক্য গঠিত হয় তার দুটি অঙ্গ। এখন যে কোনো দুটি বাক্যকে—আণবিক কি যৌগিক বাক্যকে—"v"-এর দ্বারা যুক্ত করে বৈকল্পিক বাক্য গঠন করা যায়। উদাহরণ হিসাবে নিম্নোক্ত বাক্য দুটি নেওয়া যাক।

(১) রাম আসবে v শ্যাম আসবে (২) যদু আসবে v মধু আসবে

এ বাক্য দুটিকে "v"-এর দ্বারা যুক্ত করে পাই নিম্নোক্ত বৈকল্পিকটি :

রাম আসবে v শ্যাম আসবে v যদু আসবে v মধু আসবে

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় : "v" একটি দ্বৈতাঙ্গী যোজক, ঠিক ; কিন্তু বৈকল্পিক বাক্যে দুই বা দুই-এর বেশী যেকোনো সংখ্যক বিকল্প থাকতে পারে।

---

* আমাদের "নতুবা" ("অথবা") আর ল্যাটিন "vel" একার্থক শব্দ। মনে করা যেতে পারে, এ ল্যাটিন শব্দটির আদ্যক্ষরই যোজক "v" হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

১৩. বৈকল্পিক অপেক্ষকের সত্যসারণী

কোনো বৈকল্পিক বচনে এ দাবী করা হয় না যে : অমুক অঙ্গটি সত্য, অমুক অঙ্গটি মিথ্যা। এ জাতীয় বচনে কেবল এ দাবীই করা হয় যে

সব বিকল্পই মিথ্যা নয়, অন্তত একটি বিকল্প সত্য।

অর্থাৎ "$p \vee q$"-এর বক্তব্য হল, "p", "q"—এদের উভয়ই মিথ্যা নয়, এদের অন্তত একটি সত্য।

কাজেই বলতে পারি

যে বৈকল্পিক বচনের অন্তত একটি অঙ্গ সত্য সে বৈকল্পিক বচন সত্য।

যে বৈকল্পিক বচনের প্রত্যেকটি অঙ্গই মিথ্যা সে বৈকল্পিক বচন মিথ্যা ॥

কেননা, বৈকল্পিক বচনে এ দাবী করা হয় যে : অন্তত একটি অঙ্গ সত্য, কিন্তু প্রত্যেকটি অঙ্গ মিথ্যা হলে "অন্তত একটি অঙ্গ সত্য" এ দাবী আর টেকে না। দু একটি উদাহরণ। ধরা যাক

$$A \vee B \vee C \vee D \vee E$$

এ বাক্যের 'E' সত্য (অন্য অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানা নেই)। কেবল এ তথ্যের ভিত্তিতে বলতে পারি : বৈকল্পিক বাক্যটি সত্য। আবার মনে করা যাক

$$E \vee F \vee G \vee H \vee I$$

এ বাক্য সম্বন্ধে জানা গেল যে 'E', 'F', 'G' মিথ্যা। প্রশ্ন : উক্ত বাক্যটি সত্য না কি মিথ্যা? উত্তর : কেবল এ তথ্যের ভিত্তিতে বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায় না। যদি বাকি অঙ্গগুলির কোনোটি সত্য হয় তাহলে বাক্যটি সত্য, আর যদি অন্য অঙ্গগুলিও মিথ্যা হয় তাহলে বাক্যটি মিথ্যা।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে : "$p \vee q$" আকারের বাক্য কখন সত্য কখন মিথ্যা?—এ প্রশ্নের জবাব নিম্নোক্ত সত্যসারণীর আকারে দিতে পারি।

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

এ সারণীর সর্বশেষ সংখ্যাস্তম্ভটি অনুভূমিক আকারে রাখলে পাই বৈকল্পিক বাক্যের ফল-সূচক সংখ্যা। স্পষ্টতই বৈকল্পিক বাক্যের ফলসূচক সংখ্যা হল : 1110

উক্ত সারণীতে যা বলা হয়েছে তা নিম্নোক্ত সমীকরণ সমষ্টির বা "নামতা" সমষ্টির আকারে ব্যক্ত করতে পারি।

বৈকল্পিকের নামতা

$$1 \vee 1=1,\ 1 \vee 0=1,\ 0 \vee 1=1,\ 0 \vee 0=0$$

বৈকল্পিক বচনের আদর্শ আকার

দৈনন্দিন জীবনের ভাষায় বৈকল্পিক বাক্য নানাভাবে গঠন করা হয়—যথা "বা" ব্যবহার করে, "কিংবা" ব্যবহার করে, "নতুবা", "either—or—" বা কেবল "or" ব্যবহার

করে। অনেক সময় আবার বিকল্পগুলিকে পৃথকভাবে উল্লেখ না করে, বৈকল্পিক যোজকটিকে দুটি বাক্যের মধ্যস্থলে স্থাপন না করে, দুটি শব্দের মাঝখানে স্থাপন করা হয়। যথা, "রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে"-এর পরিবর্তে লেখা হয়ঃ রাম অথবা শ্যাম আসবে। অনেক সময় আবার কেবল একটি "অথবা" ব্যবহার করে, কমা দিয়ে অন্য "অথবা"গুলির কাজ চালানো হয়। যথা, "রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে অথবা যদু আসবে অথবা মধু আসবে" এ বাক্য সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা হয়ঃ রাম, শ্যাম, যদু অথবা মধু আসবে। যুক্তিবিজ্ঞান কিন্তু বাকভঙ্গির উক্তরূপ বিভিন্নতা অনুমোদন করে না। যুক্তিবিজ্ঞানে

$$প \vee ফ \qquad p \vee q$$

এ আকারকেই বৈকল্পিক বচনের আদর্শ বা যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকার বলে গণ্য করা হয়। নিচে কয়েকটি বচনের রূপান্তর দেখানো হল।

Bob or Bill will win = Bob will win v Bill will win
Jack will arrive today or tomorrow = Jack will arrive today v Jack will...
Either it is raining or it is snowing = It is raining v it is snowing
Bob, Bill, Jack or Jill will win = Bob will win v Bill will... v Jack ... v Jill...

রাম আসবে কিংবা শ্যাম আসবে = রাম আসবে v শ্যাম আসবে
রাম আসবে বা শ্যাম আসবে = রাম আসবে v শ্যাম আসবে

লক্ষণীয় যে

(১) রাম আসবে নতুবা শ্যাম আসবে
(২) রাম আসবে নয়ত শ্যাম আসবে
(৩) রাম আসবে নাহয় (নাহলে) শ্যাম আসবে

এ বাক্যগুলিকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করলে পাব

রাম আসবে v শ্যাম আসবে।

"নতুবা", "নয়ত", "নাহয়", "নাহলে", "unless"

উপরোক্ত (১)–(৩) সংখ্যক বাক্যের যোজকগুলি লক্ষ কর। প্রত্যেকটি যোজক প্রয়োগ করে বলা হয়েছেঃ যোজকটির বাম দিককার বাক্য যদি মিথ্যা হয় তাহলে ডান ধারের বাক্যটি সত্য। যথা

"রাম আসবে নতুবা (নয়ত, নাহয়, নাহলে) শ্যাম আসবে"—এর বক্তব্য ঃ
যদি রাম না আসে, তাহলে শ্যাম আসবে।

অঙ্গবচনগুলির পরিবর্তে বচনগ্রাহক নিবেশন করে পাই

"প নতুবা (নয়ত, নাহয়, নাহলে) ফ"—এর বক্তব্য ঃ যদি ~প তাহলে ফ।

এ কথাটা এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি ঃ

প নতুবা (নয়ত, নাহয়, নাহলে) ফ = যদি ~প তাহলে ফ

আমরা জানি : "প নতুবা (নয়ত, নাহয়, নাহলে) ফ" = প v ফ
তাহলে বলতে পারি : যদি ~প তাহলে ফ = প v ফ

$$\text{If } \sim p \text{ then } q = p \vee q$$

এখন, যে বাক্যে "যদি ~প তাহলে ফ"—আকারের উক্তি করা তাকে যদি "প v ফ" আকারের বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় তাহলে

"q unless p" আকারের বাক্যকেও "$p \vee q$" আকারে* রূপান্তরিত করা যাবে।

কেননা

$$q \text{ unless } p = q, \text{ if } \sim p = \text{ if } \sim p \text{ (then) } q = p \vee q$$

(If $\sim p$ then $q = p \vee q$—এ সূত্র অনুসারে)

অথবা বলতে পারি

$$q \text{ unless } p = q, \text{ if } \sim p = p, \text{ নাহলে } q$$

এখন আমরা জানি : p, নাহলে $q = p \vee q$

$$\therefore \; q \text{ unless } p = p \vee q$$

পরে দেখব, বিকল্প সম্বন্ধেও ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে, অর্থাৎ "$p \vee q$" সম "$q \vee p$"।

$$\therefore \; q \text{ unless } p = p \vee q = q \vee p$$

$$(p \text{ unless } q = p \vee q)$$

রূপান্তরের উদাহরণ

Jack will come unless Jill comes = Jack will come v Jill will come
Jack will not come unless Jill comes = ~Jack will come v Jill will come

মনে রাখবে,

"p unless q" আকারের বাক্যকে যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকারে রূপান্তরিত করতে হলে "unless"-এর বদলে "v" বসালেই চলে।

Neither – nor—

মনে রাখবার দরকার, "Neither p nor q" আকারের বাক্য বৈকল্পিক বাক্য নয়, সংযৌগিক বাক্য। যথা

Neither Jack nor Jill is present = Neither Jack is present nor Jill is present (১)

= ~Jack is present · ~Jill is present

"Neither—nor—" আকারের বাক্যকে বাংলায় অনুবাদ করলে পরিষ্কার দেখা যায় যে এরূপ বাক্যে কোনো বিকল্প উল্লেখ করা যায় না। যথা (১)-কে অনুবাদ করে পাই

জ্যাক্‌ও উপস্থিত নেই এবং জিল্‌ও উপস্থিত নেই

সংকেতলিপিতে

~জ্যাক্ উপস্থিত · ~জিল্ উপস্থিত।

* বা "$q \vee p$" আকারে

১৪. বৈকল্পিক অপেক্ষক সংক্রান্ত কয়েকটি নিয়ম

"." সম্পর্কে কয়েকটি নিয়ম উল্লেখ করা হয়েছে। "v" সম্বন্ধেও অনুরূপ নিয়ম খাটে।

পুনরুক্তির সূত্র : "$p \vee p$" সমঃ "p"

এ সূত্রকে বলে বিকল্পসংক্রান্ত পুনরুক্তির সূত্র। এ সূত্র অনুসারে—

"রাম আসবে v রাম আসবে" equiv. "রাম আসবে"

ক্রমান্তরকরণের সূত্র : "$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$"

এ সূত্রটিকে বলে বিকল্প সংক্রান্ত ক্রমান্তরকরণের সূত্র। এ সূত্র অনুসারে—

"রাম আসবে v শ্যাম আসবে" equiv. "শ্যাম আসবে v রাম আসবে"

যূথ্যান্তরকরণের সূত্র : "$(p \vee q) \vee r$" সমঃ "$p \vee (q \vee r)$"

এ সূত্রটি বিকল্পসংক্রান্ত যূথ্যান্তরকরণের সূত্র। এ সূত্র অনুসারে—

"(রাম আসবে v শ্যাম আসবে) v যদু আসবে" equiv.

"রাম আসবে v (শ্যাম আসবে v যদু আসবে)"

নিচে "·" আর "v" সংক্রান্ত নিয়মগুলি সংগৃহীত হল।

	সংযৌগিক অপেক্ষক	বৈকল্পিক অপেক্ষক
পুনরুক্তি :	"$p \cdot p$" সমঃ "p"	"$p \vee p$" সমঃ "p"
ক্রমান্তরকরণ :	"$p \cdot q$" সমঃ "$q \cdot p$"	"$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$"
যূথ্যান্তরকরণ :	"$(p \cdot q) \cdot r$" সমঃ "$p \cdot (q \cdot r)$"	"$(p \vee q) \vee r$" সমঃ "$p \vee (q \vee r)$"

১৫. যূথীবিযূথীকরণ

যূথ্যান্তরকরণ সূত্রে বলা হয়েছে : কোনো সংযৌগিক (বৈকল্পিক) বাক্যে সংযোগীগুলি (বিকল্পগুলি) একভাবে বন্ধনীভুক্ত থাকলে এদের অন্যভাবে বন্ধনীভুক্ত করা যায়। আমরা আরও বলতে চাই যে

> কোনো সংযৌগিক (বৈকল্পিক) বাক্যে যদি কোনো যূথীকরণচিহ্ন (বন্ধনী) না থাকে তাহলে আমরা নতুন করে যেকোনো সংখ্যক অঙ্গকে বন্ধনীভুক্ত (যূথবদ্ধ) করতে পারি,

আবার, যদি কোনো আন্তর বন্ধনী থাকে তা বর্জন করতে পারি।

অর্থাৎ বলতে চাই

$$p \cdot q \cdot r \qquad p \cdot (q \cdot r) \qquad (p \cdot q) \cdot r$$

—এ বাক্যগুলি সমার্থক। সেরূপ

$$p \vee q \vee r \qquad p \vee (q \vee r) \qquad (p \vee q) \vee r$$

—এ সবও সমার্থক। বন্ধনীমুক্ত করাকে বলব বিযূথীকরণ। আর যেখানে বন্ধনী নেই তাতে বন্ধনীযোজনা করাকে বলব যূথীকরণ। যথা "$(p \cdot q) \cdot r$"-এতে বিযূথীকরণ করে পাই :

$p \cdot q \cdot r$। আর "$p \cdot q \cdot r$"-এতে যূথীকরণ করে পাইঃ $p \cdot (q \cdot r)$, $(p \cdot q) \cdot r$, $(p \cdot q \cdot r)$। তাহলে যূথীবিযূথীকরণ বলে একটি সূত্র উল্লেখ করতে পারি এভাবেঃ

> *যে বাক্য কেবল " · " বা কেবল "v" দিয়ে গঠিত তার অন্তর্গত যেকোনো বন্ধনী বর্জন করা যায় (বিযূথীকরণ), আর যে কোনো অঙ্গ বা অঙ্গসমষ্টিকে বন্ধনীভুক্ত করা যায় (যূথীকরণ)।*

এটা সহজবোধ্য যে "$p \cdot p \cdot p \cdot p$" সমঃ '$p$'। কিন্তু প্রথম বাক্য থেকে দ্বিতীয়টি পাই কি করে? পাই নিম্নোক্তরূপে বারবার যূথীকরণ বিযূথীকরণ সূত্র প্রয়োগ করে, পাই এভাবে–

$p \cdot p \cdot p \cdot p$	(১)	
$(p \cdot p) \cdot (p \cdot p)$	(২)	[(১) থেকে যূথীঃ* প্রয়োগ করে]
$p \cdot (p \cdot p)$	(৩)	[(২) থেকে পুনরুঃ " "]
$p \cdot p$	(৪)	[(৩) থেকে পুনরুঃ " "]
p	(৫)	[(৪) থেকে পুনরুঃ " "]

সেরকম উক্ত সূত্রগুলি প্রয়োগ করে "$p \vee p \vee p \vee p \vee p$" থেকে পাই "$p$"।

আবার ক্রমান্তরকরণ ও যূথীবিযূথীকরণ প্রয়োগ করে পাইঃ "$p \cdot q \cdot r$" সমঃ "$p \cdot r \cdot q$" সমঃ "$q \cdot r \cdot p$" ইত্যাদি, অনুরূপভাবে—"$p \vee q \vee r$" সমঃ "$p \vee r \vee q$" "$q \vee r \vee p$" ইত্যাদি। কি করে এ জাতীয় সমার্থতা পাই দু একটি ক্ষেত্রে তা দেখানো হল।

$p \vee q \vee r$		$p \cdot q \cdot r.$	
$p \vee (q \vee r)$	[যূথীঃ]	$(p \cdot q) \cdot r$	[যূথীঃ]
$p \vee (r \vee q)$	[ক্রমাঃ]**	$r \cdot (p \cdot q)$	[ক্রমাঃ]
$p \vee r \vee q$	[বিযূথীঃ]	$r \cdot p \cdot q$	[বিযূথীঃ]

১৬. বিসংবাদী ও অ-বিসংবাদী "অথবা"
(Exclusive & Non-Exclusive "or")

আমরা "অথবা" কথাটি এক বিশেষ অর্থে নিয়েছি। এ অর্থে "প অথবা ফ"-এর বক্তব্য হলঃ 'প', 'ফ'-এদের অন্তত একটি সত্য। আর আমরা স্থির করেছি যে "প অথবা ফ" আকারের বাক্যকে সব সময় "প v ফ" আকারে রূপান্তরিত করব। সাধারণ ভাষায় "অথবা" কথাটি কিন্তু দুটি ভিন্ন অর্থে ব্যবহৃত হয়–বিসংবাদী অর্থে আর অ-বিসংবাদী অর্থে। "প" আর "ফ" বিসংবাদী—এ কথার মানেঃ এ বাক্য দুটির মধ্যে অসঙ্গতি আছে, এরা যুগপৎ সত্য নয়। আর "প" ও "ফ" অ-বিসংবাদী—এ কথার মানে "প" আর "ফ"-এর মধ্যে অসঙ্গতি নেই, এদের যুগপৎ সত্য হতে বাধা নেই। যুক্তিবিজ্ঞানে "অথবা" কথাটি কেবল

* "যূথীঃ" "যূথীকরণ সূত্র"-এর, আর "পুনরুঃ" "পুনরুক্তি সূত্র"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

** বলা বাহুল্য, "ক্রমাঃ" আর "বিযূথীঃ" যথাক্রমে "ক্রমান্তরকরণ" ও "বিযূথীকরণ"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

অ-বিসংবাদী অর্থেই ব্যবহৃত হয়। "অথবা"র অ-বিসংবাদী অর্থ (এ অর্থই আমরা গ্রহণ করেছি) অনুসারে

"প অথবা ফ"-এর বক্তব্য : 'প', 'ফ'—এদের কোনোটি সত্য, এবং
এদের উভয়েরই সত্য হতে বাধা নেই।

"অথবা"র এ ব্যাখ্যাকে বলে অ-বিসংবাদী ব্যাখ্যা, আর এ-ভাবে-ব্যবহৃত "অথবা"-কে বলে অ-বিসংবাদী "অথবা" (non-exclusive "or")। যুক্তিবিজ্ঞানে অ-বিসংবাদী "অথবা"রই সংক্ষেপক হিসাবে "v" ব্যবহৃত হয়। কাজেই কোনো বাক্যে "v" চিহ্নটি দেখলেই বুঝতে হবে, "অথবা" কথাটি অ-বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। সাধারণ ভাষায়ও "অথবা" শব্দটি অনেক সময় অ-বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়। যথা

রাম লক্ষ্মী ব্যাঙ্কে চাকরি পাবে অথবা (রাম) গণেশ ব্যাঙ্কে চাকরি পাবে

এ বাক্যে "অথবা" অ-বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। যদি দুটি বিকল্পই সত্য হয়, যদি রাম দুটো ব্যাঙ্কেই চাকরি পায়, তাহলে আমরা বলব না যে উক্ত ভবিষ্যৎ বাণীটি অসত্য বলে প্রমাণিত হল। সেরূপ

এ পদে কোনো প্রথম শ্রেণীর এম. এ. অথবা পি. এইচ্. ডি. নিয়োগ করা হবে

এ ঘোষণার মধ্যে এমন ঈঙ্গিত নেই যে—যে ব্যক্তি প্রথম শ্রেণীর এম. এ. এবং পি. এইচ্. ডি. সে নিয়োগের উপযুক্ত নয়। কিন্তু সাধারণ ভাষায় "অথবা" কথাটি বিসংবাদী অর্থেও ব্যবহৃত হয়। এ-ভাবে-ব্যবহৃত "অথবা"কে বলে বিসংবাদী "অথবা"। "অথবা"র বিসংবাদী অর্থ অনুসারে—

"প অথবা ফ"-এর বক্তব্য হল : 'প', 'ফ'—এদের কোনো একটি সত্য,
এবং এদের উভয়ই সত্য নয়।

উদাহরণ :*

ছেলে বায়না ধরল : সে দুপুরে সার্কাস আর রাত্তিরে যাত্রা দেখতে যাবে, আর তার বাবা তার আবদার নামঞ্জুর করে বলল : না,

তোমায় সার্কাস দেখতে যেতে দেব অথবা যাত্রা দেখতে যেতে দেব

—এখানে "অথবা" কথাটি বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

---

* অনেকে বিসংবাদী "অথবা"র দৃষ্টান্ত দিতে গিয়ে দুটি বিপরীত বা বিরুদ্ধ বাক্য "অথবা" দিয়ে যুক্ত করে বৈকল্পিক বাক্য গঠন করেন। যথা, তারা বলেন : এ ফুলটি লাল অথবা নীল, ঐ ফুলটি শ্বেতবর্ণ অথবা অশ্বেতবর্ণ—এ জাতীয় বাক্যে "অথবা" বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়। কিন্তু "অথবা"টি বিসংবাদী কি অবিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে এসব দৃষ্টান্ত দেখে তা বুঝবার উপায় নেই। কেননা, "অথবা"র ব্যবহারের ফলে যোজিত বাক্যগুলি বিসংবাদী হয় নি ; বাক্যগুলি আগে থেকেই. স্বরূপত, বিসংবাদী। আর যোজিত বাক্যগুলি স্বরূপত বিসংবাদী বলে অবিসংবাদী "অথবা"র, এমন কি (অবিসংবাদী) "এবং"-এর, দ্বারা যুক্ত হলেও এরা বিসংবাদীই থাকবে, অবিসংবাদী হবে না। কাজেই উক্তরূপ বাক্যে "অথবা" বিসংবাদী অর্থে ব্যবহৃত হয়—এ দাবী অসঙ্গত।

যেহেতু "অথবা" কথাটি সাধারণ ভাষায় দু অর্থে ব্যবহৃত হয় সেজন্য অনেক যুক্তিবিজ্ঞানী এ প্রসঙ্গে দুটি ভিন্ন যোজকের, এবং দুটি পৃথক সত্যাপেক্ষকের, কথা বলেন। তাঁরা অবিসংবাদী "অথবা"র পরিবর্তে "v" ব্যবহার করেন। আর বিসংবাদী "অথবা"র বদলে একটি বৃহত্তর ফলা, "V", ব্যবহার করেন। বিসংবাদী "অথবা"র সংক্ষেপক হিসাবে "excl-or" প্রতীকটিও ব্যবহৃত হয়। "excl-or" স্পষ্টতই "exclusive-or"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ। আমরা বিসংবাদী "অথবা", "V" বা "excl-or" দিয়ে গঠিত বাক্যকে বিসংবাদী বাক্য বা বিষমমান বাক্য বলে অভিহিত করতে পারি। মনে রাখতে হবে

p (অবিসংবাদী) অথবা $q = p \vee q$ —বৈকল্পিক বাক্য

p (বিসংবাদী) অথবা $q = p \bigvee q$ —বিষমমান বাক্য

p excl-or $q = p \bigvee q$ — ঐ

১৭. বিষমমান অপেক্ষক

আমরা দেখেছি যে

"$p \bigvee q$"-এর বক্তব্য হল : 'p', 'q'—এদের কোনো একটি সত্য, এবং এদের উভয়ই সত্য নয়।

কাজেই

যে বিষমমান বাক্যের দুটি অঙ্গই সত্য সে বাক্য মিথ্যা

আর যে বিষমমান বাক্যের দুটি অঙ্গই মিথ্যা সে বাক্য মিথ্যা।

কিন্তু যে বিষমমান বাক্যের একটি অঙ্গ সত্য একটি অঙ্গ মিথ্যা সে বাক্য সত্য ॥

সমীকরণের আকারে বলতে পারি

$$1 \bigvee 1 = 0,\ 1 \bigvee 0 = 1,\ 0 \bigvee 1 = 1,\ 0 \bigvee 0 = 0$$

এ সমীকরণগুলি দেখে নিজেরাই "$p \bigvee q$"-এর সত্যসারণী গঠন করে নিতে পারবে।

এখন, "$p \vee q$" আর "$p \bigvee q$"-এর সাদৃশ্য বৈসাদৃশ্য লক্ষ কর।

$\left.\begin{matrix} p \vee q \\ p \bigvee q \end{matrix}\right]$ এ দুটি বাক্যেই দাবী করা হয় : 'p', 'q'—এদের কোনো একটি সত্য।

"$p \bigvee q$"—এ বাক্যে আরও বাড়তি দাবী করা হয় : 'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য নয় ॥ পুনরুক্তি করে বলি

"$p \bigvee q$" এর বক্তব্য : 'p', 'q' এদের কোনো একটি সত্য এবং এদের উভয়ই সত্য নয়। এর থেকে বোঝা যায় "V" বলে একটা স্বতন্ত্রযোজক মানবার আবশ্যকতা নেই। "$p \bigvee q$"-কে এভাবে ব্যক্ত করা যায় :

$$(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)^{*} \qquad (১)$$

* $p \cdot q$ = 'p', 'q',—এদের উভয়ই সত্য $\therefore$ $\sim(p \cdot q)$ = 'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য নয়।

আবার, "$p \vee q$" কে এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি :

'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য নয় এবং এদের উভয়ই মিথ্যা নয়

সংকেতলিপিতে—

$$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)^{*} \qquad (২)$$

এখন "~(প · ফ)" আকারের বাক্যকে বলে প্রাতিকল্পিক (disjunctive) বাক্য। দেখা গেল যে, বিষমমান বাক্যকে দুটি প্রাতিকল্পিক বাক্যের সংযৌগিক রূপ বলে গণ্য করা যায় ((২) দ্রষ্টব্য)। এজন্য বিষমমান বাক্যকে দ্বিপ্রাতিকল্পিক (bi-disjunctive) বাক্য বলেও চিহ্নিত করা যায়।

আর একটা কথা। কেবল "অথবা"র প্রয়োগ দেখে বুঝবার উপায় নেই, বক্তা "অথবা" কথাটি কোন অর্থে ব্যবহার করছেন। আমরা কিন্তু কথাটি অবিসংবাদী অর্থেই নেব, "প অথবা ফ"-এর বদলে লিখব : প v ফ। আর বক্তা যদি স্পষ্টভাবে বলেন যে "অথবা"র দ্বারা যোজিত বাক্য দুটির উভয়ই সত্য নয়, তাহলে "$p \vee q$" এর সঙ্গে সে মর্মে একটি উক্তি ("$\sim(p \cdot q)$") সংযুক্ত করে দেব। উদাহরণ

রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে=রাম আসবে v শ্যাম আসবে

রাম শ্যাম এদের কেউ আসবে কিন্তু দু জনই আসবে না=

(রাম আসবে v শ্যাম আসবে) · ~ (রাম আসবে · শ্যাম আসবে) ॥

অনুশীলনী

১. '~A' is the negation of 'A'.

Give two equivalents of the above proposition without using "the negation of".

২. 'A' is equivalent to 'B'.

Give two equivalents of the above proposition without using "is equivalent to".

৩. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি "~" দিয়ে ব্যক্ত কর :

The train is never late
The train is sometimes late
The train arrived in time.

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি থেকে "~" বর্জন করে এদের সাধারণ ইংরেজিতে ব্যক্ত কর :

~Jack is present & ~Jill is present
~the train sometimes arrives late
~the train is never late.

* $\sim p \cdot \sim q$ = 'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা $\therefore \sim(\sim p \cdot \sim q)$ = 'p', 'q' —এদের উভয়ই মিথ্যা নয়

৫. Note the following classifications—

Triangles are of three kinds : equilateral,
isosceles and scalene

Propositions are of three kinds : tautologous,
inconsistent and contingent

and express the following in terms of "$\sim$"

This is an equilateral or isosceles triangle

This is a tautologous or contingent proposition

and the following in terms of "or"

This is not a contingent proposition

This is not an equilateral triangle.

৬. Calcutta and Dacca are in West Bengal and Sandheap is in Chattol.

'Sandheap' ও 'Chattol'-এর নাম তুমি শোন নি বোধ হয়, তাহলেও কি উপরোক্ত বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করতে পারবে না ? পারলে, এর সত্যমূল্য কী বল।

৭. "*" ও "**" এ যোজক দুটি কী অর্থে ব্যবহৃত হয় তা তোমার জানা নেই। এমতাবস্থায়

$$2*3=6 \quad \text{or} \quad 3**4=48 \quad \text{or} \quad 6+7=13$$

এ বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করতে পারবে কি ? যদি পার, এর সত্যমূল্য কী বল।

৮. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সংযৌগিক বাক্যের আকারে ব্যক্ত কর :

(i) True, 'tis pity ; pity 'tis, 'tis true

(ii) A horse, a horse ! my kingdom for a horse

(iii) I sprang to the stirrup, and Joris and he
I galloped, Dirk galloped and we galloped all three.

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির প্রত্যেকটিতে কয়টি স্বতন্ত্র বিবৃতি ব্যক্ত হয়েছে ?

(i) Iron, copper, lead and zinc are abundant, cheap and useful metals.

(ii) Hearts, tongues, figures, scribes, bards, poets cannot think, speak, cast, write, sing, number
ho !
his love to Antony.

১০. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যমূল্য নির্ণয় কর :

$$2+2=4 \text{ and } 2+3=5 \text{ and } 2+4=6 \text{ and } 6=6\times 0$$

$$2+2=5 \text{ or } 2+3=6 \text{ or } 2+4=7 \text{ or } 6=6\times 1$$

১১. একটি উদাহরণ দিয়ে দেখাও যে সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত "এবং" সম্বন্ধে রূপান্তরযোগ্যতার নিয়ম সব সময় খাটে না।

১২. এমন একটি সংযৌগিক বাক্য উল্লেখ কর যা সত্য কিন্তু যার "এবং"-এর পরিবর্তে "কেননা" লিখলে বাক্যটি মিথ্যা হয়ে যায়।

সংযৌগিক বাক্যের এমন একটি উদাহরণ দাও যার "এবং"-এর জায়গায় "কেননা" লিখলেও বাক্যটির সত্যমূল্য (সত্যতা) অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু "এবং"-এর পরিবর্তে "এবং যেহেতু" লিখলে সত্য বাক্যটি মিথ্যা বাক্যে পরিণত হয়। (কোয়াইন্ অনুসারে)

১৩. He is at desk or he is eating lunch.

উক্ত বাক্যের "or"-এর পরিবর্তে কোন্ অবস্থায় "unless", কোন্ অবস্থায় "but", আর কোন্ অবস্থায় "although" লেখা স্বাভাবিক বা বাঞ্ছনীয় বলে মনে হয় ? (কোয়াইন্)

১৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টিতে "or" কোন্ অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে ?

(i) "p" implies "p or q".

(ii) Two ways were open to him : to betray his country or to die.

(iii) If I get a first class or a merit scholarship then I shall seek admission to the post-graduate class.

১৫. মনে কর, আমরা জানি

Jones is ill Smith is away

এ বাক্য দুটির উভয়ই সত্য নয়। সেক্ষেত্রে যদি আমরা এ উক্তি করি যে

Jones is ill or Smith is away

তাহলে কি "or" বিসংবাদী অর্থে ব্যবহার করা হল ? নাকি উক্ত সত্যমূল্য জ্ঞানের সঙ্গে "or" -এর ব্যবহারের কোনো সম্পর্ক নেই ?

১৬. মনে কর, আমরা জানি

Jones came Smith stayed

এ দুটি বাক্যই সত্য। এ তথ্য থেকে কি বোঝা যায় যে, যদি আমরা বলি

Jones came or Smith stayed

তাহলে "or" কথাটি অবিসংবাদী অর্থে ব্যবহার করা হল ? যদি কেউ জানে "Jones came"-ও সত্য "Smith stayed"-ও সত্য তাহলে তার পক্ষে উক্ত বৈকল্পিকটি স্বীকার করা স্বাভাবিক নাকি অস্বীকার করা ? (কোয়াইন্ অনুসারে)

১৭. যদি এমন হয় যে 'A', 'B', 'C' সত্য আর 'X', 'Y', 'Z' মিথ্যা তাহলে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌গুলি সত্য কোন্‌গুলি মিথ্যা তা নির্ণয় কর :

(a) $(A \cdot X) \vee Y$ (b) $A \cdot (X \vee Y)$

(c) $\sim(A \vee B \vee X)$ (d) $\sim A \vee B \vee X$

(e) $\sim(\sim A \vee \sim B \vee \sim X)$ (f) $\sim(\sim A \cdot \sim B \cdot \sim X)$

(g) $\sim[\sim(A \cdot \sim B) \vee A] \vee A$ (h) $\sim[(X \cdot \sim Y) \vee X] \vee X$

(i) $[A \vee (B \cdot C)] \vee \sim[(A \vee B) \cdot (A \vee C)]$

(j) $[X \vee (Y \cdot Z)] \vee \sim[(X \vee Y) \cdot (X \vee Z)]$

(k) $\sim\{[A \cdot (B \vee C)] \vee \sim[(A \cdot B) \vee (A \cdot C)]\}$

(l) $\sim\{[X \cdot (Y \vee Z)] \vee \sim[(X \cdot Y) \vee (X \cdot Z)]\}$

১৮. মনে কর *

(i) $A \vee B=1$, $C \vee D=1$, $B \cdot D=0$, $C=0$

তাহলে 'A' ও 'B'-এর সত্যমূল্য কী ?

(ii) $A \vee B=0$, $\sim B \cdot C=1$, $C \cdot D=0$, $D \vee E=1$, $C=1$

তাহলে 'A' ও 'B' ও 'D' কী সত্যমূল্য গ্রহণ করবে তা নির্ণয় কর।

* " "-এর জায়গায় "এবং" পড়তে হবে।

(iii) $[A \vee (B \cdot C)]=0, \quad B=1, \quad A=0$

তাহলে 'C' কী সত্যমূল্য গ্রহণ করবে ?

(iv) $(A \cdot B) \vee C=1, \quad A=1, \quad C=0$

তাহলে 'B'-এর সত্যমূল্য কী ?

১৯. 'A', 'B', 'C', 'D' কী সত্যমূল্য গ্রহণ করলে

$$A \cdot (B \vee C)=1,$$
$$(A \vee B) \cdot C=0,$$
$$(\sim A \vee B) \cdot (\sim C \vee D) \cdot (\sim A \vee \sim C) \cdot (B \vee \sim D)=1$$

এ তিনটি বাক্যই যুগপৎ সত্য হবে ?

২০. 'It is raining'-এর সংক্ষেপক হিসাবে 'R', "It is snowing"-এর সংক্ষেপক হিসাবে 'S' আর "The wind is howling"-এর সংক্ষেপক হিসাবে 'W' ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে যুক্তিবৈজ্ঞানিক সংকেতলিপিতে ব্যক্ত কর ঃ

It is raining while it is snowing
It is raining unless it is snowing
It is snowing unless it is not raining
Either it is raining and snowing, or the wind is howling
It is neither raining nor snowing nor is the wind howling
It is raining, and either it is snowing or the wind is howling
Either it is not raining and snowing, or the wind is not howling
It is raining, but it is not the case that it is snowing and the wind is howling.

২১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সরলতম রূপ দাও ঃ

It is raining or it is snowing unless it is raining or snowing

$$(A \cdot \sim\sim B) \vee (A \cdot B) \vee \sim(\sim C \cdot \sim C)$$
$$\sim[A \vee A) \cdot (A \vee A) \cdot \sim(\sim A \cdot \sim A)]$$

২২. নিচে দুটি বচনযোজকের, "*"-এর ও "**"-এর, সংজ্ঞা দেওয়া হল ঃ

p	q	$p*q$	$p**q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

এখন, মনে কর 'A' সত্য, 'B' আর 'C' উভয়ই মিথ্যা। উক্ত সংজ্ঞা ও তথ্যের ভিত্তিতে নিম্নোক্ত বাক্য দুটির সত্যমূল্য নির্ণয় কর।

$$[(A*B) \vee B**C)] \cdot (A**C)$$
$$[(\sim A*B) \cdot (B**C)] \vee (A**\sim C)$$

(বলা বাহুল্য, "$\sim$", "." ও "v"-কে যুক্তিবিজ্ঞানে-প্রচলিত অর্থে নিতে হবে।)

২৩. "or"-কে অবিসংবাদী অর্থে নাও। তাহলে

(1) Anna has come, Betty has left

(2) Anna has come, Betty has not left

(3) Anna has not come, Betty has left

(4) Anna has not come, Betty has not left

এ পরিস্থিতিগুলির কোন্‌টিতে বা কোন্‌ কোন্‌টিতে

Anna has not come or Betty has not left

—এ বাক্যটি সত্য ?

আবার 'or'-কে বিসংবাদী অর্থে নাও। তাহলে প্রদত্ত বাক্যটি কোন্‌ বা কোন্‌ কোন্‌ পরিস্থিতিতে সত্য ? (কোয়াইন্‌ অনুসারে)

২৪. 'B'-এর সত্যমূল্য যাই হোক না কেন, মনে কর, '$\sim A \vee B$' সত্য। তাহলে 'A' সত্য না কি মিথ্যা ?

২৫. 'B' যে বাক্যই বোঝাক না কেন '$\sim A \cdot B$' মিথ্যা। তাহলে 'A' সত্য না কি মিথ্যা ?

৪

নিষেধক, সংযৌগিক ও বৈকল্পিক বাক্য

১. বন্ধনীর প্রয়োজন : পরিধি (Scope) ও মুখ্য যোজক

আমরা জানি, যে বাক্য কেবল "$\cdot$" বা কেবল "v" দিয়ে গঠিত তাতে আন্তর বন্ধনীর প্রয়োজন নেই। কিন্তু যে বাক্যে একাধিক স্বতন্ত্র যোজক থাকে তাতে বন্ধনীর ব্যবহার অপরিহার্য। অর্থাৎ এরকম ক্ষেত্রে যূথান্তরকরণ বা যূথীবিযূথীকরণের (association-এর) নিয়ম খাটে না। যেমন

$p \cdot (q \vee r) \quad p \vee (q \cdot r) \quad (p \cdot q) \vee (p \cdot r) \quad (p \vee q) \cdot (p \vee r)$

—এ সব বাক্য সম্বন্ধে উক্ত নিয়ম খাটে না। যথা,

(১) "$p \cdot (q \vee r)$"-এর বদলে লেখা যায় না : $(p \cdot q) \vee r$ (২)

(1) "$p \vee (q \cdot r)$"-এর বদলে লেখা যায় না : $(p \vee q) \cdot r$ (2)

এখানে (১) ও (২) সমার্থক নয়, আবার (1) ও (2)ও সমার্থক নয়। কেন নয়, দেখ।

(১) "$p \cdot (q \vee r)$"-এর বক্তব্য : 'p' সত্য, এবং 'q', 'r'—এদের অন্তত একটি সত্য।

(২) "$(p \cdot q) \vee r$"-এর বক্তব্য : 'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য, অথবা 'r' সত্য।

(1) "$p \vee (q \cdot r)$"-এর বক্তব্য : 'p' সত্য ; অথবা 'q', 'r'—এদের উভয়ই সত্য।

(2) "$(p \vee q) \cdot r$"-এর বক্তব্য : 'p', 'q'-এদের অন্তত একটি সত্য ; তাছাড়া 'r'ও সত্য ॥

কোনো যোজকের দ্বারা যা যুক্ত হয় তা যোজকটির প্রভাবক্ষেত্র বা পরিধির (scope-এর) অন্তর্ভুক্ত। যথা "প v ফ"—এ বাক্যে 'প', 'ফ' 'v'-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত ; 'v' এ প্রতীক দুটিকে নিয়ন্ত্রিত করছে। "$\sim(p \cdot q)$"-এ বাক্যে "$\sim$"-এর পরিধি ডানদিকে 'q' পর্যন্ত বিস্তৃত, আর "$\cdot$"-এর পরিধির মধ্যে আছে কেবল বামদিকে 'p' আর ডানদিকে 'q'। কোনো বাক্যে একাধিক স্বতন্ত্র যোজক ব্যবহৃত হলে, কোন্ যোজকের শক্তি, প্রভাব বা নিয়ন্ত্রণ কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত, মানে কোন্ যোজকের পরিধি কী, তা বোঝাবার জন্য বন্ধনীর প্রয়োজন।

"$p \cdot (q \vee r)$"—এখানে "$\cdot$"-এর পরিধির মধ্যে আছে ডানদিকে "$q \vee r$"

"$(p \cdot q) \vee r$"—এখানে "$\cdot$"-এর পরিধির মধ্যে আছে ডানদিকে কেবল 'q'।

বন্ধনী ব্যবহার না করলে "$\cdot$"-এর প্রভাবক্ষেত্রের উক্ত পার্থক্য দেখানো যেত না। কিন্তু

$p \cdot q \cdot r \qquad p \vee q \vee r$

এ বাক্যগুলিতে ব্যবহৃত যোজকগুলির প্রভাবক্ষেত্রের মধ্যে পার্থক্য দেখাবার নেই। কাজেই এরূপ ক্ষেত্রে বন্ধনীরও দরকার নেই।

কোনো বাক্যে যদি একাধিক স্বতন্ত্র যোজক ব্যবহৃত হয়, তাহলে যোজকগুলির মধ্যে কোন্‌টি মুখ্য যোজক, কোন্‌টি বা কোন্‌গুলি গৌণ যোজক, আবার গৌণ যোজকগুলির মধ্যে প্রভাবের (পরিধির) তারতম্য কী—তা বুঝে নেবার দরকার। যে যোজকের প্রভাব সবচেয়ে বেশী, যার পরিধি বৃহত্তম, সেটি হল মুখ্য যোজক। কোনো বাক্যে মুখ্য যোজক কোন্‌টি তার ওপর নির্ভর করে বাক্যটি কোন্ প্রকারের বচন বা অপেক্ষক। যথা

"$p \cdot (q \vee r)$—এ বাক্যে মুখ্য যোজক " $\cdot$ " ; সুতরাং বাক্যটি সংযৌগিক

"$\sim[(p \cdot q) \vee r]$"—এ বাক্যে মুখ্য যোজক "$\sim$" ; সুতরাং বাক্যটি নিষেধক।

এখানে "v"-এর পরিধি "$\sim$"-এর পরিধির চেয়ে ক্ষুদ্রতর, আর " $\cdot$ "-এর পরিধি ক্ষুদ্রতম।

শেষোক্ত বাক্য সম্বন্ধে যে মন্তব্য করা হল তা এভাবে ব্যক্ত করা যেত : বাক্যটি বৈকল্পিকের নিষেধ, আর বৈকল্পিকটির বাম ধারের বিকল্পটি একটি সংযৌগিক বাক্য।

২. বৈকল্পিক বাক্য ও সংযৌগিকের নিষেধ

আমরা জানি যে

"$p \vee q$"-এর বক্তব্য হল : 'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা নয়

কাজেই বলতে পারি

"$p \vee q$" সমঃ " 'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা নয়"

এ কথাটা এভাবেও ব্যক্ত করা যায়

"$p \vee q$" সমঃ "এমন নয় যে 'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা"

বা এভাবে

"$p \vee q$" সমঃ "এমন নয় যে—'p'ও মিথ্যা, 'q'ও মিথ্যা"

বা এভাবে

"$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"

উদাহরণ : "রাম আসবে v শ্যাম আসবে"—এ বাক্যের বক্তব্য : এমন নয় যে—"রাম আসবে"ও মিথ্যা, "শ্যাম আসবে"ও মিথ্যা। সুতরাং বলতে পারি

"রাম আসবে v শ্যাম আসবে" equiv. "$\sim$($\sim$রাম আসবে $\cdot$ $\sim$শ্যাম আসবে)"

আবার, "$p \vee q$" মিথ্যা—এ কথার অর্থ কী? এ কথার অর্থ হল—'p'-ও মিথ্যা 'q'-ও মিথ্যা। স্মরণীয় যে, যদি 'p', 'q' এ দুটি বাক্যই মিথ্যা হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে "$p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে ("$p \vee q$"-এর সত্যসারণী দ্রষ্টব্য)। তাহলে

" '$p \vee q$' মিথ্যা" equiv. " 'p' মিথ্যা এবং 'q' মিথ্যা"

এ উক্তি এভাবেও করতে পারি

"$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$"

উদাহরণ :

"$\sim$(রাম ছাত্র v রাম শিক্ষক)" equiv. "$\sim$রাম ছাত্র $\cdot$ $\sim$রাম শিক্ষক"

এখন

$$\text{“}p \vee q\text{”} \quad সমঃ \quad \text{“}\sim(\sim p \cdot \sim q)\text{”}$$
$$\text{“}\sim(p \vee q)\text{”} \quad সমঃ \quad \text{“}\sim p \cdot \sim q\text{”}$$

এ সূত্র দুটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে : বৈকল্পিক বাক্য ও বৈকল্পিকের নিষেধকে যথাক্রমে সংযৌগিকের নিষেধ ও সংযৌগিক বাক্য দিয়ে ব্যক্ত করা যায়। বোঝা যাবে, “v” আর “$\sim$” দিয়ে যা ব্যক্ত করা যায় “ · ” আর “$\sim$” দিয়েই তা ব্যক্ত করা যায়। কাজেই “v” বলে একটা পৃথক যোজক মানবার প্রয়োজন নেই। যদি অথবা “v” বলে একটা পৃথক যোজক স্বীকার না করতাম তাহলে

রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে

এ উক্তি এভাবে ব্যক্ত করতাম

$\sim$(~রাম আসবে · ~শ্যাম আসবে)

দেখা গেল, “v” বলে একটা স্বতন্ত্র যোজক মানবার দরকার নেই। আমাদের সাধারণ ভাষায় “অথবা” আর যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষায় “v” না থাকলেও কাজ চলে যেত।

কিন্তু আবার এটাও দেখানো যায়, “ · ” আর “$\sim$” দিয়ে যে উক্তি করা হয় তা “v” আর “$\sim$” দিয়েও ব্যক্ত করা যায়; দেখানো যায় : “ · ” (“এবং”) যোজকটি না থাকলেও কাজ চলে যেত। “ · ”-দিয়ে-ব্যক্ত উক্তিকে কি করে “v” দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তা দেখাতে হলে আগে দুটি নিয়ম ব্যাখ্যা করে নেবার দরকার।

৩. ঢেউর তটান্তরকরণ (Transfer of the Negation Sign)

$\text{“}\sim\sim p\text{”}$ সমঃ $\text{“}p\text{”}$ (নিষেধের নিষেধ)

এ সূত্র অনুসারে

“~ ~রাম এসেছে” equiv. “রাম এসেছে”

এখন, এ বাক্যের দ্বিতীয় “$\sim$”-এর বদলে নঞর্থক চিহ্ন “নি” ব্যবহার করে বাক্যটিকে এভাবে লেখা যায় :

“~ রাম আসে নি” equiv. “রাম এসেছে” (১)

উপরোক্ত বাক্যের “$\sim$” চিহ্নটি “equiv.” এর ডান ধারে নিয়ে গেলে পাই :

“রাম আসে নি” equiv “~ রাম এসেছে’, (২)

লক্ষণীয়, (১) ও (২) সমার্থক। আবার,

$\text{“}p\text{”}$ সমঃ $\text{“}\sim\sim p\text{”}$

এ সূত্র অনুসারে

“This flower is red” সমঃ “~ ~ This flower is red”

এ বাক্যের দ্বিতীয় “$\sim$”-এর বদলে "not" বসিয়ে বাক্যটি এভাবে লিখতে পারি :

“This flower is red” সমঃ “~ This flower is not red” (1)

এখন, এ বাক্যের বাকি "~" টিকে "সমঃ"-এর বাম ধারের অঙ্গের সঙ্গে যুক্ত করে পাই

"~This flower is red" সমঃ "This flower is not red" (2)

লক্ষণীয়, (1) ও (2) সমার্থক বাক্য।

উপরোক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবেঃ যদি '~P' ও 'Q' সমার্থক হয় তাহলে 'P' আর '~Q'-ও সমার্থক [(১), (২) দ্রষ্টব্য]। আবার, যদি 'P' ও '~Q' সমার্থক হয় তাহলে '~P' আর 'Q'-ও সমার্থক [(1), (2) দ্রষ্টব্য]। তার মানে—

"'~P' equiv. 'Q'" সমঃ "'P' equiv. '~Q'"

উপরোক্ত বাক্যে যে নিয়ম ব্যক্ত হয়েছে তার নাম ঢেউর তটান্তরকরণ (transfer of the negation sign)। এ নিয়ম অনুসারে

"~P" সমঃ "Q" "P" সমঃ "~Q"

এ আকারের বাক্যের "~"-কে "সমঃ"-এর ("equiv."-এর) বাম দিক থেকে তুলে নিয়ে ডান দিকের অঙ্গে, আর ডান দিক থেকে তুলে নিয়ে বাম দিকের অঙ্গে, যুক্ত করা যায়। মানে—উক্ত আকারের বাক্যের দু ধার যদি প্রকৃত সমার্থক হয়, তাহলে "~"-এর স্থানান্তর করে যে বাক্য পাওয়া যাবে তার দু ধারও অবশ্যই সমার্থক হবে।

উদাহরণ ঃ ঢেউর তটান্তরকরণ সূত্র প্রয়োগ করে

"$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" (১)

—এ বাক্য থেকে পাই

"$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$" (২)

যেহেতু (১)-এর দুটি অঙ্গ প্রকৃতই সমার্থক, সেহেতু (২)-এর দু ধারও সমার্থক।*

৪. পরিবর্ত নিবেশন (Substitution)

যদি 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হয় তাহলে 'ব' ও 'ভ'-এর জায়গায় পরিবর্ত নিবেশন করে, (সংক্ষেপে—নিবেশন করে), মানে অন্য বাক্য বসিয়ে, সমার্থক বাক্য পাওয়া যাবে। যথা, আমরা জানি

"রাম এসেছে v শ্যাম এসেছে" equiv. "শ্যাম এসেছে v রাম এসেছে" (১)

এখন, এ বাক্যে "রাম এসেছে"র পরিবর্তে—"রমা গিয়েছে", আর "শ্যাম এসেছে"র পরিবর্তে "শ্যামা গিয়েছে" নিবেশন করে পাই

"রমা গিয়েছে v শ্যামা গিয়েছে" equiv. "শ্যামা গিয়েছে v রমা গিয়েছে" (২)

যেহেতু (১)-এর দু ধার সমার্থক সেহেতু (২)-এতেও দু ধারের বাক্য দুটি সমার্থক। আবার (১)-এতে "রাম এসেছে"র পরিবর্তে 'p', আর "শ্যাম এসেছে"র পরিবর্তে 'q' নিবেশন করে পাই

"$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$" (৩)

* এ বিভাগে যে নিয়মটির কথা বলা হল তা পূর্বেই সংক্ষেপে বলা হয়েছে (৫৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য)।

যেহেতু (১)-এর দু ধার সমার্থক, সেহেতু (৩)-এর দু ধারও সমার্থক। আবার (৩)-এতে নিবেশন করে পাওয়া যায়

"$(r \cdot s) \vee t$" সমঃ "$t \vee (r \cdot s)$" (৪) ['p'-এর বদলে '$r \cdot s$', 'q'-এর বদলে 't' নিবেশন করে]

"$r \vee (s \cdot t)$" সমঃ "$(s \cdot t) \vee r$" (৫) ['p'-এর জায়গায় 'r', 'q'-এর জায়গায় "$s \cdot t$" নিবেশন করে]

যেহেতু (৩)-এর দু ধার প্রকৃতই সমার্থক, সেহেতু (৪)-এতেও, আবার (৫)-এতেও, দু ধারের বাক্য সমার্থক।

নির্ভুলভাবে নিবেশন করতে হলে কয়েকটি নিয়ম মেনে চলতে হয়। এ নিয়ম কয়টি নিচে উল্লেখ করা হল।

একরূপ নিবেশন ঃ কোনো বাক্যে কোনো প্রতীকের, 'p'-এর, জায়গায় যদি অন্য প্রতীক যেমন "A", নিবেশন করা হবে বলে স্থির করা হয় তাহলে ঐ বাক্যের অন্যান্য 'p'-এর (যদি 'p' একাধিক বার থাকে) বদলে "A" ভিন্ন অন্য কোনো প্রতীক বসানো যাবে না। যথা, "$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$"—এখানে প্রথম 'p'-এর জায়গায় যদি "A" বসাই তাহলে দ্বিতীয় 'p'-এর জায়গাতেও "A" বসাতে হবে। এ নিয়ম অগ্রাহ্য করার পরিণতি লক্ষণীয়।

"$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$" (1)

"$r \vee q$" সমঃ "$q \vee s$" (2) [প্রথম 'p'-এর জায়গায় 'r', দ্বিতীয় 'p'-এর জায়গায় 's' বসানো হয়েছে]

এখানে (1)-এর দু ধার প্রকৃতই সমার্থক। নিবেশনলব্ধ (2)-এর দু ধার কিন্তু সমার্থক নয়;* (1) সত্য আর (2) মিথ্যা। কিন্তু (1)-এর অন্তর্গত বাক্য দুটিতে যদি নির্ভুলভাবে নিবেশন করা হত, তাহলে দুটি সমার্থক বাক্যই পাওয়া যেত।

পরিপূর্ণ নিবেশন ঃ কোনো বাক্যে কোনো প্রতীকের, 'p'-এর, জায়গায় যদি অন্য প্রতীক "A" নিবেশন করি তাহলে ঐ বাক্যে যেখানে যেখানে 'p' আছে সে সব জায়গাতেই "A" বসাতে হবে; কোনো 'p'-এর বদলে "A" বসিয়ে অন্য কোনো 'p' অপরিবর্তিত রাখা চলবে না। এ নিয়ম অগ্রাহ্য করে নিবেশন করলে কী হয় দেখ।

"$p \cdot q$" সমঃ "$q \cdot p$" (1)

"$r \cdot q$" সমঃ "$q \cdot p$" (2) [(1)-এর প্রথম 'p'-এর বদলে 'r' নিবেশন করে, এবং দ্বিতীয় 'p' অপরিবর্তিত রেখে]

* (2)-এর দুধার যে সমার্থক নয় তা সহবোধ্য। "$r \vee q$" ও "$q \vee s$"-এর দৃষ্টান্ত নাও। ধরা যাক, প্রথমটির দৃষ্টান্ত হিসাবে নিলাম ঃ "এ পৃষ্ঠাটি সাদা v এ পৃষ্ঠাটি নীল", আর দ্বিতীয়টির দৃষ্টান্ত হিসাবে ঃ "এ পৃষ্ঠাটি নীল v এ পৃষ্ঠাটি লাল"। তাহলে (2)-এর দৃষ্টান্ত হবে এরূপ ঃ

"এ পৃষ্ঠাটি সাদা v এ পৃষ্ঠাটি নীল" equiv. "এ পৃষ্ঠাটি নীল v এ পৃষ্ঠাটি লাল"।

লক্ষণীয়, "equiv."-এর বাম ধারের বাক্যটি সত্য, ডান ধারের বাক্যটি মিথ্যা। সুতরাং এ বাক্যের, সুতরাং (2)-এর, দু ধার সমার্থক নয়।

স্পষ্টতই এরূপ নিবেশন করলে মূল বাক্যের সমার্থতা নিবেশনলব্ধ বাক্যে বজায় থাকে না। লক্ষণীয়, (1)-এর দু ধার সমার্থক ; কিন্তু (2)-এর দু ধার সমার্থক নয়।*

আণবিক নিবেশন : কেবল আণবিক বাক্যের—একবর্ণ প্রতীকের বা অযৌগিক বচনের—পরিবর্তেই কিছু নিবেশন করা যাবে ; কোনো যৌগিক বাক্যের পরিবর্তে কিছু নিবেশন করা চলবে না। যথা

$$\text{“}\sim p \cdot \sim q\text{” সমঃ “}\sim(p \vee q)\text{”}$$

এখানে '$\sim p$'-এর পরিবর্তে বা "$\sim(p \vee q)$"-এর পরিবর্তে কিছুই নিবেশন করা চলবে না, নিবেশন করা যাবে কেবল আণবিক 'p', 'q'-এর পরিবর্তে। তবে, লক্ষণীয় যে,

আণবিক বাক্যের পরিবর্তে যৌগিক বাক্য নিবেশন করতে বাধা নেই।

যথা "$p \vee q$" সমঃ "$q \vee p$" (1)

এতে নিবেশন করে পেতে পারি

"$(s \cdot t) \vee (u \cdot v)$" সমঃ "$(u \cdot v) \vee (s \cdot t)$" (2)

এখানে (2) নির্ভুল নিবেশনের দৃষ্টান্ত।

৫. সংযৌগিক বাক্য ও বৈকল্পিকের নিষেধ

কি করে " · "-দিয়ে-ব্যক্ত উক্তিকে "v" দিয়ে ব্যক্ত করা যায় এখন আমরা তা ব্যাখ্যা করতে পারি। আমরা জানি "$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"। তাহলে

"$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" (1)

"$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$" (2) [1, তটান্তরকরণের সূত্র**]

"$\sim p \cdot \sim q$" সমঃ "$\sim(p \vee q)$" (3) [2, ক্রমান্তরকরণের সূত্র†]

"$\sim\sim p \cdot \sim\sim q$" সমঃ "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" (4) [3, '$p$'-এর বদলে '$\sim p$', '$q$'-এর বদলে '$\sim q$' নিবেশন]

"$p \cdot q$" সমঃ "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" (5) [4, নিষেধের নিষেধ]

"$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q$" (6) [5, তটান্তরকরণ, যূথীকরণ, বিযূথীকরণ]

---

* যথা : এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা (r) · এ পৃষ্ঠাটিতে নিবেশন আলোচিত হয়েছে (q)
এ পৃষ্ঠাটিতে নিবেশন আলোচিত হয়েছে (q) · এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা (p)
এ বাক্য দুটি সমার্থক নয়। কেননা এদের প্রথমটি সত্য, দ্বিতীয়টি মিথ্যা।

** এরকম ক্ষেত্রে "[ ]"-এর অন্তর্ভুক্ত অংশকে বলে ভাষ্য (annotation)। এ ভাষ্যে "1" বলতে বোঝাচ্ছে : (1) থেকে, সেরূপ "2" বলতে : (2) থেকে। ভাষ্যগুলি কিভাবে পড়তে হবে লক্ষ কর। প্রথম ভাষ্যটি পড়তে হবে এভাবে : এ বাক্যটি, মানে (2), পাওয়া গেছে (1)-সংখ্যক বাক্য থেকে—তটান্তরকরণের সূত্র অনুসারে। অন্যান্য ভাষ্যও অনুরূপভাবে পড়তে হবে।

† এ সূত্র অনুসারে —" 'P' equiv. 'Q' " সম : " 'Q' equiv. 'P' "। ক্রমান্তরকরণ কথাটি আমরা প্রয়োগ করেছি " · " আর "v" প্রসঙ্গে। বলা বাহুল্য, "সমঃ", "equiv." সম্বন্ধেও ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে।

উপরোক্ত প্রত্যেকটি সূত্র (প্রথমটি বাদে) এর অব্যবহিত পূর্ববর্তী সূত্র থেকে অবরোহিত হয়েছে। শেষোক্ত সূত্র দুটি অবরোহণের জন্য (3) ও (4)-এর সাহায্য নিয়েছি। ঐ মধ্যবর্তী সূত্র দুটি বাদ দিয়ে বাকি সূত্রগুলির পুনরুক্তি করা হল।

"$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" (১) "$p \cdot q$" সমঃ "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" (২)
"$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$" (1) "$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q$" (2)

লক্ষণীয় যে, তটান্তরকরণ সূত্র অনুসারে (১) ও (1) সমার্থক, আবার (২) ও (2) সমার্থক। কাজেই চারিটি স্বতন্ত্র সূত্র মানবার দরকার নেই, কেবল (১), (২) বা (1), (2) মেনে নিলেই চলে। যুক্তিবিজ্ঞানীরা (1) ও (2)-এর উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করেন এবং ইংরেজ যুক্তিবিজ্ঞানী ডি মরগেন (De Morgan)-এর নামানুসারে (1) ও (2)-কে, মানে—

"$\sim(p \vee q)$ সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$"
"$\sim(p \cdot q)$ সমঃ "$\sim p \vee \sim q$"

—এ সূত্র দুটিকে ডি মরগেন সূত্র বলে অভিহিত করেন। আমরা উপরোক্ত চারটি সূত্রকেই ডি মরগেন সূত্র বলে উল্লেখ করব।

আমরা বলেছিলাম ঃ যোজক " · " বাদ দিলেও ক্ষতি নেই ; যা " · " দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তা "v" দিয়েও ব্যক্ত করা যায়। এখন এ উক্তির সমর্থন পেলাম।

"$p \cdot q$" সমঃ "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" (২)
"$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q$" (2)

—এ সূত্র দুটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে ঃ যা " · " (আর "$\sim$") দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তা "v" (আর "$\sim$") দিয়েও ব্যক্ত করা যায়।

অন্য ডি মরগেন সূত্র দুটি

"$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" (১)
"$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$" (1)

—এ সূত্র দুটি, যে যথার্থ তা আগেই দেখেছি। আর (2) ও (২) বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে (১) থেকে। কাজেই (2) আর (২)-এর যাথার্থ্য প্রতিপন্ন করার কথা ওঠে না। তবু (2) সংখ্যক সূত্রটি নিচে আরও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হল। এ ব্যাখ্যা পড়লে (2) ও সমার্থক (২)-এর যাথার্থ্য সম্বন্ধে নিশ্চিত হতে পারবে।

৬. "সব — — নয়", "— —উভয়ই নয়", "Not both—and—"

প্রশ্ন ঃ "$\sim(p \cdot q)$"-এর বক্তব্য কি এই যে ঃ $\sim p \cdot \sim q$?

উত্তর ঃ না, তা নয়। "$\sim(p \cdot q)$"-এর বক্তব্য ঃ 'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য নয়, আর "$\sim p \cdot \sim q$"-এর ঃ 'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা। কিন্তু "উভয়ই সত্য নয়" আর "উভয়ই মিথ্যা" একার্থক নয়। কেন নয়, কেন একথা বলা যায় না যে

"$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$"

তা ভাল করে বুঝতে হলে

*"উভয়ই সত্য নয়" আর "উভয়ই মিথ্যা"-এর পার্থক্য**

"উভয়ই—নয়" আর "কোনোটি—নয়"-এর পার্থক্য

বুঝে নেবার দরকার। আবার "উভয়ই—নয়"-এর সঙ্গে "সব — — নয়"-এর অর্থের মিল আছে। আগে শেষোক্ত প্রতীকটির মানে বুঝে নিলে অন্যগুলির মানে বোঝা সহজ হবে। একটা উদাহরণ

সব ছাত্র(ই) সত্যবাদী নয়

—এ কথার অর্থ কী? এ বাক্যটির অর্থ এই নয় যে ঃ কোনো ছাত্রই সত্যবাদী নয়, বা সব ছাত্রই মিথ্যাবাদী। এ বাক্যের অর্থ হল ঃ

কোনো কোনো ছাত্র মিথ্যাবাদী, অন্তত একজন মিথ্যাবাদী।

সেরূপ

সব ছাত্রই পাশ করবে না

এ বাক্যটির অর্থ এই নয় যে ঃ কোনো ছাত্রই পাশ করবে না, বা সব ছাত্রই ফেল করবে। এ বাক্যের বক্তব্য হল ঃ

কোনো কোনো ছাত্র ফেল করবে, অন্তত একজন ফেল করবে

এরকম বাক্যে "সব"-এর উপর জোর দিয়ে পড়তে হয় (আর "ই"-এর ব্যবহারও লক্ষণীয়)। সেরকম,—"উভয়ই সত্য নয়"-এর "উভয়ই"-এর জোর দিয়ে পড়তে হবে। "উভয়ই সত্য নয়" বলতে বোঝায় ঃ দুটি অঙ্গবাক্যই সত্য নয়, অন্তত একটি মিথ্যা। যথা

'এ ফুলটি লাল', 'এ ফুলটি নীল'—এদের উভয়ই সত্য নয়

$\sim$(এ ফুলটি লাল $\cdot$ এ ফুলটি নীল) (১)

—এ বাক্যের বক্তব্য এই নয় যে ঃ দুটি অঙ্গই মিথ্যা, এর বক্তব্য হল ঃ দুটিই সত্য নয় ("দুটিই"র উপর জোর দিয়ে পড়তে হবে), মানে—অন্তত একটি মিথ্যা। তাহলে (১)কে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

'এ ফুলটি লাল', 'এ ফুলটি নীল'—এদের অন্তত একটি মিথ্যা

(মানে, হয় প্রথমটি মিথ্যা নতুবা দ্বিতীয়টি মিথ্যা) ; আর সংকেতলিপিতে এভাবে

$\sim$এ ফুলটি লাল $\vee$ $\sim$এ ফুলটি নীল।

যে ব্যক্তি বলে ঃ $\sim(p \cdot q)$, তার দাবী হল—'p' মিথ্যা অথবা 'q' মিথ্যা।

আর যে বলে ঃ $\sim p \cdot \sim q$, তার দাবী হল—'p'ও মিথ্যা, 'q'ও মিথ্যা ॥

"$\sim(p \cdot q)$" আর "$\sim p \cdot \sim q$" সমার্থক নয় ; প্রথমটি হল ঃ সংযৌগিকের নিষেধ আর দ্বিতীয়টি নিষেধের সংযোজন।

সেরূপ, "উভয়ই মিথ্যা নয়" আর "উভয়ই সত্য"—এদের পার্থক্য

ওপরে যা বলা হল তাতে ডি মরগেনের

$$``\sim(p \cdot q)" \text{ সমঃ } ``\sim p \vee \sim q"$$

—এর সমর্থন পেলাম। "উভয়ই সত্য নয়"-এর মত "উভয়ই মিথ্যা নয়"-এর ব্যাখ্যা করতে হবে।

'p', 'q'—এদের উভয়ই মিথ্যা নয়

বা $\sim(\sim p \cdot \sim q)$

এ বাক্যের বক্তব্য : 'p', 'q'—এদের অন্তত একটি সত্য

অর্থাৎ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"-এর বক্তব্য হল : $p \vee q$

আবার ডি মরগেন সূত্র :

বিরুদ্ধতা সম্বন্ধের সাহায্য নিয়ে আবার ডি মরগেন সূত্রের যাথার্থ্য দেখানো হল, এবং এদের আরও সহজবোধ্য করার চেষ্টা করা হল। "বিরুদ্ধ"-এর সংজ্ঞা এভাবে দিতে পারি—

যদি এমন হয় যে 'ব' মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'ভ' সত্য হয় তাহলে 'ব' ও 'ভ' বিরুদ্ধ।

এখন "$p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি : 'p'ও মিথ্যা, 'q'ও মিথ্যা হয় মানে—"$\sim p \vee \sim q$" সত্য হয়।

$\therefore$ "$p \vee q$" আর "$\sim p \cdot \sim q$" পরস্পর বিরুদ্ধ।

আবার

"$p \cdot q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি : 'p' মিথ্যা অথবা 'q' মিথ্যা হয় মানে—"$\sim p \vee \sim q$" সত্য হয়।

$\therefore$ "$p \cdot q$" আর "$\sim p \vee \sim q$" পরস্পর বিরুদ্ধ।

আমরা জানি (৫৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

দুটি বাক্য বিরুদ্ধ হলে এদের একটিকে নিষেধ করে অন্যটির সমার্থক পাওয়া যায়

এখন

"$p \vee q$" বিরুদ্ধ "$\sim p \cdot \sim q$"

$\therefore$ "$p \vee q$" সমঃ "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$", "$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$"

আবার

"$p \cdot q$" বিরুদ্ধ "$\sim p \vee \sim q$"

$\therefore$ "$p \cdot q$" সমঃ "$\sim(\sim p \vee \sim q)$", "$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q$"

৭. ডেউর সঞ্চালন : যূথনিষেধ থেকে আণবিক নিষেধ

"$\sim(p \cdot q)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q$" "$\sim(p \vee q)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q$"

—এ সূত্রগুলির সাহায্যে যূথনিষেধকে আণবিক নিষেধে রূপান্তরিত করা যায়। মানে, বন্ধনীর বাইরের নিষেধচিহ্নকে বন্ধনীর ভেতরের উপর সঞ্চালন করা যায়, চালানো

যায়। অর্থাৎ যৌগিক বাক্যের পূর্বে নিষেধের চিহ্ন থাকলে তাকে তুলে নিয়ে আণবিক অঙ্গের নিষেধচিহ্ন হিসাবে ব্যবহার করতে পারি। ফলে—কেবল আণবিক নিষেধ আর "·" ও "v" দিয়ে আমাদের বক্তব্য ব্যক্ত করতে পারি। এরূপ রূপান্তরের ফলে বন্ধনীর দৌরাত্ম্য থেকে কিছুটা মুক্তি পাওয়া যায়। মনে রাখবে, যূথনিষেধকে আণবিক নিষেধে রূপান্তরিত করতে হলে, "~"-এর উক্তরূপ সঞ্চালন করতে হলে, "·"-এর জায়গায় "v", আর "v"-এর জায়গায় "·", বসানো দরকার। উদাহরণ ঃ

["ডিমঃ" "ডি মরগেন সূত্র"-এর, আর "নিনিঃ" "নিষেধের নিষেধ"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ]

$\sim(\sim A \cdot B)$	(1)		$\sim(A \vee \sim B)$	(1)	
$\sim\sim A \vee \sim B$	(2)	[1, ডিমঃ]	$\sim A \vee \sim\sim B$	(2)	[1, ডিমঃ]
$A \vee \sim B$	(3)	[2, নিনিঃ]	$\sim A \vee B$	(3)	[2, নিনিঃ]

$\sim[A \vee (B \cdot C)]$	(১)		$\sim[A \cdot (B \vee C)]$	(১)	
$\sim A \cdot \sim(B \cdot C)$	(২)	[১, ডিমঃ]	$\sim A \vee \sim(B \vee C)$	(২)	[১, ডিমঃ]
$\sim A \cdot (\sim B \vee \sim C)$	(৩)	[২, ডিমঃ]	$\sim A \vee (\sim B \cdot \sim C)$	(৩)	[২, ডিমঃ]

বলা বাহুল্য, প্রত্যেক গুচ্ছের বাক্যগুলি সমার্থক।* লক্ষণীয় যে, মূল বাক্যগুলিতে যূথনিষেধ ছিল ; কিন্তু রূপান্তরলব্ধ বাক্যে যূথনিষেধ চিহ্ন নেই, আছে কেবল আণবিক নিষেধ।

৮. ডি মরগেন সূত্রের সাধারণীকৃত রূপ

ডি মরগেন সূত্রগুলি যেভাবে ব্যক্ত হয়েছে তার থেকে এ ধারণা হতে পারে যে কেবল দুটি অঙ্গ-(সংযোগী বা বিকল্প)-বিশিষ্ট বাক্যের ক্ষেত্রেই সূত্রগুলি প্রযোজ্য। কিন্তু কোনো বাক্যে যতগুলি সংযোগী বা বিকল্প থাক না কেন, বাক্যটিকে ডি মরগেন সূত্রের সাহায্যে রূপান্তরিত করা যায়। এরকম ক্ষেত্রে, বলা বাহুল্য, একাধিক বার ডি মরগেন সূত্র প্রয়োগ করতে হয়।

["যূথীঃ" "যূথীকরণ"-এর আর "বিযূথীঃ" "বিযূথীকরণ"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ]

$p \vee q \vee r$	(1)		$p \cdot q \cdot r \cdot s$	(1)	
$p \vee (q \vee r)$	(2)	[1 যূথীঃ]	$\sim \cdot (q \cdot r \cdot s)$	(2)	[1, যূথীঃ]
$\sim[\sim p \cdot \sim(q \vee r)]$	(3)	[2, ডিমঃ]	$\sim\{\sim p \vee \sim(q \cdot r \cdot s)\}$	(3)	[2, ডিমঃ]
$\sim[\sim p \cdot (\sim q \cdot \sim r)]$	(4)	[3, ডিমঃ]	$\sim\{\sim p \vee \sim[q \cdot (r \cdot s)]\}$	(4)	[3, যূথীঃ]
$\sim[\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r]$	(5)	[4, বিযূথীঃ]	$\sim\{\sim p \vee [\sim q \vee \sim(r \cdot s)]\}$	(5)	[4 ডিমঃ]
			$\sim\{\sim p \vee [\sim q \vee (\sim r \vee \sim s)]\}$	(6)	[5, ডিমঃ]
			$\sim\{\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim s\}$	(7)	[6,বিযূথীঃ]

* এরকম ভাবে পৃথক পৃথক ছত্রে সমার্থক বাক্য লিখলে আমরা "সমঃ", "equiv." ও উদ্ধৃতি চিহ্ন বাদ দেব।

রূপান্তরগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে ডি মরগেন সূত্রগুলিকে কেবল দুই-অঙ্গ-বিশিষ্ট বাক্যের নিয়ম হিসাবে সীমাবদ্ধ না রেখে আরও সাধারণভাবে ব্যক্ত করা যায় ঃ

"$\sim(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot - \cdot - \ldots \cdot n)$" সমঃ "$\sim p \vee \sim q \vee \sim r \vee \sim - \vee \sim - \ldots \vee \sim n$"

"$\sim(p \vee q \vee r \vee s \vee - \vee - \ldots \vee n)$" সমঃ "$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdot \sim - \cdot \sim - \ldots \cdot \sim n$"

সূত্রগুলি এভাবে ব্যক্ত করার সুবিধা হল এই যে ঃ অনেকাঙ্গবিশিষ্ট সংযৌগিক বা বৈকল্পিক বা এদের নিষেধকে ডি মরগেন অনুসারে রূপান্তরিত করতে হলে বারবার প্রাথমিক ডি মরগেন সূত্র প্রয়োগের দরকার নেই। যথা, সাধারণীকৃত সূত্রটি প্রয়োগ করে সরাসরি নিম্নোক্ত রূপান্তর পেতে পারি ঃ

$$\sim[A \vee B \vee C \vee D \vee E] \qquad (1)$$
$$\sim A \cdot \sim B \cdot \sim C \cdot \sim D \cdot \sim E \qquad (2)\ [1,\ \text{ডিমঃ}]$$

৯. সমার্থতা সূত্র ও সমবেশন (Interchange)

আমরা কয়েকটি সমার্থতা সূত্র উল্লেখ করেছি, যথা—নিষেধের নিষেধ, ক্রমান্তরকরণ, ডি মরগেনের সূত্র। এ জাতীয় সূত্র অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। এরূপ সূত্রের সাহায্যে যে কোনো বাক্যের পরিবর্তে এর সমার্থক বসানো (ব্যবহার করা) যায়। এভাবে সমার্থক বসানোকে বলে বিনিময় (interchange), সমার্থক নিবেশন বা সমনিবেশন (substitution of equivalents) বা সংক্ষেপে—সমবেশন। বলা বাহুল্য, সমবেশন করে যে বাক্য পাওয়া যায় তা আর মূল বাক্য সমার্থক।

(পরিবর্ত) নিবেশনের সঙ্গে সমবেশনের গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। নিবেশন করা যায় কেবল আণবিক বাক্যের পরিবর্তে, আর নিবেশন একরূপ (uniform) আর পরিপূর্ণ (complete) হওয়ার দরকার। কিন্তু

> যে কোনো বাক্যের পরিবর্তে, কি আণবিক কি যৌগিক বাক্যের পরিবর্তে, সমবেশন করা যায়। যথা,

$$p \cdot (q \vee r) \qquad (1)$$

এ বাক্যের পরিবর্তে লিখতে পারি

$$\sim\sim p \cdot \sim(\sim q \cdot \sim r) \qquad [\ 1,\ \text{নিনিঃ, ডিমঃ}\ ]$$

এখানে একটি আণবিক অঙ্গের, 'p'-এর, জায়গায়ও সমবেশন করা হয়েছে আবার একটি যৌগিক অঙ্গের, '$q \vee r$'-এর, জায়গায়ও সমবেশন করা হয়েছে। তারপর

> সমবেশন পরিপূর্ণ হওয়ার দরকার নেই, কোনো বাক্যের যে কোনো অংশের জায়গায় সমার্থক বসানো যায়।

$$(p \vee q) \cdot (p \vee q) \qquad (2)$$

এ বাক্যের পরিবর্তে লিখতে পারি

$$(p \vee q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q) \qquad [\ 2,\ \text{দ্বিতীয় অঙ্গে ডিমঃ}\ ]$$

এখানে মূল বাক্যের প্রথম অঙ্গ অপরিবর্তিত রেখে কেবল দ্বিতীয় অঙ্গেতে সমবেশন করা হয়েছে, অথচ মূল বাক্যের প্রথম ও দ্বিতীয় অঙ্গের মধ্যে কোনো ভেদ নেই।

আবার, কোনো বাক্যে একই অঙ্গবাক্য একাধিক বার থাকলে এদের একটিতে এক সমার্থক বাক্য আর অন্যটিতে (বা অন্যগুলিতে) অন্য সমার্থক বাক্য সমবেশন করা চলে। মানে, সমবেশন একরূপ হওয়ার দরকার নেই। যথা

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \qquad (3)$$

এ বাক্যে সমবেশন করে পেতে পারি

$$(q \cdot p) \vee \sim(\sim p \vee \sim q) \qquad \text{[3, ক্রমাঃ, ডিমঃ]}$$

এখানেও মূল বাক্যের অঙ্গ দুটি অভিন্ন, অথচ প্রথম অঙ্গের জায়গায় একটি সমার্থক (ক্রমান্তর অনুসারে সমার্থক) আর দ্বিতীয় অঙ্গের জায়গায় অন্য একটি সমার্থক (ডি মরগেন অনুসারে সমার্থক) বসানো হয়েছে। সমবেশন প্রসঙ্গে এ কথাটি মনে রাখবে—

> কোনো বাক্যের, বা বাক্যটির যে কোনো অংশের, জায়গায় সমবেশন করে, মানে সমার্থক নিবেশন করে, যে বাক্য পাওয়া যাবে তা আর মূল বাক্য সমার্থক।

সমবেশনের সাহায্যে কি করে কোনো বাক্যকে অন্য সমার্থক বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় তা দেখাবার জন্য নিচে একটি বিশদ উদাহরণ দেওয়া হল। আমরা জানি*

$$p \text{ excl-or } q \qquad \text{বা} \qquad p \vee q$$

এ বাক্যকে এভাবে ব্যক্ত করা যায়ঃ $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$। এখন, এ বাক্যকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে যে সব বাক্য পাওয়া যেতে পারে তার কয়েকটি উল্লেখ করা হল।

$$(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q) \qquad (1)$$
$$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q) \qquad (2) \quad \text{[1, ২য় সংযোগীতে ডিমঃ]}$$
$$\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim(p \cdot q) \qquad (3) \quad \text{[1, ১ম সংযোগীতে ডিমঃ]}$$
$$\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q) \qquad (4) \quad \text{[1, উভয় সংযোগীতে ডিমঃ]}$$
$$\sim[\sim(p \vee q) \vee \sim\sim(p \cdot q)] \qquad (5) \quad \text{[1, সমগ্র বাক্যে ডিমঃ]}$$
$$\sim[\sim(p \vee q) \vee (p \cdot q)] \qquad (6) \quad \text{[5, নিনিঃ]}$$
$$\sim[\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim p \vee \sim q)] \qquad (7) \quad \text{[2, সমগ্র বাক্যে ডিমঃ]}$$
$$\sim[\sim(p \vee q) \vee \sim\sim(\sim\sim p \cdot \sim\sim q)] \qquad (8) \quad \text{[7, দ্বিতীয় বিকল্পে ডিমঃ]}$$
$$\sim[\sim(p \vee q) \vee (p \cdot q)] \qquad (9) \quad \text{[8, নিনিঃ]}$$
$$\sim[(\sim p \cdot \sim q) \vee \sim(\sim p \vee \sim q)] \qquad (10) \quad \text{[4, সমগ্র বাক্যে ডিমঃ, নিনিঃ]}$$

---

* ৭১ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি বাক্যের এমন বিবৃত্ত দাও যাতে "~" চিহ্নটি (যদি চিহ্নটির প্রয়োগ প্রয়োজন হয়) কেবল আণবিক অঙ্গকেই বিশেষিত করে :

$A \cdot \sim B \cdot C, \quad A \vee \sim B \vee C, \quad \sim A \cdot (B \vee \sim C), \quad \sim A \vee (B \cdot \sim C)$

২. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির এমন সমার্থক দাও যাতে " ~ " কোনো বন্ধনীর বামে না থাকে, মানে—যাতে "~" কেবল আণবিক অঙ্গবাক্য ভিন্ন অন্য কিছুকে বিশেষিত না করে। এবং এদের সত্যমূল্য নির্ণয় কর।

$$\sim\{\sim[\sim(\sim A \cdot B)]\} \vee B$$
$$\sim\{\sim[\sim(\sim A \vee B)]\} \cdot B$$

৩. (ক) নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সমার্থক বৈকল্পিক বাক্যে ব্যক্ত কর :

$A, \ A \cdot \sim B, \ A \cdot (\sim B \vee C), \ (\sim A \vee C) \cdot B, \ (A \vee B) \cdot (\sim A \vee \sim B)$

(খ) নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সমার্থক সংযৌগিক বাক্যে ব্যক্ত কর :

$A, \ A \vee \sim B, \ A \vee (\sim B \cdot C), \ (\sim A \cdot C) \vee B, \ (A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)$

৪. নিম্নোক্ত বাক্য দুটির প্রত্যেকটির চারটি করে সমার্থক দাও।

$(A \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B)$

$(A \vee B) \cdot (\sim A \vee \sim B)$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যটির সাতটি সমার্থক দাও।

$(A \vee \sim B) \cdot \sim (A \cdot \sim B)$

৬. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টি সত্য কোন্‌টি মিথ্যা ?

(ক) কোনো বাক্যাকারে যতগুলি আণবিক অঙ্গ থাকে এর নির্ভুল নিবেশন-দৃষ্টান্তেও ঠিক ততগুলি আণবিক অঙ্গ থাকে।

(খ) কোনো বাক্যাকারে যতগুলি আণবিক অঙ্গ থাকে এর নির্ভুল নিবেশন-দৃষ্টান্তে অন্তত ততগুলি আণবিক অঙ্গ থাকে।

(গ) কোনো বাক্যাকারে যতগুলি বাক্যযোজক থাকে এর নির্ভুল নিবেশন-দৃষ্টান্তেও ঠিক ততগুলি বাক্যযোজক থাকে।

(ঘ) কোনো বাক্যাকারে যতগুলি বাক্যযোজক থাকে এর নিবেশন-দৃষ্টান্তে অন্তত ততগুলি বাক্যযোজক থাকে।

(ঙ) কোনো বাক্যাকারের অন্তর্গত 'ব' প্রতীকটির জায়গায় যদি 'ক' নিবেশন করা হয়, তাহলে ঐ আকারের অন্তর্ভুক্ত 'ভ' বা 'ম'-এর জায়গায়ও 'ক' নিবেশন করা ভুল।

৭. $p \cdot q$, $p \vee q$

—এ আকার দুটির প্রত্যেকটির এমন একটি নিবেশন-দৃষ্টান্ত দাও যা স্বতসত্য।

৮. $p \cdot q$, $p \vee q$

—এ আকার দুটির প্রত্যেকটির এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত দাও যা স্বতমিথ্যা।

৯. নিচের প্রত্যেকটি পঙক্তিতে দুটি করে বাক্য আছে। প্রত্যেক পঙক্তির ক্ষেত্রে, নিবেশন করে দেখাও যে বাক্য দুটি সমার্থক নয়।

$p \vee q$	$q \vee s$
$\sim p \cdot \sim q$	$\sim q \cdot \sim s$
$\sim(p \cdot q)$	$\sim p \cdot \sim q$
$\sim(p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$

১০. নিবেশন করে দেখাও যে নিম্নোক্ত সত্য বাক্যগুলি থেকে মিথ্যা নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায়:

এ পৃষ্ঠাটি বাংলায় লেখা · এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা

এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজীতে লেখা v এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা।

আর নিম্নোক্ত মিথ্যা বাক্যগুলি থেকে সত্য নিবেশন-দৃষ্টান্ত পাওয়া যায়:

এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজীতে লেখা · এ পৃষ্ঠাটি কাল কালিতে ছাপা

এ পৃষ্ঠাটি ইংরেজীতে লেখা v এ পৃষ্ঠাটি লাল কালিতে ছাপা।।

১১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির আকার উদ্ধার কর:

Not both A is present and B is present

It is not true that neither A is present nor B is present

Either it is not raining and the wind is not howling or the day is sunny

এদের কোন্ সরলতম বাক্যের নিবেশন-দৃষ্টান্ত হিসাবে গণ্য করা যায়?

দণ্ড ও বর্শা অপেক্ষক

১. প্রাতিকল্পিক অপেক্ষক (Disjunctive Function)
দণ্ড অপেক্ষক (Stroke Function)

অনেকে "Not both—and—", "—এবং—এদের উভয়ই সত্য নয়", বা "এমন নয় যে— এবং —" বলে একটি স্বতন্ত্র যোজক স্বীকার করেন। এ যোজক দিয়ে গঠিত বাক্যকে বলে প্রাতিকল্পিক বাক্য ("প্রতিকল্প" থেকে "প্রাতিকল্পিক")।

Not both Jack will come and Jill will come (১)

ওখানে ধূম আছে এবং বহ্ন্যভাব আছে—এদের উভয়ই সত্য নয়, বা

এমন নয় যে ওখানে-ধূম-আছে-এবং-বহ্ন্যভাব-আছে (২)

বলা বাহুল্য, এ জাতীয় উক্তিকে আমরা "$\sim(p \cdot q)$" আকারে ব্যক্ত করতে পারি। যথা, (১)-এর পরিবর্তে লিখতে পারি

~(Jack will come · Jill will come) (1)

আর (২)-এর পরিবর্তে

~(ওখানে ধূম আছে · ওখানে বহ্ন্যভাব আছে) (2)

$\sim(p \cdot q)$ আকারের বাক্যকে প্রাতিকল্পিক বাক্য বলে। আর, বলা বাহুল্য, এ আকারের অপেক্ষককে বলে প্রাতিকল্পিক অপেক্ষক। তারপর, প্রাতিকল্পিক বাক্যের অঙ্গগুলিকে বলে প্রতিকল্প (disjunct)। যথা, (2)-এর একটি প্রতিকল্প "ওখানে ধূম আছে" আর একটি "ওখানে বহ্ন্যভাব আছে"।

প্রাতিকল্পিক বাক্যের আকার লক্ষ করলে বোঝা যাবে, প্রাতিকল্পিক যোজক বলে একটি পৃথক যোজক মানবার দরকার নেই। স্পষ্টতই সংযৌগিক বাক্যকে নিষেধ করেই পাওয়া যায় প্রাতিকল্পিক বাক্য। এজন্য প্রাতিকল্পিক বাক্যকে বিসংযৌগিক বলেও অভিহিত করা যায়। বস্তুত 'নয়' আর "এবং" এ দুটি স্বতন্ত্র যোজককে যুক্ত করেই প্রাতিকল্পিক যোজকটি গঠিত হয়েছে।

তবে অনেকে কেবল একটি চিহ্ন দিয়ে প্রাতিকল্পিক যোজক ব্যক্ত করেন। এ চিহ্নটি হল "/"। একে বলে দণ্ড (stroke) আর এ চিহ্ন দিয়ে গঠিত অপেক্ষককে বলে দণ্ড অপেক্ষক (stroke function)*। কিভাবে দণ্ড প্রয়োগ করা হবে লক্ষ কর।

(১) ~(রাম আসবে · শ্যাম আসবে) ~(R · S) (1)

এর পরিবর্তে লেখা যায়

(২) রাম আসবে / শ্যাম আসবে R / S (2)

---

* যারা "$p \vee q$" আকারের বাক্যকেই disjunctive বাক্য বলে অভিহিত করেন তারা এ কথাটি আর "$p \mid q$" বা "$\sim(p \cdot q)$" আকারের বাক্যের নাম হিসাবে ব্যবহার করতে পারেন না। এজন্য তাদের দণ্ড অপেক্ষক বলে একটি পৃথক নাম উদ্ভাবন করতে হয়েছে।

(১) ও (২) সমার্থক। দেখা গেল, উক্ত সংকেতলিপি অনুসারে "$\sim(p \cdot q)$" আর "$p \mid q$" সমার্থক। এ কথাটা সূত্রাকারে ব্যক্ত হল

"$p \mid q$" সম† "$\sim(p \cdot q)$"

এটা একটা লিপ্যন্তরের সূত্র বা সংজ্ঞাসূত্র। এ সূত্রটিকে আমরা "Df/" বলে উল্লেখ করব।

"উভয়ই—নয়"-এর অর্থ আলোচনা করতে গিয়ে আমরা দেখেছি "$\sim(p \cdot q)$"-এর বক্তব্য হল : p, q—এদের অন্তত একটি মিথ্যা, অথবা সংকেতলিপিতে : $\sim p \vee \sim q$ অর্থাৎ

"$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$"

আবার, যেহেতু "$p \mid q$" সম "$\sim(p \cdot q)$"

"$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$"

সেহেতু বলতে পারি "$p \mid q$" সম "$\sim p \vee \sim q$"

মানে "$p \mid q$"-এর বক্তব্য হল : p, q—এদের অন্তত একটি মিথ্যা। তাহলে

যে প্রাতিকল্পিক বাক্যের অন্তত একটি অঙ্গ মিথ্যা সে প্রাতিকল্পিক বাক্য সত্য

যে প্রাতিকল্পিক বাক্যের উভয় অঙ্গই সত্য সে প্রাতিকল্পিক মিথ্যা।

এ কথাটি সত্যসারণীর আকারে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি—

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

বা সমীকরণের আকারে, এভাবে

$1/1=0,\ 1/0=1,\ 0/1=1,\ 0/0=1$*

আর একটা কথা। "$p \mid q$" সম "$\sim(p \cdot q)$", আর "$\sim(p \cdot q)$" হল "$p \cdot q$"-এর বিরুদ্ধ। সুতরাং "$p \mid q$" আর "$p \cdot q$" পরস্পর বিরুদ্ধ বাক্য**। শেষোক্ত অপেক্ষক দুটির সত্যসারণীর ফলস্তম্ভ তুলনা করে দেখ।

† "সমার্থক"-এর সংক্ষেপক হিসাবে আমরা "সমঃ" ব্যবহার করে আসছি। এখন থেকে কেবল "সম" ব্যবহার করব।

* লক্ষণীয়, "$p \mid q$" সম "$\sim(p \cdot q)$; এবং

$\sim(1 \cdot 1)=0,\quad \sim(1 \cdot 0)=1,\quad \sim(0 \cdot 1)=1,\quad \sim(0 \cdot 0)=1$

** যুক্তিবিজ্ঞানীরা কেন " / " চিহ্নটি ব্যবহার করেন তা জেনে নিলে এটা সহজেই মনে রাখতে পারবে যে "$p \mid q$" হল "$p \cdot q$"-এর বিরুদ্ধ। আমরা বিরুদ্ধ গঠন করি "$\sim$" ব্যবহার করে। এ রীতি অনুসারে "$p \cdot q$"-এর বিরুদ্ধ হল "$\sim(p \cdot q)$"। গণিতে অনেক সময় কোনো বাক্যের বিরুদ্ধ গঠন করা বাক্যটির মুখ্য যোজককে তেরছা বা খাড়া কোনো রেখা দিয়ে কেটে দিয়ে। এ রীতি অনুসারে "$a=b$"-এর বিরুদ্ধ "$a \neq b$" বা "$a \neq b$", "$p \equiv q$"-এর বিরুদ্ধ "$p \not\equiv q$"। এ রীতিতে "$p \cdot q$"-এর বিন্দুটিকে কেটে দিয়ে এর বিরুদ্ধ হিসাবে পাই "$p \mid q$"। যে রেখাটি দিয়ে বিন্দুটি কেটে দেওয়া হল তার তলায় বিন্দুটি চাপা পড়ে আছে বলে কল্পনা কর। আর খাড়া রেখা দিয়ে বিন্দু কেটে দিলে "$p \cdot q$"-এর বিরুদ্ধ হিসাবে পেতাম "$p \mid q$"। বস্তুত অনেকে প্রাতিকল্পিক যোজক হিসাবে " | " ব্যবহার করেন।

বৈকল্পিক নিষেধ ও যুগ্ম নিষেধঃ আমরা দেখেছি

$p \mid q$ $\qquad\qquad$ $\sim(p \cdot q)$ $\qquad\qquad$ $\sim p \vee \sim q$

এ বাক্যগুলি সমার্থক। কিন্তু লক্ষণীয়, "$\sim(p \cdot q)$" আর "$\sim p \cdot \sim q$" সমার্থক নয়, সুতরাং "$p \mid q$" আর "$\sim p \cdot \sim q$"ও অসমার্থক।

"$p \mid$ " হল নিষেধের বিকল্প বা বৈকল্পিক (alternative denial)

"$\sim p \cdot \sim q$" হল বিকল্পের নিষেধ, নিষেধের সংযোগ বা যুগ্ম নিষেধ† (joint denial)

২. দণ্ড অপেক্ষকে রূপান্তর

আমরা জানি, যা "·" দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তা "v" (আর "~") দিয়েও ব্যক্ত করা যায়। কাজেই "/"-কে " · " দিয়ে বা "v" দিয়ে ("~"এর সাহায্য নিয়ে) ব্যক্ত করা যায়। বলা বাহুল্য, যায়—নিম্নোক্ত সূত্র অনুসারে

"$p \mid q$" সম "$\sim(p \cdot q)$" $\qquad$ "$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$"

আবার, "– · –", "– v –" আকারের বাক্যকে "/" (আর "~") দিয়েও ব্যক্ত করা যায়। মনে রাখবে,

কোনো বাক্যকে "P/Q" আকারে রূপান্তরিত করতে হলে প্রথমে একে "$\sim(P \cdot Q)$" আকারে আনার দরকার।

রূপান্তরের উদাহরণ**

(১)

$p \vee q$	
$\sim(\sim p \cdot \sim q)$	[DM]
$\sim p \mid \sim q$	[Df /]

(২)

$p \cdot q$	
$\sim\sim(p \cdot q)$	[DN]
$\sim(p \mid q)$	[Df /]

(৩)

$\sim(p \vee q)$	
$\sim p \cdot \sim q$	[DM]
$\sim\sim(\sim p \cdot \sim q)$	[DN]
$\sim(\sim p \mid \sim q)$	[Df /]

(৪)

$p \vee (q \cdot r)$	
$\sim[\sim p \cdot \sim(q \cdot r)]$	[DM]
$\sim p \mid \sim(q \cdot r)$	[Df /]
$\sim p \mid (q \mid r)$	[Df /]

(৫)

$p \cdot (q \vee r)$	
$\sim\sim[p \cdot (q \vee r)]$	[DN]
$\sim[p \mid (q \vee r)]$	[Df /]
$\sim[p \mid \sim(\sim q \cdot \sim r)]$	[DM]
$\sim[p \mid (\sim q \mid \sim r)]$	[Df/]

(৬)

$\sim(p \cdot q \cdot r)$	
$\sim[p \cdot (q \cdot r)]$	[Assoc.]
$p \mid (q \cdot r)$	[Df /]
$p \mid \sim\sim(q \cdot r)$	[DN]
$p \mid \sim(q \mid r)$	[Df /]

---

† বা সংযৌগিক নিষেধ।

** 'DM' হল 'De Morgan's Laws'-এর সংক্ষিপ্তরূপ; 'Df/' হল 'Definition of /'-এর, 'DN' 'Double Negation'-এর, আর 'Assoc.' হল 'Law of Association'-এর।

লক্ষ করে থাকবে, "$P \cdot Q$" আকারের বাক্যের পূর্বে যুথনিষেধ না থাকলে তাকে "P / Q" আকারে রূপান্তরের জন্য—নিষেধের নিষেধ, DN, করে যুথনিষেধ আমদানি করতে হয়।

৩. বৈকল্পিক, প্রাতিকল্পিক ও বিষমমান অপেক্ষক

$$p \vee q, \quad p / q, \quad p \veebar q \ (p \text{ excl-or } q)$$

—এ অপেক্ষক তিনটির মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ বৈসাদৃশ্য (ও সাদৃশ্য) আছে। এদের পার্থক্য ভাল করে বুঝে নেবার দরকার।

"$p \vee q$"-এর বক্তব্য : 'p', 'q'—এদের অন্তত একটি সত্য
"p / q"-এর বক্তব্য : ,, ,,—এদের অন্তত একটি মিথ্যা
"$p \veebar q$"-এর বক্তব্য : ,, ,,—এদের একটি সত্য, কিন্তু উভয়ই সত্য নয়*
বা ,, ,,—এদের একটি মিথ্যা, কিন্তু উভয়ই মিথ্যা নয়**
বা ,, ,,—এদের (কেবল) একটি সত্য, (কেবল) একটি মিথ্যা†

এদের সত্যসারণীগুলি লক্ষ কর।

p	q	$p \vee q$	p / q	$p \veebar q$
1	1	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

আরও লক্ষণীয়, '$p \vee q$' আর 'p/q'-কে " · " দিয়ে যুক্ত করে সত্যসারণী গঠন করলে '$p \veebar q$'-এর সত্যসারণী পাওয়া যায়।

এ সারণীগুলি লক্ষ করলে বোঝা যায় : p, q—এ দুটি অঙ্গের একটি সত্য ও একটি মিথ্যা হলে

$$p \vee q, \quad p / q, \quad p \veebar q$$

এ তিনটি বাক্যই সত্য (২য়, ৩য় সারি দ্রষ্টব্য)। তারপর

"$p \vee q$" সত্য হবে—যদি কোনো অঙ্গ সত্য হয়, দুটি অঙ্গ সত্য হলেও বাক্যটি সত্য
"p / q" সত্য হবে—যদি কোনো অঙ্গ মিথ্যা হয়, দুটি অঙ্গ মিথ্যা হলেও বাক্যটি সত্য
"$p \veebar q$" সত্য হবে—যদি কেবল একটি অঙ্গ সত্য হয়, বা কেবল একটি অঙ্গ মিথ্যা হয় মানে : যদি একটি অঙ্গ সত্য এবং একটি অঙ্গ মিথ্যা হয়।

৪. বর্শা অপেক্ষক (Dagger Function)

"$\sim p \cdot \sim q$" স্পষ্টতই একটি সংযৌগিক বাক্য, একে আমরা যুগ্ম নিষেধ বলে চিহ্নিত করেছি। কিন্তু অনেক যুক্তিবিজ্ঞানী একেও একটি স্বতন্ত্র অপেক্ষকের মর্যাদা দেন এবং

* সংকেতলিপিতে : $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$
** ,, : $(\sim p \vee \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$
† ,, : $(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$

একটিমাত্র যোজকচিহ্ন দিয়ে একে ব্যক্ত করেন। তারা "$\sim$—·$\sim$—"এ চিহ্নটির বদলে ব্যবহার করেন: "—$\downarrow$—"। এ প্রতীকটিকে বলে dagger, ছুরিকা বা বর্শা*। কিভাবে প্রতীকটি প্রয়োগ করা হয় লক্ষ কর।

"$\sim p \cdot \sim q$"-এর পরিবর্তে লেখা হয়: $p \downarrow q$

আর "$p \downarrow q$" পড়া হয় এ ভাবে: p dagger q, p বর্শা q। বর্শা (ছুরিকা) চিহ্ন ব্যবহার করে ব্যক্ত করা হয় বলে "$p \downarrow q$"-কে বলে বর্শা (ছুরিকা) অপেক্ষক—dagger function। এখন

"$p \downarrow q$"এর দাবী হল: p, q—এদের কোনোটি সত্য নয়, মানে—'p'ও মিথ্যা, 'q'ও মিথ্যা।

তাহলে বলতে পারি

যদি কোনো "$p \downarrow q$" আকারের বাক্যের উভয় অঙ্গই মিথ্যা হয় তাহলে বাক্যটি সত্য, তা না হলে** বাক্যটি মিথ্যা

এ কথাটি সমীকরণের আকারে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

$$1 \downarrow 1=0,\ 1 \downarrow 0=0,\ 0 \downarrow 1=0,\ 0 \downarrow 0=1$$

বা সত্যসারণী আকারে, এভাবে

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

"$p \downarrow q$" সম "$\sim p \cdot \sim q$" আর "$\sim p \cdot \sim q$" হল "$p \vee q$"-এর নিষেধ বা বিরুদ্ধ। সুতরাং "$p \downarrow q$" আর "$p \vee q$" হল পরস্পরের বিরুদ্ধ বাক্য।† "$p \downarrow q$" আর "$p \vee q$"-এর সত্যসারণী তুলনা করে দেখ।

যেহেতু "$p \downarrow q$"-কে "$\cdot$" (আর "$\sim$") দিয়ে আর "$p \cdot q$"-কে "v" (আর "$\sim$") দিয়ে ব্যক্ত করা যায়, সেহেতু "$p \downarrow q$" আকারের বাক্যকে "v" (আর "$\sim$" দিয়ে) ব্যক্ত করা যাবে। নিম্নোক্ত সমার্থতাগুলি লক্ষ কর।

"$p \downarrow q$" সম "$\sim p \cdot \sim q$" সম "$\sim(p \vee q)$", $\therefore$ "$p \downarrow q$" সম "$\sim(p \vee q)$"

$\therefore$ "$\sim(p \downarrow q)$" সম "$p \vee q$" [ডেউর তটান্তরকরণ]

* 'dagger'-এর বাংলা প্রতিশব্দ হিসাবে আমরা 'বর্শা' কথাটি ব্যবহার করব, কেননা প্রতীকটির সঙ্গে ছুরিকার চেয়ে বর্শার বেশী সাদৃশ্য।

** মানে, কোনো অঙ্গ সত্য হলে।

† "$p \cdot q$"-এর বিন্দু কেটে দিয়ে যেমন এর বিরুদ্ধ হিসাবে পাই "p/q" ঠিক সেরকম "$p \vee q$"-এর "v"-কে একটা খাড়া রেখা দিয়ে কেটে দিয়ে এর বিরুদ্ধ হিসাবে পাই: $p \downarrow q$ (যে রেখা দিয়ে 'v' কেটে দেওয়া হয় তার নিম্নপ্রান্ত মুছে দেওয়া হয়)। বলা বাহুল্য, "$\downarrow$"-এর পরিবর্তে "$\swarrow$"ও ব্যবহার করা যেত।

দেখা গেল "$p \vee q$"-এর বিরুদ্ধ দুভাবে ব্যক্ত করতে পারি: $\sim(p \vee q)$, $p \downarrow q$ এখন, একই বাক্যের সব বিরুদ্ধ বাক্য সমার্থক। আবার "$\sim(p \vee q)$" সম "$\sim p \cdot \sim q$"; সুতরাং "$p \downarrow q$" সম '$\sim p \cdot \sim q$"।

আবার, যাকে "·", "v", "~" দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তাকে "↓" আকারের বাক্যে রূপান্তরিত করা যায়। মনে রাখবে

কোনো বাক্যকে "$P \downarrow Q$" আকারের বাক্যে রূপান্তরিত করতে হলে

প্রথমে বাক্যটিকে "$\sim P \cdot \sim Q$" আকারে রূপান্তরিত করে নেবার দরকার।

এ রূপান্তর করতে গিয়ে আমরা নিম্নোক্ত সংজ্ঞা বা লিপ্যন্তরের সূত্র প্রয়োগ করব

"$\sim p \cdot \sim q$" সম "$p \downarrow q$"

এবং সূত্রটিকে Df↓ বলে উল্লেখ করব।

রূপান্তরের উদাহরণ

(১)

$p \vee q$
$\sim(\sim p \cdot \sim q)$ [DM]
$\sim(p \downarrow q)$ [Df↓]

(২)

$p \cdot q$
$\sim(\sim p) \cdot \sim(\sim q)$ [DN, Assoc.]
$\sim p \downarrow \sim q$ [Df↓]

(৩)

$\sim(p \vee q)$
$\sim p \cdot \sim q$ [DM]
$p \downarrow q$ [Df↓]

(৪)

$p \vee (q \cdot r)$
$\sim[\sim p \cdot \sim(q \cdot r)]$ [DM]
$\sim[p \downarrow (q \cdot r)]$ [Df↓]
$\sim[p \downarrow (\sim\sim q \cdot \sim\sim r)]$ [DN]
$\sim[p \downarrow (\sim q \downarrow \sim r)]$ [Df↓]

(৫)

$p \cdot (q \vee r)$
$\sim\sim p \cdot \sim\sim(q \vee r)$ [DN]
$\sim p \downarrow \sim(q \vee r)$ [Df↓]
$\sim p \downarrow (\sim q \cdot \sim r)$ [DM]
$\sim p \downarrow (q \downarrow r)$ [Df↓]

(৬)

$\sim(p \cdot q)$
$\sim(\sim\sim p \cdot \sim\sim q)$ [DN]
$\sim(\sim p \downarrow \sim q)$ [Df↓]

(৭)

$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r$
$\sim p \cdot (\sim q \cdot \sim r)$ [Assoc.]
$\sim p \cdot \sim(q \vee r)$ [DM, DN]
$p \downarrow (q \vee r)$ [Df↓]
$p \downarrow \sim(\sim q \cdot \sim r)$ [DM]
$p \downarrow \sim(q \downarrow r)$ [Df↓]

৫. '/', '↓' : ক্রমান্তরকরণ, পুনরুক্তি ইত্যাদি

"ক্রমান্তরকরণ", "পুনরুক্তি" এ কথাগুলি আমরা কেবল "·" ও "v" প্রসঙ্গেই ব্যবহার করেছি। এখন এ কথাগুলি ব্যাপকতম অর্থে ব্যবহার করব। যথা, ক্রমান্তরকরণ বলতে বুঝব যে কোনো দুটি অঙ্গের স্থান পরিবর্তন।

একাঙ্গী "$\sim p$" ছাড়া আমরা আরও পাঁচটি অপেক্ষক (ও যোজক) উল্লেখ করেছি। এদের মধ্যে বিসংবাদী "অথবা"র, "V"-এর কথা, আর তুলব না। কেননা আমরা স্থির করেছি "প অথবা ফ" আকারের বাক্যকে সব সময় "প v ফ" আকারে ব্যক্ত করব।*

* আর আমরা দেখেছি যে '$p \vee q$'-কে বৈকল্পিক ও প্রাতিকল্পিকের সংযোগ হিসাবে : $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$ —এরূপে, ব্যক্ত করা যায়।

আমরা জানি ঃ "·", "v" সম্বন্ধে ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে। প্রশ্ন ওঠে ঃ "/", "↓" সম্বন্ধেও কি অনুরূপ নিয়ম খাটে? উত্তর ঃ

"p / q", "$p \downarrow q$" সম্পর্কে ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে, কেননা এ অপেক্ষকগুলিকে "·" দিয়ে ব্যক্ত করা যায়। নিম্নোক্ত সমার্থতা সূত্রগুলি লক্ষ কর।

'p / q' সম '$\sim(p \cdot q)$' সম '$\sim(q \cdot p)$' সম 'q / p'

$\therefore$ 'p / q' সম 'q / p'

'$p \downarrow q$' সম '$\sim p \cdot \sim q$' সম '$\sim q \cdot \sim p$' সম '$q \downarrow p$'

$\therefore$ '$p \downarrow q$' সম '$q \downarrow p$'

প্রশ্ন ঃ "/", "↓" সম্বন্ধে পুনরুক্তির নিয়ম খাটে কি?

উত্তর ঃ না, "p"কে পুনরুক্তি করে '/' দিয়ে বা "↓" দিয়ে যুক্ত করে সমার্থক হিসাবে "p" পাওয়া যায় যায় না, পাওয়া যায় "$\sim p$"। কেননা

'p / p' সম '$\sim(p \cdot p)$' সম '$\sim p$'

'$p \downarrow p$' সম '$\sim p \cdot \sim p$' সম '$\sim p$'

কাজেই "/", "↓" সম্বন্ধে পুনরুক্তির নিয়ম খাটে না।

প্রশ্ন ঃ "/", "↓" সম্বন্ধে যূথান্তরকরণের নিয়ম খাটে কি?

উত্তর ঃ না, খাটে না। এ উত্তর যে ঠিক নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষ করলেই তা বোঝা যাবে।

$p / (q / r)$	$(p / q) / r$
$\sim[p \cdot (q / r)]$	$\sim[(p / q) \cdot r]$
$\sim[p \cdot \sim(q \cdot r)]$	$\sim[\sim(p \cdot q) \cdot r]$
$\sim[p \cdot (\sim q \vee \sim r)]$	$\sim[(\sim p \vee \sim q) \cdot r]$
$\sim p \vee \sim(\sim q \vee \sim r)$	$\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim r$
$\sim p \vee (q \cdot r)$	$(p \cdot q) \vee \sim r$

সর্বশেষ পঙক্তির বাক্য দুটি সমার্থক নয়*। সুতরাং মূল বাক্য "$p / (q / r)$" ও "$(p / q) / r$" সমার্থক নয়।

$p \downarrow (q \downarrow r)$	$(p \downarrow q) \downarrow r$
$\sim p \cdot \sim(q \downarrow r)$	$\sim(p \downarrow q) \cdot \sim r$
$\sim p \cdot \sim(\sim q \cdot \sim r)$	$\sim(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim r$
$\sim p \cdot (q \vee r)$	$(p \vee q) \cdot \sim r$

সর্বশেষ পঙক্তির বাক্য দুটি অ-সমার্থক*। সুতরাং মূল বাক্য "$p \downarrow (q \downarrow r)$" ও "$(p \downarrow q) \downarrow r$" অ-সমার্থক।

সুতরাং "/", "↓" সম্বন্ধে যূথান্তরকরণের নিয়ম খাটে না।

* কেননা, $p = 0$, $r = 1$ হলে এ বাক্য দুটির প্রথমটি সত্য, দ্বিতীয়টি মিথ্যা।

অনুশীলনী

১. যুগ্মনিষেধ চিহ্ন বর্জন করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সমার্থক বাক্যে রূপান্তরিত কর :

(i) $\sim[\sim(A \cdot \sim B) \vee \sim(C \vee \sim B)]$

(ii) $\sim[\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim(C \cdot \sim B)]$

(iii) $\sim\{[A \vee (B \cdot C)] \cdot \sim[(A \vee B) \cdot (A \vee C)]\}$

(iv) $\sim\{[A \cdot (B \vee C)] \cdot \sim[(A \cdot B) \vee (A \cdot C)]\}$

২. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সরল কর :

(i) $\sim(A \vee \sim B \vee \sim C \vee D \vee \sim\sim D)$

(ii) $\sim(\sim A \cdot \sim B \cdot \sim C \cdot D \cdot \sim\sim D)$

(iii) $\sim[\sim A \vee B \cdot \sim(A \cdot \sim B)] \vee \sim(\sim A \vee B)$

৩. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে প্রাতিকল্পিক আকারে ব্যক্ত কর (সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করার জন্য "Today is Monday"-এর বদলে 'M', "It is 1st November today"-এর বদলে 'N' ব্যবহার কর)।

Today is Monday or it is 1st November today
Today is not Monday or it is 1st Novemqer today
It is not both not Monday and not 1st November today
It is not the case that today is not Monday and it is 1st November today.

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$\sim$" আর "v" দিয়ে ব্যক্ত কর :

$\sim(A \cdot B) \vee \sim(A \cdot C)$, $A \cdot B \sim C \cdot \sim D$
$\sim(\sim A \cdot \sim B \cdot C \cdot D)$, $\sim(A \vee B) \cdot \sim(A \vee C)$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি (১) "$\sim$" আর " / " দিয়ে
(২) "$\sim$" আর " $\downarrow$ " দিয়ে ব্যক্ত কর।

$A \cdot B$, $A \vee B$, $\sim(A \cdot \sim B)$, $\sim(\sim A \vee B)$, $A \vee (B \cdot \sim C)$,
$A \cdot (B \vee \sim C)$, $A \cdot B \cdot C$, $A \vee B \vee C$

৬. নিম্নোক্ত বাক্যের চারটি সমার্থক দাও।

$$(A \vee B) \cdot \sim(A \cdot B)$$

৭. '$\sim(A \vee B)$' আর '$\sim A \vee B$'-এর পার্থক্য কী ? কোন্ পরিস্থিতিতে এদের একটি সত্য, অন্যটি মিথ্যা ?

———

৬

প্রাকল্পিক বাক্য

১. একটি সংক্ষেপক প্রতীক :
যোজক "$\supset$" ও প্রাতিকল্পিক বাক্য

$$\sim(p \cdot \sim q)$$

--এ আকারের বাক্যকে যুক্তিবিজ্ঞানীরা সংক্ষেপে ব্যক্ত করেন ("অনুবাদ" করেন)এ ভাবে

$$p \supset q$$

"$\supset$" চিহ্নটিকে বলে নাল (horseshoe বা hook), আর "$p \supset q$" পড়া হয় এভাবে

p নাল q

p horseshoe q

p hook q ।

লক্ষণীয় যে $\sim(- \cdot \sim -)$

এ সমগ্র জটিল প্রতীকটির পরিবর্তে কেবল "$- \supset -$" চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। "$\sim(p \cdot \sim q)$"-কেই সংক্ষেপে "$p \supset q$" আকারে ব্যক্ত করা হয় ; কাজেই

"$\sim(p \cdot \sim q)$" আর "$p \supset q$"

-এর মধ্যে কোনো অর্থগত ভেদ নেই, এদের পার্থক্য হল কেবল ব্যবহৃত সংকেতলিপির পার্থক্য। কাজেই বলতে পারি

"$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$p \supset q$"

এটি কেবল সমার্থতা সূত্র নয় ; আরও সংকীর্ণভাবে বলতে পারি—এটি একটি লিপ্যন্তর সূত্র বা সংজ্ঞা, "$\supset$"-এর সংজ্ঞা। এ সংজ্ঞাটিকে আমরা "Df $\supset$" বলে উল্লেখ করব। প্রাতিকল্পিক বাক্যকে "$- \supset -$" আকারের বাক্যে রূপান্তরিত করা হয় উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে। নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষ করলে দেখবে প্রাতিকল্পিক বাক্যকে "$\supset$" দিয়ে ব্যক্ত করা মোটেই কঠিন নয়।

মূল বাক্য	$\sim(\sim A \cdot \sim B)$	$\sim(A \cdot B)$	$\sim(\sim A \cdot B)$
প্রাথমিক রূপান্তর		$\sim(A \cdot \sim\sim B)$	$\sim(\sim A \cdot \sim\sim B)$
চরম রূপান্তর	$\sim A \supset B$	$A \supset \sim B$	$\sim A \supset \sim B$

২. প্রাকল্পিক বাক্য : পূর্বকল্প ও অনুকল্প

প্রাতিকল্পিক বাক্যের লিপ্যন্তর করে "$- \supset -$" আকারের বাক্য পাই, ঠিক। কিন্তু "ব $\supset$ ভ" আকারের বাক্যেরও স্বতন্ত্র নাম প্রয়োজন। এ আকারের বাক্যকে বলে

প্রাকল্পিক (conditional)* বাক্য। আবার এরূপ বাক্যের "$\supset$"-এর বাম ধারের বাক্যটিকে বলে পূর্বগ বা পূর্বকল্প (antecedent) আর ডান ধারের বাক্যটিকে বলে অনুগ বা অনুকল্প (consequent)।

লক্ষণীয় যে, পূর্বে যে সব বাক্যের কথা বলা হয়েছে তাদের এক একটির অঙ্গবাক্য-গুলি একই নামে চিহ্নিত হয়েছে ; যথা সংযৌগিকের উভয় অঙ্গই "সংযোগী", বৈকল্পিকের উভয় অঙ্গই "বিকল্প", বলে অভিহিত হয়েছে। কিন্তু প্রাকল্পিক বাক্যের ক্ষেত্রে দুটি ভিন্ন নাম ব্যবহার করা হয়। "ব $\supset$ ভ"-এর 'ব' হল পূর্বকল্প আর 'ভ' অনুকল্প। অঙ্গ দুটি কেন এ ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন নামে অভিহিত হয় তা বলছি।

অন্যান্য দ্বৈতাঙ্গী যোজক, যথা "$\cdot$", "v", দিয়ে গঠিত বাক্য সম্বন্ধে ক্রমান্তরের নিয়ম খাটে। মানে অঙ্গগুলির ক্রমের, অর্থাৎ—কোন্‌টি প্রথম, কোন্‌টি দ্বিতীয় তার, যৌক্তিক তাৎপর্য নেই। কিন্তু "$\supset$" সম্বন্ধে ক্রমান্তরের নিয়ম খাটে না। এক্ষেত্রে প্রথম অঙ্গ থেকে দ্বিতীয় অঙ্গের দিকে গেলে এক সম্বন্ধ, আর দ্বিতীয় থেকে প্রথমের দিকে গেলে অন্য সম্বন্ধ। মানে

"$p \supset q$" আর "$q \supset p$"

সমার্থক নয়। কেন নয়, দেখ। Df $\supset$ অনুসারে

(১) "$p \supset q$" সম $\sim(p \cdot \sim q)$ (1)

(২) "$q \supset p$" সম $\sim(q \cdot \sim p)$ (2)

কিন্তু (1) ও (2) সমার্থক নয়**। সুতরাং (১) ও (২) সমার্থক নয়। কাজেই প্রাকল্পিক বাক্যের কোন্ অঙ্গের অবস্থান কী, কোন্ অঙ্গ "$\supset$"-এর বামে, আর কোন্ অঙ্গ ডাইনে তা বোঝাবার জন্য অঙ্গ দুটিকে ভিন্ন ভিন্ন নামে চিহ্নিত করার দরকার।

প্রসঙ্গত, লক্ষণীয় অন্যান্য দ্বৈতাঙ্গী যোজকগুলির, যথা "v"-এর "$\downarrow$"-এর চেহারায় প্রতিসাম্য (symmetry) আছে ; কিন্তু "$\supset$"-এতে এ প্রতিসাম্য নেই, এর বাম ধার খোলা, ডান ধার বন্ধ।

৩. ব্যাবর্তনের সূত্র (Rule of Transposition)

আমরা দেখেছি যে "$\sim(p \cdot \sim q)$" আর "$\sim(q \cdot \sim p)$" সমার্থক নয়। কিন্তু

"$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim(\sim q \cdot p)$"

* "প্রকল্প" থেকে "প্রাকল্পিক"।

** কেন নয়? একটি সমার্থতা সূত্র অনুসারে : 'ব' আর 'ভ' যদি সমার্থক না হয়, তাহলে '$\sim$ব' আর '$\sim$ভ' সমার্থক হতে পারে না। এখন দেখ (ব) "$p \cdot \sim q$" আর (ভ) "$q \cdot \sim p$" সমার্থক নয়। যথা "রাম এসেছে · শ্যাম আসে নি" আর "শ্যাম এসেছে · রাম আসে নি"—এ বাক্য দুটি সমার্থক নয়। ধরা যাক, বস্তুত রাম এসেছে, এবং শ্যাম আসে নি। তাহলে প্রথম বাক্যটি সত্য, আর দ্বিতীয়টি মিথ্যা।

কেননা ক্রমান্তরের সূত্র অনুসারে "$p \cdot \sim q$" সম "$\sim q \cdot p$"*

এখন "$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$p \supset q$"

"$\sim(\sim q \cdot p)$" সম "$\sim q \supset \sim p$"†

আবার "$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim(\sim q \cdot p)$"

$\therefore$ "$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$"

এ যুক্তিটিকে এভাবে বিন্যস্ত করা যায় ঃ

"$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$"

"$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim(\sim q \cdot p)$"

"$\sim(\sim q \cdot p)$" সম "$\sim q \supset \sim p$"

$\therefore$ "$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$"††

মনে রাখবে, যুক্তিবিজ্ঞানে

"$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$"

একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সূত্র। এ সমার্থতা সূত্রটির নাম ব্যাবর্তনের সূত্র (Rule of Transposition)।**

৪. যোজক "$\supset$" ও বৈকল্পিক বাক্য

"$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim p \vee \sim\sim q$" (ডি মরগেন অনুসারে)

সম "$\sim p \vee q$"

আবার "$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$p \supset q$"

$\therefore$ "$\sim p \vee q$" সম "$p \supset q$"

যুক্তিটিকে এভাবেও ব্যক্ত করা যায় ঃ

"$\sim p \vee q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$"

"$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$p \supset q$"

$\therefore$ "$\sim p \vee q$" সম "$p \supset q$"

যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন ঃ শুধু যে "$\sim p \vee q$" আর "$p \supset q$" সমার্থক তাই নয়, আরও বলা যায়—এদের পার্থক্য হল কেবল ব্যবহৃত সংকেতলিপির পার্থক্য। তার মানে এটাও

---

* আর যদি 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) '$\sim$ব' ও '$\sim$ভ' সমার্থক।

† এ সমার্থতা পেয়েছি এভাবে ঃ "$\sim(\sim q \cdot p)$" সম "$\sim(\sim q \cdot \sim\sim p)$" (নিনিঃ)
সম "$\sim q \supset \sim p$" (Df $\supset$)

†† বলা বাহুল্য এ যুক্তির আকার ঃ 'প' equiv. 'ফ', 'ফ' equiv. 'ব', 'ব' equiv. 'ভ'
$\therefore$ 'প' equiv. 'ভ'

** বা Rule of Contraposition

একটা লিপ্যন্তরের সূত্র বা সংজ্ঞা, এটাও "$\supset$"-এর সংজ্ঞা বলে গণ্য। কাজেই একেও Df $\supset$ বলে উল্লেখ করতে পারি। যে দুটি Df $\supset$ পেলাম সেগুলি একত্রিত হল :

Df $\supset$

"$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$"

"$p \supset q$" সম "$\sim p \vee q$"**

শেষোক্ত সূত্রটি প্রয়োগ করে বৈকল্পিক বাক্যকে প্রাকল্পিকে রূপান্তরিত করা যায়। নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষ কর।

মূল বাক্য	$A \vee B$	$A \vee \sim B$	$\sim A \vee \sim B$
প্রাথমিক রূপান্তর	$\sim\sim A \vee B$	$\sim\sim A \vee \sim B$	
চরম রূপান্তর	$\sim A \supset B$	$\sim A \supset \sim B$	$A \supset \sim B$

৫. প্রাকল্পিক বাক্য কখন সত্য, কখন মিথ্যা ?

প্রাকল্পিক বাক্যের সঙ্গে প্রাতিকল্পিক ও বৈকল্পিকের সম্পর্ক সম্বন্ধে যা বলা হয়েছে তা বুঝে থাকলে, কোনো প্রাকল্পিক বাক্য কোন্ সত্যসর্তে সত্য আর কোন্ (সত্য) সর্তে মিথ্যা তা সহজেই বুঝতে পারবে। আমরা দেখেছি

"$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim p \vee q$"

কাজেই যে যে সর্তে শেষোক্ত বাক্য দুটি সত্য (বা মিথ্যা) ঠিক সে সে সর্তে "$p \supset q$ সত্য (বা মিথ্যা)।

এখন,

"$\sim(p \cdot \sim q)$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়। কেননা : "$\sim(p \cdot \sim q)$" হল "$(p \cdot \sim q)$"-এর বিরুদ্ধ, "$\sim(p \cdot \sim q)$" মিথ্যা মানে "$p \cdot \sim q$" সত্য, আর শেষোক্ত বাক্যটি সত্য হতে পারে যদি 'p' সত্য ও '$\sim q$' সত্য (বা 'q' মিথ্যা) হয়। সুতরাং "$\sim(p \cdot \sim q)$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়।

আবার

"$\sim p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়। কেননা : কোনো বৈকল্পিক বাক্য মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এর উভয় অঙ্গই মিথ্যা হয়। সুতরাং "$\sim p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি '$\sim p$' মিথ্যা এবং 'q' মিথ্যা হয় অর্থাৎ যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়।

** বলা বাহুল্য, দুটি সংজ্ঞা মানবার কোনো প্রয়োজন নেই, কেননা "$\sim(p \cdot \sim q)$" থেকে DM ও DN-এর সাহায্যে "$\sim p \vee q$" পাওয়া যায়।

দেখা গেল, "$\sim(p \cdot \sim q)$" বা "$\sim p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়। অন্য সকল ক্ষেত্রে বাক্য দুটি সত্য। এখন, "$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$" সম "$\sim p \vee q$"; কাজেই বলা যায়

"$p \supset q$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য 'q' মিথ্যা হয়, অন্য সকল ক্ষেত্রে "$p \supset q$" সত্য।

মানে

p	q
1	0

এ বিন্যাস ছাড়া অন্য সব সত্যমূল্য বিন্যাসে অর্থাৎ

p	q
1	1
0	1
0	0

—এ ক্ষেত্রগুলির যে কোনোটিতে "$p \supset q$" সত্য। লক্ষণীয় এ বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে বলা যায়: 'p'-সত্য-'q'-মিথ্যা নয়। তাহলে "$p \supset q$" আকারের বাক্য কখন সত্য কখন মিথ্যা তা নামতার আকারে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি:

প্রাকল্পিকের নামতা

$$1 \supset 1 = 1, \quad 1 \supset 0 = 0, \quad 0 \supset 1 = 1, \quad 0 \supset 0 = 1$$

বা সত্যসারণীর আকারে এভাবে

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

যে যে ক্ষেত্রে "$p \supset q$" সত্য কেবল সে ক্ষেত্রগুলি বজায় রেখে সারণীটি পুনর্লিখিত হল।

p	q	$p \supset q$
1	1]	1
[0	1]	1
[0	0	1

এ সারণীর শেষোক্ত সারি দুটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে পূর্বকল্প 'p' মিথ্যা হলেই (অনুকল্পের সত্যমূল্য যা-ই হোক না কেন) "$p \supset q$" সত্য। আবার, প্রথম ও দ্বিতীয় সারি লক্ষ করলে দেখবে, অনুকল্প 'q' সত্য হলেই (পূর্বকল্পের সত্যমূল্য যা-ই হোক না

কেন) "$p \supset q$" সত্য। উক্ত অসম্পূর্ণ সারণীর তিনটি সারিতে যা বলা হয়েছে তা নিম্নোক্ত-রূপে দুটি সারিতে ব্যক্ত করতে পারি :

p	q	$p \supset q$
–	1	1
0	–	1

'p' আর 'q'-এর নিচে শূন্যস্থানে যে সত্যমূল্যই বসাও না কেন, "$p \supset q$" সত্য হতে বাধ্য। এ অসম্পূর্ণ সারণীতে যা বলা হল তা এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি :

যে প্রাকল্পিক বাক্যের অনুকল্প সত্য সে প্রাকল্পিক বাক্য সত্য, আর
যে প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প মিথ্যা সে প্রাকল্পিক বাক্য সত্য।

অপরপক্ষে

যে প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প সত্য ও অনুকল্প মিথ্যা সে প্রাকল্পিক মিথ্যা।

৬. প্রাতিকল্পিক, বৈকল্পিক ও প্রাকল্পিকের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয় : উদাহরণ

"$p \supset q$", "$\sim(p \cdot \sim q)$" আর "$\sim p \vee q$"-এর সত্যতা মিথ্যাত্ব সম্বন্ধে যা বলা হল তা প্রয়োগ করে কয়েকটি বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয় করা যাক। ধরা, যাক নিম্নোক্ত আণবিক বাক্যগুলি সত্য কি মিথ্যা তা আমরা জানি। ধরা যাক, আমরা জানি :

সত্য	মিথ্যা
রাম বুদ্ধিমান	ষ্টালিন এখনও জীবিত
এ ফুলটা লাল	কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী
২+২=৪	২+২=৫

মনে রাখবে : কোনো প্রাতিকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ মিথ্যা হলে বাক্যটি সত্য।
কোনো বৈকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ সত্য হলে বাক্যটি সত্য।

প্রথম গুচ্ছ

~(রাম বুদ্ধিমান · ~২+২ = ৪) : সত্য, কেননা দ্বিতীয় অঙ্গ মিথ্যা*
রাম বুদ্ধিমান ⊃ ২+২=৪ : সত্য, কেননা অনুকল্পটি সত্য
~(২+২=৫ · ~ষ্টালিন এখনও জীবিত) : সত্য, কেননা প্রথম অঙ্গ মিথ্যা
২+২=৫ ⊃ ষ্টালিন এখনও জীবিত : সত্য, কেননা পূর্বকল্পটি মিথ্যা।

দ্বিতীয় গুচ্ছ

~কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী ∨ এ ফুলটা লাল : সত্য, কেননা দুটি অঙ্গই সত্য*
কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী ⊃ এ ফুলটা লাল : সত্য, কেননা অনুকল্পটি সত্য
~কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী ∨ ২+২=৫ : সত্য, কেননা প্রথম অঙ্গ সত্য
কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী ⊃ ২+২=৫ : সত্য, কেননা পূর্বকল্পটি মিথ্যা।

---

* এখানে "ব · ~ভ" বা "~ভ ∨ ব" আকারের বাক্যে "~ভ"-ই একটি অঙ্গ বলে গণ্য হয়েছে।

উক্ত উদাহরণগুলি, বিশেষত 'এ সব বাক্য সত্য'—এ দাবী, অতিশয় আজগুবী মনে হতে পারে। এদের সম্বন্ধে আপত্তি উঠতে পারে ঃ বস্তুত আমরা কখনও এরূপ বাক্য প্রয়োগ করি না, দুটি বাক্যের মধ্যে কোনো সম্পর্ক (প্রাসঙ্গিকতার সম্পর্ক) না থাকলে এদের "এবং", "অথবা" প্রভৃতি যোজক দিয়ে যুক্ত করি না। যেমন, এ কথা কখনও বলি না (এবং কেন বলব ?) যে ঃ কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী নয় অথবা এ ফুলটা লাল। যুক্তিবিজ্ঞানীরা এর উত্তরে বলবেন ঃ আমরা বলি না যে বস্তুত এরূপ বাক্য প্রয়োগ করা হয় ; কিন্তু এরূপ বাক্য প্রয়োগ করলে " · ", "v" প্রভৃতির যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে সে সংজ্ঞা অনুসারে অবশ্যই বলতে হবে উপরোক্ত বাক্যগুলি সত্য। কোনো বাক্যের অঙ্গগুলির কী অর্থ, বা আদৌ কোনো অর্থ আছে কিনা, কোনো দুটি আণবিক বাক্যকে কোনো যোজক দিয়ে যুক্ত করা উচিত কিনা—এসব আমাদের দেখবার কথা নয় ; আমাদের লক্ষণীয় অঙ্গবাক্যের প্রদত্ত সত্যমূল্য। যদি অঙ্গবাক্যের সত্যমূল্য দেওয়া থাকে তাহলে যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়ম অনুসারে আমরা যৌগিক (সত্যাপেক্ষক) বাক্যের সত্যমূল্য নির্ণয় করতে পারি।

উপরোক্ত উদাহরণের প্রত্যেক জোড়ের* দ্বিতীয় বাক্যটির অর্থ দেওয়া হয়েছে সমার্থক প্রথম বাক্যটিতে। এভাবে "প ⊃ ফ" আকারের বাক্যের অর্থ করলে, মানে—যদি মনে করা হয় "প ⊃ ফ" অর্থ হল ~(প · ~ফ), বা ~প v ফ, এবং যদি যুক্তিবিজ্ঞানীদের উপরোক্ত ব্যাখ্যা মেনে নিই তাহলে, উপরোক্ত প্রাকল্পিক বাক্যগুলির সত্যতা (মিথ্যাত্ব) বা বোধগম্যতা সম্বন্ধে বিশেষ আপত্তি উঠবার কথা নয়। আর উক্তরূপ " – ⊃ – " আকারের বাক্য উদ্ভট বা আজগুবী মনে হবার কথা নয়। কিন্তু এখন যা বলতে যাচ্ছি তা অবশ্যই উদ্ভট ও আপত্তিকর মনে হবে।

যুক্তিবিজ্ঞানীরা কেবল এ কথা বলেন না যে "$p \supset q$" হল "$\sim(p \cdot \sim q)$" বা "$\sim p \vee q$"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ। তারা আরও বলেন (এবং এটাই অত্যন্ত আপত্তিকর মনে হবে) ঃ সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত

যদি প তাহলে ফ

আকারের বাক্যকে অনুবাদ করতে হবে

প ⊃ ফ

আকারের বাক্যে ; আবার "প ⊃ ফ"-এর বক্তব্য হল ঃ যদি প তাহলে ফ

তাদের মতে "প ⊃ ফ" আর "যদি প তাহলে ফ"-এর
"$p \supset q$" আর "If p then q "-এর

পার্থক্য হল কেবল ব্যবহৃত সংকেতলিপির পার্থক্য।

** প্রত্যেক গুচ্ছের প্রথম দুটি বাক্য নিয়ে একটি জোড় আর শেষের দুটি বাক্য নিয়ে একটি জোড় গঠন করা হয়েছে বলে কল্পনা কর।

"প ⊃ ফ" আকারের বাক্যকে উক্তরূপে অনুবাদ করলে বলতে হয়

যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে ২ + ২ = ৪ : সত্য (11)
যদি ২+২ = ৫ হয় তাহলে ষ্টালিন এখনও জীবিত : সত্য (00)
যদি কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী হয় তাহলে এ ফুলটা লাল : সত্য (01)
যদি কলকাতা পাকিস্তানের রাজধানী হয় তাহলে ২ + ২ = ৫ : সত্য (00)*

বলতে হয়, এ চারটি বাক্যই সত্য। ১০৪ পৃষ্ঠায় "প ⊃ ফ" আকারের বাক্যের যে চারটি দৃষ্টান্ত উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলিকে "যদি—তাহলে—" আকারের বাক্যে অনুবাদ করে উপরোক্ত বাক্য চারটি পেয়েছি। আমরা দেখেছি মূল বাক্য চারটি সত্য, সুতরাং এগুলি অনুবাদ করে যা পাওয়া গেল তাও সত্য।

"প ⊃ ফ" আকারের বাক্যকে "যদি—তাহলে—" আকারের বাক্যে অনুবাদ করা যদি সঙ্গত হয় তাহলে বলতে হবে

যদি ২ + ২ = ৫ হয় তাহলে শঙ্করাচার্য দার্শনিক (01)
যদি ২ + ২ = ৫ হয় তাহলে শঙ্করাচার্য দার্শনিক নয় (00)

এ দুটি বাক্যই সত্য (কেননা এদের পূর্বকল্প মিথ্যা)। আবার,

যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে ২ + ২ = ৪ (11)
যদি রাম বুদ্ধিমান না হয় তাহলে ২ + ২ = ৪ (01)

এ দুটি বাক্যও সত্য (কেননা এদের অনুকল্প সত্য)।

কিন্তু সাধারণ ভাষায় যে অর্থে "যদি—তাহলে—" প্রয়োগ করা হয় সে অর্থে 'উক্ত বাক্যগুলি সত্য'—এ দাবী সাংঘাতিক উদ্ভট বলে মনে হয়। মনে হয়, এরূপ বাক্য নিরর্থক, অ-সুগঠিত ও অর্থহীন। কিন্তু "প ⊃ ফ" আকারের বাক্যকে "যদি প তাহলে ফ" আকারের বাক্যে অনুবাদ করা যদি সঙ্গত বলে মেনে নিই তাহলে মেনে নিতে হয় যে উক্ত বাক্যগুলি সত্য। অথচ উক্ত দাবী উদ্ভট বলে মনে হয়। তাহলে "প ⊃ ফ"-কে "যদি প তাহলে ফ"-তে অনুবাদ করা সঙ্গত কিনা—এ প্রশ্ন ওঠে। আর যদি অসঙ্গত হয় তাহলে প্রশ্ন ওঠে : কেন অসঙ্গত ? প্রশ্ন ওঠে সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত "যদি—তাহলে—"-এর সঙ্গে "⊃"-এর পার্থক্য কী ? আর যদি এদের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য থাকে তাহলে তা অগ্রাহ্য করে যুক্তিবিজ্ঞানীরা "প ⊃ ফ"-কে "যদি প তাহলে ফ"-তে অনুবাদ করেন কেন ? তারপর, এ অনুবাদের সমর্থনে যুক্তিবিজ্ঞানীরা কী বলেন তাও জেনে নেবার দরকার।

৭. "যদি—তাহলে—" : সাধারণ ভাষায় ও যুক্তিবিজ্ঞানে

যুক্তিবিজ্ঞানীরা "প ⊃ ফ" আকারের বাক্যকে প্রাকল্পিক বাক্য বলে অভিহিত করেন। "যদি প তাহলে ফ" আকারের বাক্যও প্রাকল্পিক বাক্য বলে অভিহিত হয়। এ দু রকম বাক্যের পার্থক্য বলতে গিয়ে আমরা প্রথম প্রকারের বাক্যকে যুক্তিবিজ্ঞানের প্রাকল্পিক আর দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যকে সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক বলে উল্লেখ করব।

* বন্ধনীর মধ্যে যথাক্রমে পূর্বকল্প ও অনুকল্পের সত্যমূল্য উল্লেখ করা হল।

সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক ও যুক্তিবিজ্ঞানের প্রাকল্পিকের মধ্যে, "যদি—তাহলে—" ও "⊃"-এর মধ্যে, সাধারণ ভাষার "যদি—তাহলে—" ও যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত "যদি—তাহলে—"এর মধ্যে, বিস্তর পার্থক্য। যথা, আমরা জানি, যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন

কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প মিথ্যা হলে বাক্যটি সত্য বলে গণ্য।

এ বিধান অনুসারে, আমরা দেখেছি,

যদি ২ + ২ = ৫ হয় তাহলে শঙ্করাচার্য দার্শনিক

যদি ২ + ২ = ৫ হয় তাহলে শঙ্করাচার্য দার্শনিক নয়

এ দুটি বাক্যই সত্য বলে গণ্য। বলা বাহুল্য, সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক সম্বন্ধে উক্ত বিধান খাটে না। কেন সাধারণ ভাষায় এ জাতীয় বিধান মানা হয় না (বা মানা যায় না), এবং তবু কেন যুক্তিবিজ্ঞানীরা এরূপ বিধান দেন তা ভাল করে বুঝতে হলে সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত "যদি—তাহলে—" এবং যুক্তিবিজ্ঞানীদের "যদি—তাহলে—" -এর সম্বন্ধ, এদের পার্থক্য ও সাদৃশ্য, আরও বিশদভাবে আলোচনা করার দরকার। এদের পার্থক্য ও সাদৃশ্য বুঝতে পারলে হয়ত দেখতে পাব উক্তরূপ বিধান প্রথম দর্শনে যেমন উদ্ভট বলে মনে হয়, তা আসলে তেমন উদ্ভট নয়, বা একেবারেই উদ্ভট নয়।

সাধারণ ভাষা থেকে প্রাকল্পিক বাক্যের কয়েকটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

(১) যদি এটি ত্রিভুজ হয় তাহলে এটি (অবশ্যই) একটি তিনবাহুবিশিষ্ট সমতল ক্ষেত্র

(২) যদি সব মানুষ স্বার্থপর হয় তাহলে (অবশ্যই) রাম নামক মানুষটিও স্বার্থপর

(৩) যদি রাম বিষপান করে থাকে তাহলে (অবশ্যই) রামের মৃত্যু হবে।

আমরা সবাই বিশ্বাস করি যে এ বাকগুলি সত্য। কেন এদের সত্য বলে মনে করি ? তার কারণ আমরা মনে করি ঃ

(১) সত্য, কেননা এর অনুকল্প "ত্রিভুজ"-এর সংজ্ঞা থেকে নির্ভুল ভাবে নিঃসৃত হয়

(২) সত্য, কেননা যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়মানুসারে এর পূর্বকল্প থেকে অনুকল্পটি নিঃসৃত হয়

(৩) সত্য, কেননা এর পূর্বকল্প থেকে অনুকল্পটি নিঃসৃত হয় "বিষপান মৃত্যুর কারণ"

এ কার্যকারণ নিয়ম অনুসারে ॥

ধরা যাক, উক্ত বাক্যগুলির অঙ্গগুলি—

এটা ত্রিভুজ, সব মানুষ স্বার্থপর, রাম বিষপান করেছে

ইত্যাদি সত্য কি মিথ্যা তা আমাদের জানা নেই। তাহলেও কিন্তু উক্ত প্রাকল্পিক বাক্যগুলির সত্যতা মিথ্যাত্ব জানতে বাধা নেই—বস্তুত তাহলেও আমরা জানি যে উক্ত বাক্যগুলি সত্য। এ কথার মানে ঃ "যদি—তাহলে—" -এর সাধারণ ব্যবহার (সাধারণ ভাষায় যে অর্থে ব্যবহার হয় সে অর্থে ব্যবহার) অনুসারে—কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের সত্যমূল্য জানতে হলে অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানবার দরকার নেই। আবার, সাধারণ ব্যবহার অনুসারে—কোনো কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানা থাকলেও প্রাকল্পিক বাক্যটি সত্য কি মিথ্যা তা সব সময় নির্ণয় করা যায় না। যথা, আমরা জানি—

(1) যদি গান্ধী বেঁচে থাকতেন তাহলে তিনি কংগ্রেস সংগঠনটি ভেঙ্গে দিতেন

(2) যদি ষ্টালিন বেঁচে থাকতেন তাহলে ভারত সাম্যবাদী হয়ে যেত

এ বাক্য দুটির অঙ্গগুলি মিথ্যা। প্রাকল্পিক বাক্যগুলি সত্য না কি মিথ্যা? কেউ কেউ এদের সত্য বলে, কেউ কেউ মিথ্যা বলে, মনে করবেন। যথা, যে সব গান্ধীভক্ত গান্ধীর মানসিকতা জানেন বলে মনে করেন এবং কংগ্রেসের বর্তমান দুর্দশায় বিচলিত তারা মনে করেন (1) সত্য, আর অনেকে মনে করেন (1) মিথ্যা। সেরকম, কমিউনিস্টদের অনেকের স্থির বিশ্বাস (2) সত্য, অপরপক্ষে অ-কমিউনিস্টরা মনে করেন যে (2) মিথ্যা। বস্তুত বাক্যগুলি সত্য না কি মিথ্যা তা নিশ্চিতভাবে জানবার উপায় নেই। অন্তত এ কথা বলা যায় যে, এদের অঙ্গের সত্যমূল্যের উপর এদের সত্যমূল্য নির্ভর করে না।

সাধারণ ভাষায় যে অর্থে "যদি–তাহলে—" প্রয়োগ করা হয় সে অর্থে কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অঙ্গগুলি সত্য হলেও বাক্যটি মিথ্যা হতে পারে, আবার অঙ্গগুলি মিথ্যা হলেও প্রাকল্পিকটি সত্য হতে পারে। ধরা যাক, নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যমূল্য আমাদের জানা আছে, জানা আছে যে—

সত্য	মিথ্যা
রাম মানুষ	রাম চিরকুমার
রাম যুক্তিবিজ্ঞানী	রাম অবিবাহিত

এখন নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর ঃ

(১) যদি রাম চিরকুমার হয় তাহলে রাম অবিবাহিত (00)

(২) যদি রাম মানুষ হয় তাহলে রাম যুক্তিবিজ্ঞানী (11)

(৩) যদি রাম যুক্তিবিজ্ঞানী হয় তাহলে রাম মানুষ (11)

এখানে (১)-এর উভয় অঙ্গই মিথ্যা, অথচ বাক্যটি সত্য,

(২)-এর উভয় অঙ্গই সত্য, অথচ বাক্যটি মিথ্যা, এবং

(৩)-এর উভয় অঙ্গ সত্য এবং বাক্যটিও সত্য বলে গণ্য।

এখানে (১) আর (৩) এজন্য সত্য নয় যে, এদের অঙ্গগুলি সত্য বা মিথ্যা. এ বাক্যগুলি সত্য এজন্য যে ঃ এদের পূর্বকল্প ও অনুকল্পের মধ্যে এমন সম্বন্ধ আছে যে, বাক্যগুলি সত্য না হয়ে পারে না। আর এরূপ কোনো সম্বন্ধ (২)-এর অঙ্গগুলির মধ্যে নেই বলেই (২) মিথ্যা—যদিও এর দুটি অঙ্গই সত্য।

এতক্ষণ ধরে যা বলা হল তার অর্থ হল এই ঃ সাধারণ ভাষায় যে প্রাকল্পিক বাক্য প্রয়োগ করা হয়, তা সত্যাপেক্ষ (truth-functional) বাক্য নয়। কিন্তু যুক্তিবৈজ্ঞানিক ব্যাখ্যা অনুসারে প্রাকল্পিক বাক্য মাত্রই সত্যাপেক্ষ বাক্য। এ ব্যাখ্যা অনুসারে কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প ও অনুকল্পের মধ্যে কোনো সম্বন্ধ থাক বা না থাক, অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানা থাকলেই প্রাকল্পিকটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যাবে।

তারপর, সাধারণ ভাষায় আমরা কখনও নিম্নোক্তরূপ বাক্য প্রয়োগ করি না।

যদি ২+৩=৫ হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান

যদি এ ফুলটি লাল হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান

যারা সাধারণ ভাষার সঙ্গে পরিচিত তারা এরূপ বাক্য অর্থহীন বলে গণ্য করবেন, কেননা এসব বাক্যের পূর্বকল্প ও অনুকল্পের মধ্যে কোনো সম্পর্ক—প্রাসঙ্গিকতার সম্পর্ক—নেই।

যুক্তিবিজ্ঞানীরা কিন্তু বলবেন ঃ এ জাতীয় বাক্য কেউ প্রয়োগ করলে এদের সত্যতা মিথ্যাত্ব নির্ণয় করা যাবে—যদি অঙ্গগুলির সত্যমূল্য জানা থাকে। আর যা সত্য বা মিথ্যা বলে গণ্য তা অর্থহীন হতে পারে না।

যুক্তিবিজ্ঞানের প্রাকল্পিক

p	q	যদি p তাহলে q $p \supset q$
1	0*	0
1	1	1
0	1	1
0	0	1

সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক

p	q	যদি p তাহলে q
1	0*	0
1	1	অনির্ণেয়
0	1	,,
0	0	,,

আবার,

$p \supset q$	p	q
0	1	0
1	[1 v 0 0	1 1 v 0

যদি p তাহলে q	p	q
0	1	0
1	অনির্ণেয়	

যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলবেন ঃ সাধারণ ভাষার "যদি—তাহলে—" আর যুক্তিবিজ্ঞানের "যদি—তাহলে—"-এর মধ্যে এত পার্থক্য দেখালেও একথা ভুললে চলবে না যে, এদের মধ্যে একটা মৌলিক সাদৃশ্য আছে। তাদের দাবী হল ঃ বস্তুত এ যোজকটির সাধারণ অর্থের সঙ্গে যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত অর্থের মৌলিক ভেদ নেই। যথা, দেখানো যায় যে "প্রাকল্পিক বাক্য কখন মিথ্যা ?", "কিভাবে কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের মিথ্যাত্ব প্রমাণ করা যায় ?"—এ প্রশ্নের যে উত্তর আমরা, যুক্তিবিজ্ঞানীরা, দিয়ে থাকি তার সঙ্গে সাধারণ ভাষাভাষীদের উত্তরের বিশেষ কোনো ভেদ নেই ॥ যুক্তিবিজ্ঞানীদের বক্তব্য এভাবে ব্যক্ত করা যায়। সবাই স্বীকার করবে যে—

> যে প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প সত্য ও অনুকল্প মিথ্যা সে বাক্য মিথ্যা। যদি দেখানো যায় যে এ প্রাকল্পিকটির পূর্বকল্প সত্য ও অনুকল্প মিথ্যা তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল প্রাকল্পিকটি মিথ্যা ॥

যথা

> যদি ঐ উনুনে আগুন থাকে তাহলে ঐ উনুনে ধোঁয়া আছে

এ বাক্য মিথ্যা দেখাতে পারি কেবল এভাবে ঃ দেখ, ঐ উনুনে আগুন আছে, কিন্তু ধোঁয়া নেই। সে রকম

> যদি রাম আসে তাহলে শ্যাম আসবে

এ বাক্য মিথ্যা প্রমাণ করতে হলে দেখাতে হবে যে রাম এসেছে, কিন্তু শ্যাম আসে নি।

* লক্ষণীয়, অঙ্গমূল্য বিন্যাসের যে ক্রম আমরা অনুসরণ করে আসছি এ আকরস্তম্ভে তা অনুসরণ করা হল না।

যদি রাম না আসে, বা রাম শ্যাম কেউ না আসে তাহলেও বাক্যটির মিথ্যাত্ব প্রমাণিত হয় না।

কেবল যুক্তিবিজ্ঞানীরা নয়, যারা সাধারণ অর্থে "যদি—তাহলে—" ব্যবহার করেন তারাও বলবেন : কোনো প্রাকল্পিক বাক্য মিথ্যা প্রমাণ করতে হলে দেখাবার দরকার যে বাক্যটির পূর্বকল্প-সত্য-অনুকল্প-মিথ্যা। তাহলে কোনো প্রাকল্পিক বাক্য "যদি p তাহলে q" মিথ্যা হতে, বা মিথ্যা বলে প্রমাণিত হতে, পারে

যদি এবং কেবল যদি পূর্বকল্প-'p'-সত্য-ও-অনুকল্প-'q'-মিথ্যা হয়।

এখন, যদি কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প মিথ্যা হয় তাহলে আর উক্ত সর্তটি পূরণ হতে পারে না, দেখানো যায় না যে পূর্বকল্প-সত্য-ও-অনুকল্প মিথ্যা। যথা, প্রমাণ করা যাবে না যে

(১) যদি ২ + ২ = ৫ হয় তাহলে রাম বুদ্ধিমান

এ বাক্য মিথ্যা। আবার, যদি কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অনুকল্প সত্য হয় তাহলেও আর দেখানো যায় না যে প্রাকল্পিকটি মিথ্যা। যথা, দেখানো যায় না যে

(২) যদি রাম বুদ্ধিমান হয় তাহলে ২ + ২ = ৪

—এ বাক্য মিথ্যা। যারা সাধারণ অর্থে "যদি—তাহলে—" ব্যবহার করেন তারাও স্বীকার করবেন যে উক্ত (১) ও (২) মিথ্যা নয় (অন্তত এদের মিথ্যা বলে প্রমাণ করা যায় না)। এখন, যা মিথ্যা নয়, তা সত্য। আর যা সত্য তা অবশ্যই অর্থবহ। সুতরাং উক্তরূপ বাক্য অর্থবহ।

তবে যারা সাধারণ অর্থে আলোচ্য যোজকটি প্রয়োগ করেন তারা বলতে পারেন : এরূপ বাক্য অর্থহীন। আর যদি মেনে নিই যে উক্ত বাক্যগুলি মিথ্যা নয়, তাহলেও প্রশ্ন ওঠে—আমরা এরূপ বাক্য প্রয়োগ করব কেন ? বস্তুত আমরা এরূপ বাক্য কখনও প্রয়োগ করি না। যথা, আমরা জানি, '২ + ২ = ৫' মিথ্যা। এ মিথ্যা বাক্যকে পূর্বকল্প করে প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করতে যাব কেন ? উত্তরে যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলতে পারেন : কখনও এরূপ বাক্য প্রয়োগ করা হয় না—এ কথা ঠিক নয়। কোনো বাক্য 'প' মিথ্যা জেনেও 'প'কে নিয়ে প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করা হয় এবং এভাবে 'প'কে মিথ্যা প্রতিপন্ন করার চেষ্টা করা হয়। ধরা যাক, রাম বিশ্বাস করে যে : ঐ ঘোড়াটা জিতবে না, বা "ঐ ঘোড়াটা জিতবে"—এ বাক্য মিথ্যা। কিন্তু শ্যাম এ বিশ্বাসের ন্যায্যতা সম্পর্কে সংশয় প্রকাশ করল। এ ক্ষেত্রে রাম "ঐ ঘোড়াটা জিতবে" এ বাক্যের মিথ্যাত্ব প্রতিপন্ন করার জন্য এ রকম বাক্য প্রয়োগ করল* :

যদি ঐ ঘোড়াটা জেতে তাহলে আমি আমার কান কেটে ফেলব
যদি ঐ ঘোড়াটা জেতে তাহলে সূর্য কাল পশ্চিম দিকে উঠবে।

---

* রাম জানে : শ্যাম স্বীকার করবে, এ বাক্যগুলির অনুকল্প মিথ্যা ; আর অনুকল্প মিথ্যা হলে স্বীকার করতে হবে যে পূর্বকল্পটি মিথ্যা (অবশ্য শ্যামকে মনে করতে হবে যে প্রাকল্পিকগুলি সত্য) কেননা : "প ⊃ ফ" equiv. "~ফ ⊃ ~প" (ব্যাবর্তনের সূত্র)।

এসব বাক্য অর্থহীন বলে মনে হয় না। তাহলে (১), (২) বা এ জাতীয় বাক্য অর্থহীন বলে মনে করব কেন ?

আবার যুক্তিবিজ্ঞানীদের দাবীর কথায় ফেরা যাক। যুক্তিবিজ্ঞানীদের দাবী হল ঃ আমরা যে অর্থে '⊃' বা "যদি—তাহলে—" প্রয়োগ করি তার সঙ্গে সাধারণ ভাষার "যদি—তাহলে"-এর বিরোধ নেই, কোনো মৌলিক ভেদও নেই। আমরা দেখেছি, এ উক্তি ঠিক নয়। সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক ও যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত প্রাকল্পিকের পার্থক্য এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি।

যুক্তিবিজ্ঞানের প্রাকল্পিক, "প ⊃ ফ" বা "যদি প তাহলে ফ"-এর বক্তব্য হল ঃ

এমন **নয়** যে 'প'-সত্য-ও-'ফ'-মিথ্যা ;

সাধারণ ভাষার প্রাকল্পিক, "যদি প তাহলে ফ" আকারের বাক্যের বক্তব্য হল ঃ

এমন **হতে পারে না** যে 'প'-সত্য-ও-'ফ'-মিথ্যা।

এ পার্থক্য থাকা সত্ত্বেও যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন ঃ আমরা "প ⊃ ফ" আকারের বাক্যের যে অর্থ করি যেকোনো "যদি প তাহলে ফ" আকারের বাক্যকে সে অর্থে নিতে বাধা নেই। এ উক্তির সমর্থনে যুক্তিবিজ্ঞানীরা দুটি যুক্তি উত্থাপন করেন।

প্রথম যুক্তি ঃ যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন—সাধারণ ভাষার "যদি—তাহলে—"-এর কোনো প্রমিত (স্থিরীকৃত, standardized) অর্থ বা ব্যবহার নেই। এ যোজকটি প্রয়োগ করে নানান রকমের সম্বন্ধ ব্যক্ত হয়। যথা

(১) যদি এটি একটি ত্রিভুজ হয় তাহলে এটি একটি তিনবাহুবিশিষ্ট সমতল ক্ষেত্র

(২) যদি সব মানুষ স্বার্থপর হয় তাহলে রাম নামক মানুষটিও স্বার্থপর

(৩) যদি রাম বিষ পান করে তাহলে রামের মৃত্যু হবে

(৪) যদি আমি ফেল করি তাহলে আমি পড়াশুনা ছেড়ে দেব।

এখানে (১) ও (২)-তে ব্যক্ত হয়েছে যৌক্তিক সম্বন্ধ, (৩)-এতে কারণিক সম্বন্ধ, কিন্তু (৪)-এতে এ জাতীয় কোনো সম্বন্ধই ব্যক্ত হয় নি— কোনো বিশেষ অবস্থায় বক্তা কী করবে বলে স্থির করেছে তাই বলা হয়েছে এ বাক্যে। তার মানে এ বাক্যগুলিতে আলোচ্য যোজকটি বিভিন্ন অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন, এ রকম বাক্যের মধ্যে যোজকটির একটি সাধারণ অর্থ উদ্ধার করা যায়। তাদের মতে "যদি—তাহলে—" আকারের বাক্যের অর্থ বা বক্তব্য হল ঃ

এমন নয় যে প্রথম বাক্যটি সত্য এবং দ্বিতীয়টি মিথ্যা

"যদি প তাহলে ফ" মানে ঃ এমন নয় যে 'প'-সত্য-'ফ'-মিথ্যা।

"প ⊃ ফ", যুক্তিবিজ্ঞান অনুমোদিত "যদি প তাহলে ফ" এবং সাধারণ ভাষার "যদি প তাহলে ফ"-আকারের বাক্য—এদের প্রত্যেকটি সম্বন্ধে উক্ত অর্থ খাটে। কাজেই যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন, যেকোনো "যদি —তাহলে—" আকারের বাক্যকে উক্ত অর্থে নেওয়া উচিত। সাধারণ ভাষায় যোজকটি যে অর্থে ব্যবহৃত হয় (বা এ যোজক প্রয়োগ করে যে জাতীয় উক্তি করা হয়) এটা তার চেয়ে একটু দুর্বল অর্থ (বা দুর্বল উক্তি)। কোনো অর্থকে (উক্তিকে)

অন্য অর্থের (উক্তির) চেয়ে দুর্বলতর বলতে কী বোঝায় নিচের উদাহরণগুলি লক্ষ করলেই তা বোঝা যাবে

মূল উক্তি : রাম আসবে · শ্যাম আসবে
দুর্বলতর উক্তি : রাম আসবে
রাম আসবে v শ্যাম আসবে।
সংকীর্ণ বা সবল অর্থ : "কতক" মানে অনেক
ব্যাপক বা দুর্বল অর্থ : "কতক" মানে অন্তত একটি।
সবল অর্থ : "রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে" মানে—
এদের অন্তত একজন আসবে · দুজনই আসবে না
দুর্বল অর্থ : "রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে" মানে—
এদের অন্তত একজন আসবে।
সবল অর্থ : "যদি প তাহলে ফ" অর্থ—এমন হতে পারে না যে প · ~ফ
দুর্বল অর্থ : "যদি প তাহলে ফ" অর্থ—এমন নয় যে প · ~ ফ।

যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন : কোনো শব্দের অর্থ নিয়ে মতানৈক্য হলে শব্দটিকে ব্যাপক বা দুর্বল অর্থে নেওয়াই বাঞ্ছনীয়, এবং এটাই প্রথা ; যথা যুক্তিবিজ্ঞানে "কতক"কে, "অথবা"কে দুর্বলতম অর্থেই নেওয়া হয়। কাজেই এ প্রথা অনুসারে "যদি—তাহলে"-কেও দুর্বলতম অর্থে নেওয়া উচিত ॥

দ্বিতীয় যুক্তি : যুক্তিবিজ্ঞানের একটি প্রধান কাজ হল যুক্তির বৈধতা নির্ণয়। কয়েক প্রকারের যুক্তির অবয়ব হল প্রাকল্পিক বাক্য, এবং এরূপ যুক্তি, বলা বাহুল্য, বৈধ অথবা অবৈধ। এখন, দেখানো যায় যে, সাধারণ ভাষায় যে অর্থে আলোচ্য যোজকটি প্রয়োগ করা হয় সে অর্থে, মানে সবল অর্থে, নিলে প্রাকল্পিক-অবয়বসম্বলিত যে যে প্রকারের যুক্তি বৈধ (বা অবৈধ) যোজকটি দুর্বল অর্থে নিলেও ঠিক ঐ ঐ প্রকারের যুক্তি অনুরূপভাবে বৈধ (বা অবৈধ)। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন : এমন দেখাতে পারবে না, তোমরা "প্রাকল্পিক" যে অর্থে নাও সে অর্থ অনুসারে কোনো যুক্তি বৈধ (বা অবৈধ) আর আমাদের অর্থে সে যুক্তি অন্যরূপ—অবৈধ (বা বৈধ)। তাহলে যোজকটিকে অহেতুক সবল অর্থে নেবে কেন ? লাঘবের নীতি অনুসারে, আমাদের দেওয়া ব্যাখ্যা মেনে নেওয়াই ত সঙ্গত ॥

৮. প্রাকল্পিক বচন ও সামান্যীকৃত সাপেক্ষ (Generalized Conditional)

আমরা বলেছি : "যদি—তাহলে—" আকারের বচনকে প্রাকল্পিক বচন বলে। এভাবে প্রাকল্পিক বচনের লক্ষণ দেওয়া কিন্তু ঠিক নয়। কেননা দেখতে পাব যে, সব "যদি—তাহলে—" আকারের বচনই প্রাকল্পিক বলে গণ্য হতে পারে না। উদাহরণ : সবাই স্বীকার করবে যে

সব মানুষ মরণশীল (১)

এটা প্রাকল্পিক বচন নয়, অনপেক্ষ বচন। কিন্তু বাক্যটিকে এভাবে "যদি—তাহলে—" আকারে ব্যক্ত করা যায়

যদি কোনো কিছু মানুষ হয় তাহলে তা মরণশীল (২)

x যাই হোক না কেন, যদি x মানুষ হয় তাহলে x মরণশীল (2)

(১) প্রাকল্পিক বচন বচন নয় ; সুতরাং "যদি—তাহলে—" আকারে ব্যক্ত হলেও, (১)-এর সমার্থক (২) ও (2) প্রাকল্পিক বলে গণ্য হতে পারে না। তাছাড়া, বলতে পারি—(২) ও (2) প্রাকল্পিক বচন নয়, কেননা : প্রাকল্পিক বচন হল যৌগিক বচন, মানে এর অঙ্গগুলিও বচন, কিন্তু (২) বা (2)-এর অঙ্গগুলি বচন নয়—"কোনো কিছু মানুষ", "x মানুষ" ইত্যাদি প্রসঙ্গে সত্য মিথ্যার কথা ওঠে না, সুতরাং এসব বচন বলে গণ্য নয়।

যদি কোনো কিছু ক হয় তাহলে তা খ

যদি কোনো কিছু ক হয় তাহলে তা গ নয়

—এ আকারের বাক্যকে* বলে সামান্যীকৃত সাপেক্ষ বাক্য। কেন বলে, দেখ। সামান্যীকৃত সাপেক্ষের আর একটি উদাহরণ।

যদি কোনো কিছু ধূমমান হয় তাহলে তা বহ্নিমান (৩)

এ বাক্যের বক্তব্য হল

(৩·১) যদি এ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে এ পর্বত বহ্নিমান

(৩·২) যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান

(৩·৩) যদি মন্দার পর্বত ধূমবান হয় তাহলে মন্দার পর্বত বহ্নিমান

(৩·৪) যদি ঐ রান্নাঘর ধূমবান হয় তাহলে ঐ রান্নাঘর বহ্নিমান

ইত্যাদি ইত্যাদি

এভাবে আরও অসংখ্য উক্তি করা যায় এবং ঐ সব উক্তি যে (৩)-এর বক্তব্যের অন্তর্ভুক্ত তা বোঝাবার জন্য "ইত্যাদি" "ইত্যাদি" ব্যবহার করা হল। (৩·১), (৩·২) ইত্যাদি প্রাকল্পিক বাক্য। এসব প্রাকল্পিকের ভিত্তিতে সামান্যীকরণ করে পাওয়া যায় (৩) ; সুতরাং (৩) হল (৩·১), (৩·২) ইত্যাদির সামান্যীকৃত রূপ। প্রকৃতপক্ষে সামান্যীকৃত সাপেক্ষ হল গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের সার্বিক বচন। যথা, আলোচ্য সামান্যীকৃত সাপেক্ষটিকে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

সব ধূমবান পদার্থই বহ্নিমান

সেরূপ If any nation is free then it is prosperous =
All free nations are prosperous।

মনে রাখতে হবে : সামান্যীকৃত সাপেক্ষ প্রাকল্পিক বচন নয়, ঠিক ; কিন্তু এদের দৃষ্টান্ত—যথা (২)-এর দৃষ্টান্ত

যদি রাম মানুষ হয় তাহলে রাম মরণশীল

যদি শ্যাম মানুষ হয় তাহলে শ্যাম মরণশীল

সেরূপ (৩)-এর উপরোক্ত দৃষ্টান্ত (৩·১), (৩·২) ইত্যাদি—এসব প্রাকল্পিক বাক্য।

* গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের : সব ক হল খ, কোনো ক গ নয়—আকারের

কোনো বাক্য যে প্রকৃতপক্ষে প্রাকল্পিক (সামান্যীকৃত সাপেক্ষ নয়) সে সম্বন্ধে নিশ্চিত হওয়া যায় যদি দেখি যে : "যদি—তাহলে—" আকারের বাক্যটির অঙ্গগুলি ব্যক্তিবাচক বাক্য (singular proposition)। প্রশ্ন : সব মানুষ মরণশীল ⊃ রাম মরণশীল—এ বাক্যটি কি প্রাকল্পিক ?

৯. প্রাকল্পিক বাক্যের আদর্শ আকার

নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর।

If Jane comes, Jack will come
Jack will come if Jane comes
Jack comes whenever Jane comes
Jack will come in case Jane comes
Jack will come provided that Jane comes
That Jane will come means Jack will come

এ প্রত্যেকটি বাক্যের আদর্শ আকার বা যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকার হল

Jane comes ⊃ Jack comes

পর্যাপ্ত সর্ত : যদি এমন হয় যে 'p' সত্য হলে 'q' সত্য তাহলে 'p', 'q'-এর পর্যাপ্ত সর্ত (sufficient condition) বলে গণ্য। তার মানে

p is the sufficient condition of q = If 'p' is true then 'q' is true
= If p then q
= $p \supset q$

আবশ্যিক সর্ত : যদি এমন হয় 'q' মিথ্যা হলে 'p' মিথ্যা তাহলে 'q' 'p'-এর আবশ্যিক সর্ত (necessary condition) বলে গণ্য। তার মানে

q is the necessary condition of $p = \sim q \supset \sim p$

অমুক অমুকের আবশ্যিক সর্ত—সাধারণ ভাষায় এ কথা ব্যক্ত করতে

only if   কেবল যদি

ব্যবহার করা হয়। জ্যাক্-এর আসা জিল্-এর আসার আবশ্যিক সর্ত—এ কথা সাধারণত ব্যক্ত হবে এভাবে

Jill will come only if Jack comes
জিল্ আসবে কেবল যদি জ্যাক্ আসে

এদের আকার হল "p only if q"। এদের আদর্শ প্রাকল্পিকে রূপান্তরিত করতে হবে এভাবে

~Jack comes ⊃ ~Jill comes
~জ্যাক্ এসেছে ⊃ ~জিল্ এসেছে।

তাহলে বলতে পারি

$$p \text{ only if } q = \sim q \supset \sim p$$

এখন, ব্যাবর্তনের সূত্র অনুসারে "$\sim q \supset \sim p$ সম "$p \supset q$"। সুতরাং নিষেধজ্ঞাপক "$\sim$" প্রয়োগ না করে "p only if q"-কে "$p \supset q$"-তে রূপান্তরিত করা যায়। সাধারণত আমরা এভাবেই "p only if q"-কে রূপান্তরিত করব। তাহলে রূপান্তর করার সময় মনে রাখবে

$$p \text{ only if } q = p \supset q$$

মনে রাখবে "only if"-এর পরবর্তী অংশ অনুকল্প, পূর্বকল্প নয়। এমন কি আমরা সাধারণভাবে

"$p \supset q$" পড়তে পারি এভাবে : p only if q*

আমরা দেখেছি

"$p \supset q$"-এর বক্তব্য : p is the sufficient condition of q

"$\sim q \supset \sim p$"-এর বক্তব্য : q is the necessary condition of p

আবার, "$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$" (১)

সুতরাং বলতে পারি

"p is the sufficient condition of q" সম

"q is the necessary condition of p (1)

বলা বাহুল্য (১) ও (২) সমার্থক বাক্য।

প্রাকল্পিক বাক্যকে আদর্শ আকারে রূপান্তর করার সময় মনে রাখবে

p only if q

q is the necessary condition of p

p is the sufficient condition of q

এ আকারের বাক্য রূপান্তরিত করতে হবে

$$p \supset q$$

আকারের বাক্যে। এবার নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর।

Only if Bucephalus is a mammal, is it a horse

Bucephalus is a horse only if it is a mammal

That Bucephalus is a mammal is a necessary condition of its being a horse

A necessary condition for Bucephalus to be a horse is that it is a mammal

A sufficient condition for Bucephalus to be a mammal is that it is a horse

That Bucephalus is a horse is a sufficient condition for it to be a mammal

এ প্রত্যেকটি বাক্যের সাংকেতিক রূপ হল

$$H \supset M$$

(এখানে "Bucephalus is a horse" এর বদলে সংক্ষেপক 'H', আর "Bucephalus is a mammal"-এর বদলে 'M' ব্যবহার করা হয়েছে)।

* $p \supset q = p$ only if $q = \sim q \supset \sim p = p \supset q$

১০. বাংলা বাকভঙ্গি ও নাল

অনেক সময় "যদি—তাহলে—" ব্যবহার না করে কেবল "—হলে—" ব্যবহার করে বা ক্রিয়াপদের সঙ্গে "লে" যুক্ত করে, প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করা হয়। কি করে এরূপ বাক্যকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করতে হয় লক্ষ কর।

রাম বুদ্ধিমান হলে রাম এ প্রশ্নের জবাব দিতে পারবে=রাম বুদ্ধিমান ⊃ রাম এ……
এখানে "হলে" বাদ দেওয়া হল। কিন্তু

এখন বৃষ্টি হলে এবার ফসল ভাল হবে

এ বাক্য থেকে কেবল "হলে" বাদ দিলেই চলবে না। বাক্যটিকে এভাবে রূপান্তরিত করতে হবে

এখন বৃষ্টি হচ্ছে ⊃ এবার ফসল ভাল হবে

সেরকম,

রাম এলে শ্যাম আসবে = রাম এসেছে ⊃ শ্যাম আসবে।

তারপর, নাল ব্যবহার করে প্রাকল্পিক ব্যক্ত করতে হলে 'যদি'-শাসিত অংশের

"হয়" বাদ দেওয়া দরকার

অমুক বস্তু "থাকে" বদলে লেখার দরকার ঃ অমুক বস্তু "আছে"

অমুক-কাজ "করে থাকে" স্থলে লেখার দরকার ঃ অমুক-কাজ "করেছে"

যথা "গিয়ে থাকে"র স্থলে "গিয়েছে" লেখার দরকার।

উদাহরণ

যদি আমটি পাকা হয় তাহলে আমটি মিষ্টি = আমটি পাকা ⊃ আমটি মিষ্টি

যদি আকাশে মেঘ থাকে তাহলে এখন বৃষ্টি হবে = আকাশে মেঘ আছে ⊃ এখন……

যদি রাম প্রতিজ্ঞা করে থাকে তাহলে রাম কথা রাখবে = রাম প্রতিজ্ঞা করেছে ⊃……

নাল ব্যবহার করে প্রাকল্পিক উক্তি ব্যক্ত করতে হলে প্রদত্ত বাক্যের কোন্ শব্দ বর্জন করতে হবে, কোন্ শব্দের কী বৈয়াকরণ পরিবর্তন করতে হবে তা বোঝার সহজ উপায় হল এই।

প্রথমে প্রদত্ত বাক্যটিকে "যদি এমন হয় যে—তাহলে এমন (হবে) যে—" আকারে ব্যক্ত কর। এ আকারে প্রথম ড্যাসের জায়গায় যা বসবে তা পূর্বকল্প আর দ্বিতীয় ড্যাসের জায়গায় যা থাকবে তাই অনুকল্প।

যথা, এ নিয়ম অনুসারে

রাম এলে শ্যাম আসবে

=যদি এমন হয় যে রাম এসেছে তাহলে এমন হবে যে শ্যাম আসবে

=রাম এসেছে ⊃ শ্যাম আসবে

যদি রাম প্রতিজ্ঞা করে থাকে তাহলে রাম কথা রাখবে

=যদি এমন হয় যে রাম প্রতিজ্ঞা করেছে তাহলে এমন হবে রাম কথা রেখেছে (রাখবে)

=রাম প্রতিজ্ঞা করেছে ⊃ রাম কথা রেখেছে (রাখবে)

প্রশ্ন ঃ যদিও রাম গরীব তাহলেও রামের আত্মসম্মানবোধ আছে—এ বাক্যটি কি প্রাকল্পিক ? একে যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকারে রূপান্তরিত কর।

"even if"

"q even if p"-এর বক্তব্য ঃ 'p' মিথ্যা হলে 'q' সত্য একথা বলাই বাহুল্য, উপরন্তু 'p' সত্য হলেও 'q' সত্য

বা $(\sim p \supset q) \cdot (p \supset q)$

বা 'p' সত্য হোক কি মিথ্যা হোক 'q' সত্য

বা $(p \vee \sim p) \supset q$

অনুরূপভাবে

"q" even if not p"-এর বক্তব্য ঃ $p \supset q) \cdot (\sim p \supset q)$

বা $(p \vee \sim p) \supset q$

উদাহরণ ঃ

The match will be played even if it rains

= Whether it rains or not, the match will be played

$= (R \vee \sim R) \supset M$

The meeting will be held even if the President does not arrive

= Whether the President arrives or not the meeting will be held

$= (P \vee \sim P) \supset H$

লক্ষণীয়, উক্ত প্রাকল্পিকগুলির পূর্বকল্প স্বতসত্য ('$p \vee \sim p$' আকারের বাক্য)। পরে দেখব, এরূপ কোনো প্রাকল্পিক ও এর অনুকল্প সমার্থক। মানে

"$(p \vee \sim p) \supset q$" সম "$q$"

q even if p
q even if $\sim p$ } এদের সরলীকরণ করে লেখা যায় ঃ q

সরলীকরণের যে নিয়ম পেলাম তা এভাবে ব্যক্ত করা যায়

স্বতসত্য পূর্বকল্প বর্জন করা চলে। এ বর্জনের ফলে যে বাক্য পাওয়া যায় তা আর মূল প্রাকল্পিক সমার্থক।

উদাহরণ

The match will be played even if it rains =
The match will be played

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাচ্ছে "q even if p" আকারের বাক্য প্রকৃত প্রাকল্পিক নয়।

বাক্যকে যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকারে রূপান্তরিত করার সময় মনে রাখবে ঃ

q unless $p = \sim p \supset q = p \vee q$

q only if $p = \sim p \supset \sim q = q \supset p$

q even if $p(\sim p) = (p \vee \sim p) \supset q = q$

q whether or not $p = q$ in either case $= q$

বাংলায় ঃ যদি p তাহলেও q। উদাহরণ ঃ যদি বৃষ্টি হয় তাহলেও খেলা হবে, যদি বৃষ্টি না থামে তাহলেও আমরা ১০টায় যাত্রা করব।

১১. অনুবন্ধী (Conjugate) বাক্য

দুটি বাক্য—'p', 'q' ও এদের উভয়ের নিষেধ নিয়ে মোট চারটি প্রাকল্পিক বাক্য গঠিত হতে পারে ঃ

(১) $p \supset q$ (২) $q \supset p$ (৩) $\sim p \supset \sim q$ (৪) $\sim q \supset \sim p$

এ বাক্যগুলি অভিন্নমূল বা অনুবন্ধী প্রাকল্পিক বাক্য, সংক্ষেপে অনুবন্ধী বাক্য। এ অনুবন্ধী-গুলির প্রথমটি

(১) $p \supset q$

-কে প্রদত্ত বা মৌল বাক্য ধরে নিয়ে বলা হয় ঃ

'$q \supset p$' হল (১)-এর আবর্ত (converse)
'$\sim p \supset \sim q$' হল (১)-এর আপ্রতিবর্ত বা অঙ্গনিষেধ (inverse)
'$\sim q \supset \sim p$' হল (১)-এর ব্যাবর্ত (contrapositive)

আমরা আগেই দেখেছি (১০০ পৃঃ) কোনো বাক্য ও তার আবর্ত অসমার্থক ঃ এদের একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা হতে পারে। দেখবে

$p=0$, $q=1$ হলে অথবা $p=1$, $q=0$ হলে,
'$p \supset q$' আর এর আবর্ত '$q \supset p$'—এদের একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা।

আবার, কোনো বাক্যে ও তার অঙ্গনিষেধও অসমার্থক। 'p', 'q'-তে উপরোক্ত মূল্য বসাও, দেখবে '$p \supset q$' আর এর অঙ্গনিষেধ (আপ্রতিবর্ত) '$\sim p \supset \sim q$'—এদের একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা।

কিন্তু ব্যাবর্তনের নিয়ম অনুসারে ঃ কোনো প্রাকল্পিক বাক্য ও তার ব্যাবর্ত সমার্থক, মানে

(১) "$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$" (৪)
(২) "$q \supset p$" সম "$\sim p \supset \sim q$" (৩)

এ প্রসঙ্গে আরও একটা ব্যাপার লক্ষণীয়। লক্ষণীয় যে, কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের ব্যাবর্ত হল ঐ বাক্যের

অঙ্গনিষেধের আবর্ত (converse of the inverse)
আবর্তের অঙ্গনিষেধ (inverse of the converse)

এ উক্তি যে সত্য তা নিচে দেখানো হল।

1. $p \supset q$
2. $\sim p \supset \sim q$ [1-এর অঙ্গনিষেধ]
3. $\sim q \supset \sim p$ [২-এর আবর্ত, আর 1-এর ব্যাবর্ত]

১. $p \supset q$
২. $q \supset p$ [১-এর আবর্ত]
৩. $\sim q \supset \sim p$ [২-এর অঙ্গনিষেধ, আর ১-এর ব্যাবর্ত]

১২. সাপেক্ষ ও অনপেক্ষ বাক্য

আমরা দেখেছি

"$p \supset q$" সম "$\sim p \vee q$"

আবার "$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$"

এর থেকে বোঝা '$\supset$' যোজকটি অপরিহার্য নয় ; যা '$\supset$' দিয়ে ব্যক্ত করা যায় তা "$\vee$", "$\sim$", অথবা "$\cdot$", "$\sim$" দিয়েও ব্যক্ত করা যায়। আবার, সব বাক্যকে "$\supset$", "$\sim$" দিয়েও ব্যক্ত করতে পারি। এ প্রসঙ্গে গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের একটি বাক্যবিভাগ আলোচনা করা সুবিধাজনক বলে মনে করছি।

গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানীরা বাক্যকে, মানে বচনকে, এক দিক থেকে দু ভাগে ভাগ করেন : অনপেক্ষ ও সাপেক্ষ। অনপেক্ষ বাক্যে কোনো নিঃসর্ত উক্তি করা হয়, যথা : এ ফুলটি লাল, রাম বুদ্ধিমান, ইত্যাদি। আর সাপেক্ষ বাক্যে কোনো সর্তের উল্লেখ থাকে ; যথা : যদি অনাবৃষ্টি হয় তাহলে দুর্ভিক্ষ হবে, যদি রাম আসে তাহলে শ্যাম আসবে। আমরা যে বাক্য প্রকারগুলি আলোচনা করেছি তাদের মধ্যে : $\sim p$, $p \cdot q$, $p \cdot \sim q$ –ইত্যাদি আকারের বাক্য অনপেক্ষ। কিন্তু "$p \vee q$" আকারের বাক্য? এসবও কি অনপেক্ষ?

গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন—সাপেক্ষ বাক্য দু রকম : (১) এক রকম সাপেক্ষ বাক্যে স্পষ্টভাবে সর্তের উল্লেখ থাকে ; এরূপ বাক্য "যদি—তাহলে—" আকারে ব্যক্ত হয় (আমরা এদের প্রাকল্পিক বাক্য বলে অভিহিত করেছি), আর (২) একরূপ সাপেক্ষ বাক্যে সর্ত স্পষ্টভাবে উল্লেখ করা থাকে না, থাকে প্রচ্ছন্নভাবে ; এবং এরূপ বাক্যকে বৈকল্পিক বাক্য বলে অভিহিত করা হয়। আমরাও এরূপ বাক্যকে বৈকল্পিক বলে চিহ্নিত করেছি আর "—$\vee$—" আকারে ব্যক্ত করব বলে স্থির করেছি। "$p \vee q$" আকারের বাক্য যে প্রকৃতপক্ষে সাপেক্ষ তা গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানীদের অনুসরণ করে এভাবে দেখানো যায়—

"$p \vee q$"-এর বক্তব্য : p, q,—এদের অন্তত একটি সত্য, মানে
যদি একটি বিকল্প মিথ্যা হয় তাহলে অন্যটি সত্য

তার মানে :

"$p \vee q$" সম : যদি 'p' মিথ্যা হয় তাহলে 'q' সত্য, এবং
যদি 'q' মিথ্যা হয় তাহলে 'p' সত্য

আমাদের সংকেতলিপিতে

"$p \vee q$" সম "$(\sim p \supset q) \cdot (\sim q \supset p)$"

এখন, ব্যাবর্তনের সূত্র অনুসারে ডানধারের বাক্যটির সংযোগী দুটি সমার্থক*। কাজেই দ্বিতীয় সংযোগীটি বাদ দিয়ে বলতে পারি

* আর যদি "ব" সম "ভ" হয় তাহলে : "ব · ভ" সম "ব"।

"$p \vee q$" সম "$\sim p \supset q$"**

"p / q"ও যে সাপেক্ষ বাক্য তা এভাবে দেখানো যায়—

"p / q"-এর বক্তব্য ঃ 'p', 'q' —এদের অন্তত একটি মিথ্যা, মানে
যদি একটি প্রতিকল্প সত্য হয় তাহলে অন্যটি মিথ্যা।

তার মানে

"p / q" সম ঃ যদি 'p' সত্য হয় তাহলে 'q' মিথ্যা, এবং
যদি 'q' সত্য হয় তাহলে 'p' মিথ্যা

আমাদের সংকেতলিপিতে

"p / q" সম "$(p \supset \sim q) \cdot (q \supset \sim p)$"

এখন ব্যাবর্তনের সূত্র অনুসারে ডান ধারের বাক্যটির দুটি সংযোগী সমার্থক কাজেই দ্বিতীয় সংযোগীটিকে বাদ দিয়ে বলতে পারি

"p / q" সম "$p \supset \sim q$"

"$p \downarrow q$" কিন্তু প্রচ্ছন্নভাবেও সাপেক্ষ নয়, কেননা এর বক্তব্য ঃ $\sim p \cdot \sim q$, আর সংযৌগিক বাক্য অনপেক্ষ। দেখা গেল, সংযৌগিক বাক্য ও নিষেধক বাক্য † ভিন্ন অন্য প্রকারের যৌগিক বাক্য প্রকৃতপক্ষে সাপেক্ষ‡—প্রকটভাবে বা প্রচ্ছন্নভাবে সাপেক্ষ। সাপেক্ষার্থ বাক্যের মধ্যে কেবল প্রাকল্পিক বাক্যই প্রকটভাবে সাপেক্ষ আর অন্যান্য বাক্য প্রচ্ছন্নভাবে সাপেক্ষ।

একটা কথা। আমরা বলেছি নিষেধক বাক্য অনপেক্ষ। এখানে "নিষেধ" বলতে বুঝছি আণবিক বাক্যের নিষেধ বা অ-সংযৌগিকের নিষেধ। কেননা সংযৌগিকের নিষেধ কিন্তু সাপেক্ষ বাক্য। যথা

"$\sim(A \cdot B)$" সম "$\sim A \vee \sim B$" সম "$A \supset \sim B$"

শেষোক্ত বাক্য দুটি সাপেক্ষ, সুতরাং $\sim(A \cdot B)$ও প্রচ্ছন্নভাবে সাপেক্ষ।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে

> সংযৌগিক বাক্য আর অ-সংযৌগিকের নিষেধ ভিন্ন অন্য সব বাক্যকে প্রাকল্পিক বাক্যে রূপান্তরিত করা যায়

আর উক্ত বাক্যগুলিকে প্রাকল্পিকের নিষেধে রূপান্তরিত করা যায়। উদাহরণ

$A \cdot B$		$\sim(A \vee B)$	
$\sim(\sim A \vee \sim B)$	[DM]	$\sim(\sim\sim A \vee B)$	[DN]
$\sim(A \supset \sim B)$	[Df ⊃]	$\sim(\sim A \supset B)$	[Df ⊃]

** এ সূত্রটিকে Df v বলে চিহ্নিত করা যেত। তবে Df v বলে একটি স্বতন্ত্র সূত্র মানার দরকার নেই। Df ⊃ (পৃঃ ১০২) এতে 'p'-এর বদলে $\sim p$ বসিয়ে DN প্রয়োগ করে এ সূত্রটি পাওয়া যায়।

† আর আণবিক বাক্যের নিষেধ বা সাপেক্ষবাক্যের নিষেধ

‡ বা সাপেক্ষবাক্যের সংযোজন। লক্ষণীয়, '$p \vee q$' সম '$(p \vee q) \cdot (p/q)$' সম '$(\sim p \supset q) \cdot (p \supset \sim q)$'।

এমনকি আণবিক বা আণবিকের নিষেধকেও '⊃' আর '~' দিয়ে ব্যক্ত করা যথা :

A		$\sim A$	
$A \vee A$	[Idem]	$\sim A \vee \sim A$	[Idem]
$\sim A \supset A$	[Df ⊃, DN]	$A \supset \sim A$	[Df⊃, DN]

১৩. "⊃" ও অন্যান্য যোজক

"⊃" আর অন্যান্য যোজকের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। " . ", "v", " / " আর " ↓ " সম্বন্ধে ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে। কিন্তু "⊃" সম্বন্ধে অনুরূপ কোনো নিয়ম খাটে না। মানে "$p \supset q$" আর "$q \supset p$" সমার্থক নয়।

আবার "⊃" সম্বন্ধে পুনরুক্তির অনুরূপ নিয়মও খাটে না। মানে

"$p \supset p$" আর "p" সমার্থক নয়।

কেন নয়, দেখ। 'p' সত্যও হতে পারে মিথ্যাও হতে পারে, কিন্তু 'p' সত্য হোক কি মিথ্যা হোক "$p \supset p$" মিথ্যা হতে পারে না। পারে না যে, সে বিষয়ে নিশ্চিত হয়ে নাও।

ধরা যাক	$p=1$	ধরা যাক	$p=0$
তাহলে	$p \supset p$	তাহলে	$p \supset p$
	$1 \supset 1$		$0 \supset 0$
	1		1

আবার "⊃" সম্বন্ধে যূথান্তরকরণের অনুরূপ কোনো নিয়মও খাটে না। মানে

"$p \supset (q \supset r)$" আর "$(p \supset q) \supset r$" সমার্থক নয়।

কেন নয়? কি করে বুঝব এরা সমার্থক নয়। উত্তর : দুটি বাক্য যদি সমার্থক হয় তাহলে এদের একটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা হতে পারে না। এখন দুটি প্রদত্ত বাক্যের অঙ্গগুলিতে অভিন্ন সত্যমূল্য বসিয়ে যদি দেখানো যায় যে এদের একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা তাহলে প্রমাণ হয় যে বাক্য দুটি অ-সমার্থক। এ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যাবে উক্ত বাক্য দুটি অসমার্থক।

প্রমাণ :

ধরা যাক $p=0$, $q=0$, $r=0$ তাহলে

$p \supset (q \supset r)$	$(p \supset q) \supset r$
$0 \supset (0 \supset 0)$	$(0 \supset 0) \supset 0$
$0 \supset 1$	$1 \supset 0$
1	0

সুতরাং উক্ত বাক্য দুটি সমার্থক নয়। সুতরাং "⊃" সম্বন্ধে যূথান্তরকরণের অনুরূপ কোনো নিয়ম খাটে না।

১৪. প্রাকল্পিক বাক্যের বিরুদ্ধ

$$“p \supset q” \quad \text{সম} \quad “\sim(p \cdot \sim q)”$$

এখন, যদি এমন হয় যে “ব” equiv. “∼ভ” তাহলে “ব” ও “ভ” পরস্পরের বিরুদ্ধ (৫৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য)। সুতরাং,

$$“p \supset q” \quad \text{বিরুদ্ধ} \quad “p \cdot \sim q”$$

উদাহরণ ঃ

যদি রাম আসে তাহলে শ্যাম আসবে $[R \supset S]$

-এর বিরুদ্ধ হল

রাম এসেছে কিন্তু শ্যাম আসে নি $[R \cdot \sim S]$

ওপরে যা বলা হয়েছে তা এভাবেও বলতে পারতাম—

প্রাকল্পিক বাক্য, '$p \supset q$', মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি পূর্বকল্প 'p' সত্য এবং অনুকল্প 'q' মিথ্যা হয়, মানে “$p \cdot \sim q$” সত্য হয়।

সুতরাং ৫৪ পৃষ্ঠায় “বিরুদ্ধ”-এর যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে সে সংজ্ঞা অনুসারে “$p \supset q$”-এর বিরুদ্ধ হল “$p \cdot \sim q$”।

মনে রাখবে ঃ প্রাকল্পিকের বিরুদ্ধ প্রাকল্পিক বাক্য নয়, সংযৌগিক বাক্য। যথা, “$R \supset S$”-এর বিরুদ্ধ “$R \cdot \sim S$” ; “$R \supset \sim S$” নয়।

১৫. প্রাকল্পিক-শৃঙ্খলের নিষেধ

উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে

$$“\sim(p \supset q)” \quad \text{সম} \quad “p \cdot \sim q”$$

অর্থাৎ প্রাকল্পিক বাক্যের নিষেধ বা বিরুদ্ধ পেতে হলে পূর্বকল্প ও অনুকল্প-নিষেধ নিয়ে সংযৌগিক বাক্য গঠন করতে হয়।

এখন, আমরা এমন প্রাকল্পিক বাক্যের সাক্ষাৎ পেতে পারি যার অনুকল্পটিও প্রাকল্পিক বাক্য ; যথা ঃ $A \supset (B \supset C)$—এ বাক্যের অনুকল্প একটি প্রাকল্পিক বাক্য। এভাবে একাধিক প্রাকল্পিক বাক্য, অঙ্গবাক্য হিসাবে, একই মুখ্য প্রাকল্পিকের অঙ্গীভূত হতে পারে। যথা

$$A \supset \{ B \supset [C \supset (D \supset E)] \} \qquad (১)$$

এরূপ প্রাকল্পিককে প্রাকল্পিক-শৃঙ্খল বলে অভিহিত করতে পারি। উক্ত শৃঙ্খলের প্রথম '⊃'টি মুখ্য যোজক। এ বাক্যে 'A'-এর অনুকল্প “$\{B......)]\}$”, আর এ অঙ্গবাক্যের 'B'-এর অনুকল্প “$[C......)]$”, আর এ শেষোক্ত অঙ্গবাক্যের 'C-'এর অনুকল্প “$(D \supset E)$”। উক্ত বাক্যের 'A' মুখ্য পূর্বকল্প, আর 'B', 'C', 'D' কোনো না কোনো অঙ্গবাক্যের—অনুকল্প-প্রাকল্পিক বাক্যের— পূর্বকল্প। (১)-সংখ্যক বাক্যকে নিষেধ করে পাই

$$A \cdot \sim \{ B \supset [C \supset (D \supset E)] \} \qquad (২)$$

এটা (১)-এর নিষেধ বা বিরুদ্ধ, ঠিক। তবে (২)-এর যে অংশ প্রাকল্পিকের নিষেধ সে অংশকে, '$\sim \{ B \ldots\ldots)] \}$'-কে, আরও সরল করে—এর বৃথানিষেধ চিহ্ন দূর করে, পেতে পারি

$$A \cdot B \cdot \sim [C \supset (D \supset E)] \qquad (৩)$$

আবার (৩)-এর অন্তর্ভুক্ত প্রাকল্পিক-নিষেধকে সরল করে পাই

$$A \cdot B \cdot C \cdot \sim (D \supset E) \qquad (৪)$$

আবার (৪) থেকে অনুরূপভাবে পাই

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \sim E \qquad (৫)$$

বলা বাহুল্য, (৫) হল (১)-এর বিরুদ্ধ।

তবে (১)-আকারের বাক্যের নিষেধ পেতে হলে বিভিন্ন পর্যায়ে "$(p \cdot \sim q)$" আকারের বাক্যকে সরলীকরণ করে অগ্রসর হওয়ার দরকার নেই। কেননা, যুক্তিবিজ্ঞানের একটি নিয়ম অনুসারে

"$p \supset (q \supset r)$" সম "$(p \cdot q) \supset r$"

এ সমার্থতা নিয়মকে বলে পূর্বকল্পগৌরব নিয়ম (Law of Importation)*। এ নিয়ম বারবার প্রয়োগ করে (১)-সংখ্যক বাক্যের সমার্থক পেতে পারি এভাবে—

1. $A \supset \{ B \supset [C \supset (D \supset E)] \}$
2. $(A \cdot B) \supset [C \supset (D \supset E)]$ [1, Impor(tation)]
3. $(A \cdot B \cdot C) \supset (D \supset E)$ [2, Impor.]
4. $(A \cdot B \cdot C \cdot D) \supset E$ [3, Impor.]

আর সর্বশেষ বাক্যটিকে নিষেধ করে পাই

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \sim E$$

এখন (1)-আকারের বাক্যের নিষেধ পেতে হলে একে প্রথমে, পূর্বকল্পগৌরবের নিয়ম প্রয়োগ করে, (4)-আকারের বাক্যে রূপান্তরিত করারও দরকার নেই ; আরও সরাসরি (1)-আকারের বাক্যের নিষেধ পেতে পারি। পারি, নিম্নোক্ত নিয়মটি প্রয়োগ করে।

> প্রাকল্পিক-শৃঙ্খলের নিষেধ পেতে হলে—
> মুখ্য পূর্বকল্প ও প্রত্যেকটি পরবর্তী মুখ্য প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প নিয়ে ও সর্বশেষ অনুকল্পের নিষেধ নিয়ে সংযৌগিক বাক্য গঠন করতে হয়।

* এ সূত্রের বাম দিক থেকে ডান দিকে গেলে—পূর্বকল্পগৌরব। আর ডান ধার থেকে বাম ধারে গেলে—মানে '$(p \cdot q) \supset r$'-এর পরিবর্তে এর সমার্থক '$p \supset (q \supset r)$' লিখলে—যে নিয়ম প্রয়োগ করা হয় তাকে বলে পূর্বকল্পলাঘব (Exportation)-এর নিয়ম। তবে উক্ত সূত্রটিকে সাধারণত **Exportation** বলেই উল্লেখ করা হয়।

এখানে "মুখ্য পূর্বকল্প" মানে—বৃহত্তম পরিধির '⊃'-দিয়ে-যুক্ত পূর্বকল্প। "পরবর্তী মুখ্য প্রাকল্পিক" বলতে বুঝছি : মুখ্য পূর্বকল্প ও তার যোজকটি বাদ দিলে যে প্রাকল্পিক থাকে —যে '⊃' এখন মুখ্যযোজক—তার পূর্বকল্প। যথা

$$A \supset \{B \supset [C \supset (D \supset E)]\}$$

-এর মুখ্য পূর্বকল্প 'A'। এর পরবর্তী মুখ্য প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প 'B'। 'B' বাদ দিলে যা থাকে তা পরবর্তী মুখ্য প্রাকল্পিক ; এর পূর্বকল্প 'C'।

সরাসরি উপরোক্ত নিয়ম প্রয়োগ করে কি করে প্রাকল্পিক-শৃঙ্খলের নিষেধ পাওয়া যায় তা দেখানো হল।

উদাহরণ ১

$$A \supset [(B \supset C) \supset (C \vee \sim B)]$$

এ বাক্যকে নিষেধ করে পাই

$$A \cdot (B \supset C) \cdot \sim(C \vee \sim B)$$

বা $A \cdot (B \supset C) \cdot \sim C \cdot B$

লক্ষণীয়, এখানে '$B \supset C$' অবিকৃত রাখতে হবে, এর পূর্বকল্প 'B'-কে পৃথক করে নেওয়া চলবে না। কেননা মুখ্য পূর্বকল্প 'A' ও এর যোজক (প্রথম '⊃') বাদ দিলে যে প্রাকল্পিক থাকে তার মুখ্য যোজক মূল বাক্যের তৃতীয় '⊃' এবং এ যোজক দিয়ে যোজিত পূর্বকল্প হল '$B \supset C$', 'B' নয়।

উদাহরণ ২

$$(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$$

এ বাক্যকে নিষেধ করে পাই

$$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(A \supset C)$$

বা $(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot A \cdot \sim C$

এখানে '$A \supset B$' আর '$B \supset C$' অবিকৃত থাকল। কেননা '$A \supset B$' মুখ্য পূর্বকল্প। আর পরবর্তী মুখ্য প্রাকল্পিকের —'$(B \supset C) \supset (A \supset C)$'-এর পূর্বকল্প হল '$B \supset C$'।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি "$\sim$" আর "$\supset$" দিয়ে ব্যক্ত কর :

(i) $A \cdot (\sim B \vee C)$ (v) $\sim p \cdot q \cdot r$

(ii) $A \vee (\sim B \cdot C)$ (vi) $\sim p \vee q \vee r$

(iii) $\sim(A \cdot B \cdot \sim C)$ (vii) $\sim(A \vee B \vee \sim C)$

(iv) $\sim A \mid B$ (viii) $A \downarrow \sim B$

২. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$\sim$" আর "$\cdot$" দিয়ে ব্যক্ত কর :

(i) $A \supset (B \supset C)$ (v) $(p \cdot q) \supset r$

(ii) $(A \supset \sim B) \vee C$ (vi) $(p \vee q) \supset r$

(iii) $(A \supset \sim B) \supset C$ (vii) $(p \cdot q) \supset (p \vee r)$

(iv) $A \mid \sim B$ (viii) $\sim A \downarrow B$

৩. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$\sim$" আর "v" দিয়ে ব্যক্ত কর :

(i) $A \supset (\sim B \supset C)$ (iv) $(p \cdot q) \supset \sim(\sim p \cdot \sim q)$

(ii) $(A \cdot \sim B) \supset C$ (v) $p \cdot [q \supset (r \vee s)]$

(iii) $(A \cdot \sim B) \supset (\sim B \supset C)$ (vi) $[(p \supset q) \cdot (\sim p \supset r)] \supset (q \vee r)$

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$\sim$" আর "$\downarrow$" দিয়ে ব্যক্ত কর :

(i) $A \supset B$ (v) $A \supset (B \supset C)$

(ii) $A \vee \sim B$ (vi) $(A \cdot B) \supset C$

(iii) $\sim(A \supset \sim B)$ (vii) $(A \cdot B) \supset (A \vee B)$

(iv) $\sim A \mid \sim B$ (viii) A

৫. নিম্নোক্ত বাক্য দুটিকে সংযৌগিক, বৈকল্পিক, প্রাতিকল্পিক ও প্রাকল্পিক বাক্যের আকারে ব্যক্ত কর :

$$A, \quad \sim A$$

৬. $\sim$ ($\sim$Mackie murdered the minister $\cdot$ $\sim$Guilford is guilty) উপরোক্ত বাক্যটিকে "If—then—" দিয়ে ব্যক্ত কর, তারপর "only if" দিয়ে, "unless" দিয়ে, "or" দিয়ে এবং সর্বশেষে "neither nor" দিয়ে ব্যক্ত কর। (কোয়াইন্ অনুসরণে)

৭. প্রাকল্পিক বাক্যের একটি উদাহরণ নিয়ে দেখাও যে নিম্নোক্ত উক্তিটি সত্য :

The contrapositive is the converse of its inverse as also the inverse of its converse. (Tarski)

৮. বলা হয়েছে যে

If one has succeeded in proving a conditional proposition and also its converse then special proofs for the other conjugates are superfluous. (Tarski)

কেন ? কোন্ নিয়মের বলে ?

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির অনুবন্ধী (conjugate) বাক্য দাও :

If today is Sunday then tomorrow is Monday.
If it rains then the ground is wet.

অনুবন্ধীগুলির কোনটি সত্য, কোন্‌টি মিথ্যা ?
এমন চারটি অনুবন্ধী বাক্য উল্লেখ কর যার সব কয়টি সত্য ?

১০. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যমূল্য নির্ণয় কর :

(১) If today is Sunday, tomorrow is Monday.

(২) If today is Sunday, tomorrow is Tuesday.

(৩) If today is Sunday, tomorrow is Wednesday.
(সোমবারে উচ্চারিত)

(৪) If today is Sunday, tomorrow is the 1st January.
(ঐ)

১১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকারে রূপান্তরিত কর :

(১) If A does not come unless B does, nor B does unless C does then C comes if A does.

(২) If A comes whenever B comes then C comes except when B fails to come.

(৩) A does not come unless C comes, while B comes whether or not C comes.

(৪) The condition A is present is necessary for B to be present.

(৫) For A to be B it is sufficient that A is C and C is B.

(৬) Cancer is incurable only if it causes death of every victim.

(৭) Had the police arrived in time the criminal could have beeen apprehended.

১২. Is the condition

$$X \cdot Y > 4$$

necessary or sufficient for the truth of

$$X > 2 \ \& \ Y > 2 \ ?$$ (Tarski)

১৩. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বিরুদ্ধ বাক্য দাও ঃ

(১) If I sing then I sing.

(২) If I sing then I do not sing.

(৩) If I play then if I play, I sing.
(বিরুদ্ধ বাক্যগুলির সরলতম রূপ দাও ।)

১৪. নিম্নোক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য কী ?

We shall play if it rains.
We shall play even if it rains.

১৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি থেকে বৃথনিষেধ চিহ্ন দূর করে এদের সমার্থক দাও ঃ

(১) $\sim[(A \supset B) \supset (C \supset D)]$ (৪) $\sim[(A \supset \sim B) \supset (B \supset A)]$

(২) $\sim[(A \supset B) \cdot C \cdot D]$ (৫) $\sim[\sim(\sim A \supset B) \supset \sim(\sim B \supset A)]$

(৩) $\sim[(A \supset B) \vee C \vee D]$ (৬) $\sim[(\sim A \supset B) \vee \sim(\sim B \supset A)]$

১৬. যদি 'A', 'B', 'C' সত্য আর 'D', 'E', 'F' মিথ্যা হয় তাহলে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টি সত্য কোন্‌টি মিথ্যা ?

(i) $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \cdot B) \supset D]$

(ii) $[D \supset (E \supset F)] \supset [(D \cdot E) \supset F]$

(iii) $[A \supset (D \supset E)] \supset [(A \vee D) \supset E]$

(vi) $[A \supset (D \supset E)] \supset [(A \supset D) \supset E]$

(v) $[(D \supset A) \supset F] \supset [(A \supset B) \supset C]$

১৭. মনে কর Allen votes=1, Betty votes=0, Carroll votes=0। তাহলে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টির সত্যমূল্য কী ?

(i) If Allen votes then Betty also does unless Carroll votes.

(ii) Betty votes if Allen does unless Carroll votes.

(iii) Unless Carroll votes Allen votes if Betty does.

১৮. 'A', 'B'তে সকল সম্ভাব্য সত্যমূল্য বসিয়ে দেখাও যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি মিথ্যা হতে পারে না ঃ

$[(A \supset B) \cdot A] \supset B$ $(A \cdot B) \supset B$

$[(A \supset B \cdot \sim B] \supset \sim A$ $A \supset (A \vee B)$

["$A \supset (A \vee B)$" যে মিথ্যা হতে পারে না তা দেখিয়ে দেওয়া হল ।]

$A=1,\ B=1$	$A=1,\ B=0$	$A=0,\ B=1$	$A=0,\ B=0$
$A \supset (A \vee B)$	$A \supset (A \vee B)$	$A \supset (A \vee B)$	$A \supset (A \vee B)$
$1 \supset (1 \vee 1)$	$1 \supset (1 \vee 0)$	$0 \supset (0 \vee 1)$	$0 \supset (0 \vee 0)$
$1 \supset 1$	$1 \supset 1$	$0 \supset 1$	$0 \supset 0$
1	1	1	1

১৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকার দাও ঃ

(a) *A* on the condition that *B*

(b) *B* unless *A*

(c) Assuming *A*, *B*

(d) The condition that *A* is both necessary and sufficient for *B*

(e) Neither *B* nor *A* only if *B* and *A*

(f) On the condition that *A*, not *B* only if *A* then *B*.

—Carnap

২০. মনে কর নিম্নোক্ত বাক্য দুটি সত্য।

$A \supset B \qquad \sim A \supset \sim B$

এখানে '*A*'কে '*B*'-এর পর্যাপ্ত সর্ত বলবে না আবশ্যিক সর্ত বলবে, না আর কিছু বলবে ?

২১. নিম্নোক্ত বাক্য দুটি কি সমার্থক ? যদি সমার্থক না হয় তাহলে এদের পার্থক্য কোথায় ?

যদিও বৃষ্টি হচ্ছে তাহলেও খেলা হবে।

যদি বৃষ্টি হয় তাহলেও খেলা হবে।

৭

দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য

১. "—যদি এবং কেবল যদি—" : দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য

সাধারণ ভাষায় আমরা দু আকারের প্রাকল্পিক বাক্যের সাক্ষাৎ পাই

(১) If p then q (২) q, only if p
যদি প তাহলে ফ   ফ, কেবল যদি প

এ দুটি বাক্যকে যুক্ত করে আরও এক প্রকারের বাক্য গঠন করা হয় :

q, if and only if p
ফ, যদি এবং কেবল যদি প*

উদাহরণ

This is a triangle if and only if it is a three-sided plane figure
রাম চিন্তাশীল প্রাণী যদি এবং কেবল যদি রাম মানুষ হয়**

"If–then—" একটি যোজক, "only if" আর একটি যোজক। এ দুটি যোজককে একত্রিত করে আর একটি পৃথক যোজক গঠন করা হয় : if and only if। এখন, দুটি বাক্য "—if and only if—", "–যদি এবং কেবল যদি–" বা এদের সমার্থক কোনো যোজকের দ্বারা যুক্ত হলে যে যৌগিক বাক্য গঠিত হয় তাকে বলে দ্বিপ্রাকল্পিক (biconditional) বাক্য—বচন বা অপেক্ষক। ওপরে দ্বিপ্রাকল্পিকের উদাহরণ দেওয়া হয়েছে। এ জাতীয় বাক্যকে দ্বিপ্রাকল্পিক কেন বলে তা সহজেই বোঝা যায়।

If p then p q only if p
[যদি প তাহলে ফ]   [ফ, কেবল যদি প]

এদের সংযুক্ত করে পাই

q if and only if p
[ফ, যদি এবং কেবল যদি প]

কি করে পাই দেখ। "If p then q"-এর বদলে লিখতে পারি : q if p। এখন

q if p [ফ, যদি প]
q only if p [ফ, কেবল যদি প]

---

* অথবা, "যদি প তাহলে এবং কেবল তাহলে ফ"।

** অথবা : যদি রাম মানুষ হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে রাম চিন্তাশীল প্রাণী।

এদের "and" ("এবং") দিয়ে সংযুক্ত করে পাওয়া যায়

q if and only if p *[ফ যদি এবং কেবল যদি প]*

দুটি প্রাকল্পিক বাক্য সংযুক্ত করে বাক্য গঠন করা হয় বলে উক্ত আকারের বাক্যকে দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য বলে। আমরা দেখলাম

$$q \text{ if and only if } p = q, \text{ if } p \ \& \ q \text{ only if } p$$

আর আমরা জানি–

$$q \text{ if } p = p \supset q, \quad q \text{ only if } p = \sim p \supset \sim q = q \supset p$$

$$\therefore \quad q \text{ if and only if } p = (p \supset q) \cdot (q \supset p)$$

$$= (p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)$$

নব্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা "—if and only if—" †("—যদি এবং কেবল যদি—") –এ যোজকটির সংক্ষেপক হিসাবে " $\equiv$ " চিহ্নটি ব্যবহার করেন। এ চিহ্নটির নাম triple bar, ত্রিবলি বা ত্রিরেখ। যথা, নব্যরা

This is a triangle if and only if it is a three-sided plane figure

এ উক্তি এভাবে ব্যক্ত করবেন

This is a triangle $\equiv$ This is a three-sided plane figure

আমরা দেখলাম প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে

$$q \text{ if and only if } p = p \equiv q$$

"$p \equiv q$" হল দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের আদর্শ আকার। "*q* if and only if *p*"-এর বক্তব্য :

$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$ বা $(p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)$। কাজেই

(১) $(p \supset q) \cdot (q \supset p)$ (২) $(p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)$

-এর পরিবর্তে সরাসরি লেখা যায়

$$p \equiv q$$

কেবল "$p \equiv q$" আকারের বাক্যই নয়, (১), (২) আকারের বাক্যও দ্বিপ্রাকল্পিক বলে অভিহিত হতে পারে। তবে মনে রাখতে হবে, যেকোনো দুটি প্রাকল্পিক বাক্যের সংযোগই দ্বিপ্রাকল্পিক বলে গণ্য নয়। যথা

(*i*) $(p \supset q) \cdot (\sim q \supset \sim p)$ (*ii*) $(q \supset p) \cdot (\sim p \supset \sim q)$

এ সব দ্বিপ্রাকল্পিক নয়, সেজন্য এদের " $\equiv$ " দিয়ে সংক্ষেপিত করা যায় না। কেননা, এরূপ সংযৌগিকের দুটি অঙ্গ সমার্থক (ব্যাবর্তনের সূত্র অনুসারে), কাজেই এরূপ বাক্যে দুটি পৃথক প্রাকল্পিক নেই। বলা যায়, এখানে প্রথম বাক্যটির বক্তব্য : $p \supset q$, আর দ্বিতীয়টির $q \supset p$। মনে রাখতে হবে, যে প্রাকল্পিকের সংযোগকে

(1) $(p \supset q) \cdot (q \supset p)$ বা (2) $(p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)$

আকারে রূপান্তরিত করা যায় সে সংযৌগিকই দ্বিপ্রাকল্পিক বলে গণ্য। কাজেই

$(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q)$ $(q \supset p) \cdot (q \supset \sim p)$

† কেউ কেউ এ প্রতীকটির বদলে লেখেন "iff"

এ জাতীয় বাক্য দ্বিপ্রাকল্পিক বলে গণ্য নয়। মনে রাখার দরকার—যদি কোনো সংযৌগিক বাক্যের দুটি সংযোগীই প্রাকল্পিক হয় তাহলে :

(১) যদি প্রাকল্পিক দুটির মধ্যে কেবল পূর্বকল্প ও অনুকল্পের ক্রমের ভেদ থাকে, অথবা

(২) যদি প্রাকল্পিক দুটির (আণবিক) অঙ্গগুলির ক্রম অভিন্ন থাকে, কিন্তু একটি প্রাকল্পিকে যে যে অঙ্গবাক্য বাক্য আছে অন্য প্রাকল্পিকে সে সে বাক্যের নিষেধ থাকে

তাহলে সংযৌগিক বাক্যটি দ্বিপ্রাকল্পিক বলে গণ্য।

২. দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যকে আদর্শ আকারে রূপান্তরিত করা

আমরা জানি

q if and only if $p = (p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)$ (১)

$p \supset q = p$ is the sufficient condition of q

$\sim p \supset \sim q = p$ is the necessary condition of q

$\therefore$ q if and only if $p = p$ is the sufficient-and-necessary condition* of q

আবার

q if and only if $p = (p \supset q) \cdot (q \supset p)$ (২)

$p \supset q = p$ is the sufficient condition of q

$q \supset p = q$ is the sufficient condition of p

$\therefore$ q if and only if $p = p$ is the sufficient condition of q and q is the sufficient condition of p

আবার

q if and only if $p = (\sim p \supset \sim q) \cdot (\sim q \supset \sim p)$

[(২) ক্রমান্তরকরণ, ব্যাবর্তন]

$\sim p \supset \sim q = p$ is the necessary condition of q

$\sim q \supset \sim p = q$ is the necessary condition of p

$\therefore$ q if and only if $p = p$ is the necessary condition of q and q is the necessary condition of p

তাহলে মনে রাখতে হবে

q if and only if p

q is the sufficient-and-necessary condition of p

p is the sufficient condition of q and q is the sufficient condition of p

p is the necessary condition of q and q is the necessary condition of p

* পর্যাপ্ত-আবশ্যিক সর্ত

এ জাতীয় প্রত্যেকটি বাক্যকে নিম্নোক্ত আকারে রূপান্তরিত করতে হবে :

$$p \equiv q$$

৩. দ্বিপ্রাকল্পিকের সত্যসারণী

"$p \equiv q$" মানে : $(p \supset q) \cdot (q \supset p)$

বা, $(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)$ [Df ⊃]

বা, $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(q \cdot \sim p)$ [DM, DN]

বা, $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot q)$ [Com.]

বা, 'p'-সত্য-'q'-মিথ্যা নয়, · 'p'-মিথ্যা-'q'-সত্য নয়

বা, $\sim(q \cdot \sim p) \cdot \sim(\sim q \cdot p)$ [Com.]

বা, 'q'-সত্য-'p'-মিথ্যা নয় · 'q'-মিথ্যা-'p'-সত্য নয়

বা, এমন নয় যে 'p', 'q'-এর একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা

এর থেকে বোঝা যায় যে

'p', 'q'-এর একটি সত্য, অন্যটি মিথ্যা হলে "$p \equiv q$" মিথ্যা ।

নিচে এ উক্তির সত্যতা প্রমাণ করা হল ।

ধরা যাক, $p = 1, q = 0$

$p \equiv q$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
$(1 \supset 0) \cdot (0 \supset 1)$
$0 \cdot 1$
0

ধরা যাক, $p = 0, q = 1$

$p \equiv q$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
$(0 \supset 1) \cdot (1 \supset 0)$
$1 \cdot 0$
0

আমরা দেখেছি

"$p \equiv q$"-এর বক্তব্য হল : এমন নয় যে 'p', 'q'-এদের একটি সত্য, অন্যটি মিথ্যা । এখন "একটি-সত্য-অন্যটি-মিথ্যা না হওয়া" মানে : দুটিই সত্য হওয়া, বা দুটিই মিথ্যা হওয়া । কাজেই বলতে পারি

"$p \equiv q$"-এর বক্তব্য হল : 'p', 'q'—এদের উভয়ই সত্য, অথবা উভয়ই মিথ্যা ।

এর থেকে বোঝা যাবে

'p', 'q'—এদের দুটিই সত্য হলে অথবা দুটিই মিথ্যা হলে "$p \equiv q$" সত্য ।

(লক্ষণীয়, যে দ্বিপ্রাকল্পিকের দুটি অঙ্গই মিথ্যা সে দ্বিপ্রাকল্পিকও সত্য ।)

নিচে উপরোক্ত উক্তির সত্যতা প্রমাণ করা হল ।

ধরা যাক, $p = 1, q = 1$, তাহলে

$p \equiv q$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
$(1 \supset 1) \cdot (1 \supset 1)$
$1 \cdot 1$
1

ধরা যাক, $p = 0, q = 0$; তাহলে

$p \equiv q$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
$(0 \supset 0) \cdot (0 \supset 0)$
$1 \cdot 1$
1

দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব সম্বন্ধে যা বলা হল তা ব্যক্ত করা যায় এভাবে সমীকরণের বা নামতার আকারে

$$1 \equiv 1 = 1 \qquad 1 \equiv 0 = 0 \qquad 0 \equiv 1 = 0 \qquad 0 \equiv 0 = 1$$

বা নিম্নোক্ত সত্যসারণীর আকারে

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

৪. "—যদি এবং কেবল যদি—" : সাধারণ ভাষায় ও যুক্তিবিজ্ঞানে

উপরোক্ত নামতায় বা সত্যসারণীতে "≡"-এর যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে সে সংজ্ঞা অনুসারে : যে দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের উভয় অঙ্গের সত্যমূল্য অভিন্ন সে বাক্য সত্য। এর থেকে বোঝা যাবে

যে কোনো দুটি মিথ্যা বাক্য নিয়ে দ্বিপ্রাকল্পিক গঠন করলে

গঠিত বাক্যটি সত্য হবে (কেননা সব মিথ্যা বাক্যেরই সত্যমূল্য অভিন্ন : 0)

যে কোনো দুটি সত্য বাক্য নিয়ে দ্বিপ্রাকল্পিক গঠন করলে

গঠিত বাক্যটি সত্য হবে (কেননা সব সত্য বাক্যেরই সত্যমূল্য অভিন্ন : 1)

উদাহরণ :

(১) ২+২=৫ যদি এবং কেবল যদি ২+৩=৬ হয়

এ বাক্যটি সত্য, কেননা এর দুটি অঙ্গই মিথ্যা। আবার

(১) ২+২=৪ যদি এবং কেবল যদি কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয় ভবন কলকাতায় অবস্থিত হয়

এ বাক্যটিও সত্য, কেননা এর দুটি অঙ্গই সত্য।

(১), (২) বা এ জাতীয় বাক্য—যে বাক্যের অঙ্গ দুটির মধ্যে প্রাসঙ্গিকতার সম্পর্ক নেই—সত্য, এ দাবী অত্যন্ত উদ্ভট ও আজগুবী বলে মনে হয়। অথচ "—যদি এবং কেবল যদি—"-এর যে সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে সে সংজ্ঞা অনুসারে বাক্যগুলি যে সত্য বলে গণ্য তা অস্বীকার করার উপায় নেই।

আসলে সাধারণ ভাষায় "—যদি এবং কেবল যদি—" যে অর্থে ব্যবহৃত হয় তার সঙ্গে "≡"-এর অর্থের, বা যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত "—যদি এবং কেবল যদি—"র অর্থের, গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। সাধারণ ভাষায়

ফ যদি এবং কেবল যদি প : এ বাক্যের বক্তব্য হল—

'প', 'ফ'-এর মধ্যে এমন ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ বর্তমান যে এদের একটি সত্য হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য, একটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা হতে পারে না ; মানে এমন হতে পারে না যে এদের একটি সত্য অন্যটি মিথ্যা।

আর যুক্তিবিজ্ঞানীরা "—যদি এবং কেবল যদি—" বা "≡"-এর যে সংজ্ঞা দেন সে অনুসারে

ফ যদি এবং কেবল যদি প ঃ এ বাক্যের বক্তব্য হল—

'প', 'ফ'—এদের উভয়ই বস্তুত সত্য, অথবা উভয়ই বস্তুত মিথ্যা ; মানে **এমন নয়** যে এদের একটি সত্য, অন্যটি মিথ্যা।

লক্ষণীয়, সাধারণ ভাষায় "—যদি এবং কেবল যদি—" যে অর্থে ব্যবহৃত হয় যুক্তিবিজ্ঞানীরা এ যোজকটিকে, বা "≡"কে, তার চেয়ে দুর্বল অর্থে ব্যবহার করেন। এ প্রসঙ্গে অধ্যায় ৬ বিভাগ ৭ দ্রষ্টব্য। ওখানে আমরা সাধারণ ভাষার "যদি—তাহলে—" আর যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত "যদি—তাহলে—" (বা "⊃")-এর পার্থক্য আলোচনা করেছি। সাধারণ ভাষার "—যদি এবং কেবল যদি—" আর যুক্তিবিজ্ঞানের "যদিও ও কেবল যদি"র (বা '≡'-এর) মধ্যেও অনুরূপ পার্থক্য। আর এ রকম হওয়ারই কথা। কেননা "≡"-এর একটি সংজ্ঞা দেওয়া হয় "⊃" (আর "·") দিয়ে।

৫. দুটি সংজ্ঞা বা লিপ্যন্তরের সূত্র

"≡" প্রসঙ্গে দুটি সূত্র বিশেষভাবে মনে রাখার দরকার।

$$\text{“}p \equiv q\text{”} \text{ সম } \text{“}(p \supset q) \cdot (q \supset p)\text{”}$$

এটি "$p \equiv q$"-এর সংজ্ঞা বলে গণ্য। তারপর আমরা দেখেছি যে

"$p \equiv q$"-এর বক্তব্য হল ঃ 'p', 'q'-এদের উভয়ই সত্য অথবা উভয়ই মিথ্যা।

এ কথাটা সমার্থতা সূত্রের আকারে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

$$\text{“}p \equiv q\text{”} \text{ সম } \text{“}(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$$

এটিও লিপ্যন্তরের সূত্র। উক্ত সূত্র দুটিকে "Df≡" নামে চিহ্নিত করতে পারি। এদের গুরুত্বের কথা বিবেচনা করে সূত্র দুটির পুনরাবৃত্তি করা হল

Df≡

$$\text{“}p \equiv q\text{”} \text{ সম } \text{“}(p \supset q) \cdot (q \supset p)\text{”}$$

$$\text{“}p \equiv q\text{”} \text{ সম } \text{“}(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)\text{”}$$

৬. "≡", ক্রমান্তরকরণ, যূথ্যন্তরকরণ

প্রশ্ন ঃ এ কথা কি বলা যায় যে

$$\text{“}p \equiv p\text{”} \text{ সম } \text{“}p\text{”} ?$$

উত্তর ঃ না, যায় না। কেননা এমন হতে পারে যে 'p' সত্য, এমনও হতে পারে যে 'p' মিথ্যা। কিন্তু "$p \equiv p$" মিথ্যা হতে পারে না। কেন পারে না, দেখ।

মনে কর, $p=1$; তাহলে	মনে কর, $p=0$; তাহলে
$p \equiv p$	$p \equiv p$
$1 \equiv 1$	$0 \equiv 0$
1	1

এর থেকে বোঝা যায় "$\equiv$" সম্বন্ধে পুনরুক্তির অনুরূপ কোনো নিয়ম খাটে না। কিন্তু

$$"p \equiv q" \text{ সম } "q \equiv p"$$

একে "$\equiv$" সংক্রান্ত ক্রমান্তরকরণের নিয়ম বলে অভিহিত করতে পারি। আবার

$$"p \equiv (q \equiv r)" \text{ সম } "(p \equiv q) \equiv r"$$

এটি "$\equiv$" সংক্রান্ত যূথান্তরকরণের নিয়ম বলে অভিহিত হতে পারে।

৭. দ্বিপ্রাকল্পিকের বিরুদ্ধ

দেখা যাবে যে "$p \equiv q$" আর "$p \vee q$" পরস্পরের বিরুদ্ধ। "$p \vee q$"কে আমরা বিষমমান বাক্য বলে অভিহিত করেছি, এর বিরুদ্ধ "$p \equiv q$"-কে সমমান বলে অভিহিত করা যেত। এখন

(বিষমমান) "$p \vee q$"-এর দাবী : 'p', 'q'—এদের সত্যমূল্য ভিন্ন

(সমমান) "$p \equiv q$"-এর দাবী : 'p', 'q'—এদের সত্যমূল্য অভিন্ন।

আবার

"$p \vee q$"-এর বক্তব্য : 'p' 'q'-এর উভয়ই সত্য নয় এবং উভয়ই মিথ্যা নয়

$$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim p)$$

"$p \equiv q$"-এর বক্তব্য : 'p', 'q'-এর উভয়ই সত্য অথবা উভয়ই মিথ্যা।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে এটা বুঝতে পারার কথা যে "$p \equiv q$" আর "$p \vee q$" পরস্পরের বিরুদ্ধ বাক্য। এরা যে বিরুদ্ধ তা আরো বিশদভাবে দেখানো হল।

$p \equiv q$	1.
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$	2. [1, Df$\equiv$]
$\sim[\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)]$	3. [2, DM]
$\sim[p \vee q]$	4. [3-এতে "[ ]"-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যের পরিবর্তে এর সমার্থক "$p \vee q$" বসিয়ে]

$\therefore$ "$p \equiv q$" সম "$\sim(p \vee q)$"

[ব] [$\sim$ভ]

এখন, যদি এমন হয় যে "ব" সম "$\sim$ভ" তাহলে "ব" ও "ভ" পরস্পর বিরুদ্ধ (৫৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য)। সুতরাং

"$p \equiv q$" বিরুদ্ধ "$p \vee q$" (১)

আবার, কোনো বাক্যের পূর্বে নিষেধের চিহ্ন যুক্ত করলেই বাক্যটির বিরুদ্ধ বাক্য পাওয়া যায়।

"$p \equiv q$" বিরুদ্ধ "$\sim(p \equiv q)$" (২)

এখন, কোনো বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্যগুলি পরস্পর সমার্থক, মানে যদি ভ১, ভ২, ভ৩ ব-এর বিরুদ্ধ হয় তাহলে ভ১, ভ২, ভ৩ পরস্পর সমার্থক। সুতরাং (১) ও (২) থেকে পাই

"$p \vee q$" সম "$\sim(p \equiv q)$"

প্রসঙ্গত, আবার দেখা গেল "V" বলে একটি স্বতন্ত্র যোজক মানবার দরকার নেই। "$p \vee q$"-এর বদলে লিখতে পারি "$\sim(p \equiv q)$"। অবশ্য "$\equiv$" বলেও কোনো পৃথক যোজক মানবার দরকার হয় না। যা "$\equiv$" দিয়ে ব্যক্ত করা হয় তা "$\cdot$", "$\sim$", "v" ইত্যাদি দিয়ে ব্যক্ত করা যায়।

৮. "≡" ও চেউর সঞ্চালন

এখানে "$p \equiv q$"-এর নিষেধের একটা বৈশিষ্ট্য উল্লেখ করব। দেখা যাবে "$\sim(p \equiv q)$"-এর ঘূর্ণনিষেধ চিহ্নটি তুলে নিয়ে যে কোনো অঙ্গের সঙ্গে যুক্ত করা যায়। "করা যায়" মানে—এভাবে যে বাক্য গঠিত হয় তা মূল বাক্যের সমার্থক। তার মানে, দেখা যাবে,

"$\sim(p \equiv q)$" সম "$p \equiv \sim q$" (1)

"$\sim(p \equiv q)$" সম "$\sim p \equiv q$" (2)

তাহলে কোনো দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যকে নিষেধ করতে হলে, এর বিরুদ্ধ পেতে হলে, যে কোনো একটি অঙ্গকে নিষেধ করলেই চলে, যথা, "$A \equiv B$"-এর বিরুদ্ধ কী? এ প্রশ্নের উত্তরে সরাসরি বলতে পারি ঃ $A \equiv \sim B$। নিচে (1) ও (2)-এর যাথার্থ্য দেখানো হল।

(1)			(2)		
$\sim(p \equiv q)$	1.		$\sim(p \equiv q)$	1.	
$\sim[(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$	2.	[2, Df ≡]	… … … …		
$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$	3.	[2, DM]	… … … …		
$(\sim p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$	4.	[3, DM, DN]	… … … …		
$(\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim\sim p \vee q)$	5.	[4, DN]	… … … …		
$(p \supset \sim q) \cdot (\sim p \supset q)$	6.	[5, Df ⊃]	… … … …		
$(p \supset \sim q) \cdot (\sim q \supset p)$	7.	[6, Trans*., DN]	$(p \supset \sim q) \cdot (\sim q \supset p)$	7.	
$p \equiv \sim q$	8.	[7, Df]≡	$(q \supset \sim p) \cdot (\sim p \supset q)$	8.	[7, Trans, DN]
			$q \equiv \sim p$	9.	[8, Df ≡]
∴ "$\sim(p \equiv q)$" সম "$p \equiv \sim q$"			$\sim p \equiv q$	10.	["≡" সংক্রান্ত ক্রমান্তরকরণ]
			∴ "$\sim(p \equiv q)$" সম "$\sim p \equiv q$"।		

দ্বিপ্রাকল্পিকের নিষেধের সঙ্গে অন্যান্য বাক্যের নিষেধের পার্থক্য লক্ষণীয়।

সংযৌগিককে নিষেধ করে পাই বৈকল্পিক, যথা $\sim(A \cdot B)$ থেকে ঃ $\sim A \vee \sim B$

বৈকল্পিককে ও প্রাকল্পিককে নিষেধ করে পাই

সংযৌগিক, যথা $\sim(A \vee B)$ থেকে ঃ $\sim A \cdot \sim B$

$(A \supset B)$ থেকে ঃ $A \cdot \sim B$

কিন্তু দ্বিপ্রাকল্পিককে নিষেধ করে দ্বিপ্রাকল্পিকই পেতে পারি,

যথা $\sim(A \equiv B)$ থেকে ঃ $A \equiv \sim B$

---

* Transposition, ব্যাবর্তন

অনুশীলনী

১. (i) $A \equiv (\sim B \cdot C)$ (iii) $\sim[A \equiv (B \cdot \sim C)]$
(ii) $A \equiv (B \vee \sim C)$ (iv) $(A \vee B) \equiv \sim C$

এ বাক্যগুলিকে (১) "$\sim$", "$\cdot$" দিয়ে
(২) "$\sim$", "$\vee$" দিয়ে
(৩) "$\sim$", "$\supset$" দিয়ে
(৪) "$\sim$", "$\downarrow$" দিয়ে

ব্যক্ত কর।

২. যুগ্মনিষেধ চিহ্ন দূর করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সমার্থক দাও :

(i) $\sim(\sim A \equiv B)$ (iv) $\sim[(A \equiv B) \vee (B \equiv A)]$
(ii) $\sim[A \equiv (B \cdot \sim C)]$ (v) $\sim[(\sim A \supset \sim B) \equiv (B \supset A)]$
(iii) $\sim[A \cdot (B \equiv \sim C)]$ (vi) $\sim[(\sim A \vee B) \equiv \sim(\sim A \cdot B)]$

৩. যুগ্মনিষেধ চিহ্ন ব্যবহার না করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বিরুদ্ধ বাক্য দাও :

(i) $A \equiv (B \vee C)$ (iii) $(A \supset B) \equiv (\sim B \supset \sim A)$
(ii) $(A \vee B) \equiv C$ (iv) $(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)$

৪. 'A', 'B', 'C'-তে সব সম্ভাব্য সত্যমূল্য বসিয়ে দেখাও যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি মিথ্যা হতে পারে না।

$[(A \equiv B) \cdot A] \supset B$ $[(A \equiv B) \cdot \sim A] \supset \sim B$
$[(A \equiv B) \cdot \sim B] \supset \sim A$ $[(A \equiv B) \cdot B] \supset A$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সংক্ষিপ্ততম সমার্থক দাও :

$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot (B \supset A) \cdot (\sim B \vee C)$
$(A \cdot B) \vee (B \cdot C) \vee (\sim A \cdot \sim B) \vee \sim(B \supset \sim C)$

৬. নিম্নোক্ত বাক্যটির অন্তত ছয়টি সমার্থক দাও :

$\sim A \equiv B$

৭. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যমূল্য নির্ণয় কর :

(১) "$A \equiv B$" সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "$A \supset B$" ও এর সব অনুবন্ধী (conjugate) বাক্য সত্য হয়।
(২) "$A \equiv B$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "$A \supset B$" ও এর সকল অনুবন্ধী বাক্য মিথ্যা হয়।
(৩) "$A \equiv B$" মিথ্যা হতে পারে যদি "$A \supset B$" বা এর কোনো অনুবন্ধী বাক্য মিথ্যা হয়।

৮. "$A \equiv B$"-এর সত্যতা প্রমাণ করতে হলে প্রমাণ করার দরকার যে (১) "$A \supset B$" সত্য, আবার (২) "$B \supset A$"ও সত্য। এদের মধ্যে

(i) কোন্ প্রমাণে দেখানো হয় যে 'A' 'B'-এর সত্যতার আবশ্যিক সর্ত ?

আর (ii) কোন্ প্রমাণে দেখানো হয় যে 'A' 'B'-এর সত্যতার পর্যাপ্ত সর্ত ?

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি কি সমার্থক ?

$$P, \quad P \equiv P, \quad P \equiv (P \equiv P)$$

১০. '$\sim A \equiv B$' থেকে "$\sim(A \equiv B)$" নিষ্কাশন কর।

১১. 'p or q'—এ বাক্যে 'or'-কে বিসংবাদী অর্থে নিলে এর সমার্থক হিসাবে লেখা যায় $p \equiv \sim q$। কেন ? ব্যাখ্যা কর। (কোয়াইন্)

১২. যদি '$A \equiv B$' সত্য হয় তাহলে

$A \vee \sim B$	$A \cdot B$
$\sim A \vee B$	$\sim A \cdot B$
$\sim A \vee \sim B$	$\sim A \cdot \sim B$

এ বাক্যগুলির কোন্‌টির সত্যমূল্য কী ?

১৩. সমার্থক বাক্যে রূপান্তরিত করে দেখাও যে নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি পঙক্তির বাক্য দুটি সমার্থক।

$(p \supset q) \supset \sim r$	$r \supset (p \cdot \sim q)$
$(p \vee q) \vee \sim r$	$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r)$
$(p \supset q) \supset \sim(q \supset p)$	$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim p)$

৮

কেবল দণ্ড বা বর্শা দিয়ে বাক্য ব্যক্তকরণ

১. ভূমিকা

আমরা দেখেছি যে "≡", "⊃", "v", " · " প্রভৃতি যোজক অপরিহার্য নয়। দেখেছি, যে কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যকে

'~' আর '·' দিয়ে,	'~' আর 'v' দিয়ে,
'~' আর '⊃' দিয়ে,	'~' আর '/' দিয়ে
বা	'~' আর '↓' দিয়ে

ব্যক্ত করা যায়। তার মানে সাংকেতিক ভাষায় উক্তি করতে হলে দুটি যোজক দরকার : '~', আর " · ", "v", "⊃" ইত্যাদির কোনো একটি।

২. কেবল দণ্ড দিয়ে ব্যক্ত করা

দেখানো যায় যে, সব সত্যাপেক্ষ উক্তি কেবল "/" দিয়ে ব্যক্ত করা যায়, "~"-এর সাহায্যও দরকার হয় না ; দেখানো যায়, "~"ও সাংকেতিক ভাষার অপরিহার্য উপকরণ নয়। কেবল "/" দিয়ে : $\sim p$, $p \cdot q$, $p \vee q$—ইত্যাদি আকারের বাক্যকে কিভাবে ব্যক্ত করা যায় দেখা যাক। এ প্রসঙ্গে নিম্নোক্ত সমার্থতা সূত্রটি স্মরণীয়

Df / : "$\sim(p \cdot q)$" সম "$p \mid q$"

(১) $\sim p$

$\sim p$	1.	
$\sim(p \cdot p)$	2.	[1, Idem]
$p \mid p$	3.	[2, Df /]

এ সমার্থতা প্রমাণ থেকে নিম্নোক্ত সূত্রটি পেলাম

সূত্র ১ : "$\sim p$" সম "$p \mid p$"

(২) $p \cdot q$

$p \cdot q$	1.	
$\sim\sim(p \cdot q)$	2.	[1, DN]
$\sim(p \mid q)$	3.	[2, Df /]
$(p \mid q) \mid (p \mid q)$	4.	[3, সূত্র ১]

—এ সমার্থতা প্রমাণ থেকে পেলাম নিম্নোক্ত সূত্রটি

সূত্র ২ : "$p \cdot q$" সম "$(p \mid q) \mid (p \mid q)$"

(৩) $p \vee q$

$p \vee q$	1.	
$\sim(\sim p \cdot \sim q)$	2.	[1, DM]
$\sim p \mid \sim q$	3.	[2, Df /]
$(p \mid p) \mid (q \mid q)$	4.	[3, সূত্র ১]

এ প্রমাণ থেকে পাই

সূত্র ৩ ঃ "$p \vee q$" সম $(p \mid p) \mid (q \mid q)$"

(৪) $p \supset q$

$p \supset q$	1.	
$\sim p \vee q$	2.	[1, Df ⊃]
$\sim(p \cdot \sim q)$	3.	[2, DM, DN]
$p \mid \sim q$	4.	[3, Df 1]
$p \mid (q \mid q)$	5.	[4, সূত্র ১]

এ সমার্থতা প্রমাণ থেকে পাই

সূত্র ৪ ঃ "$p \supset q$" সম "$p \mid (q \mid q)$"

যেহেতু '~', '·', 'v', '⊃' দিয়ে গঠিত বাক্যকে '/' দিয়ে ব্যক্ত করা যায় সেহেতু, বলা বাহুল্য, যেকোনো বাক্যকে কেবল '/' দিয়ে ব্যক্ত করা যাবে। উদাহরণ

$A \equiv B$	1.	
$(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)$	2.	[1, Df≡]
$\sim[\sim(A \cdot B) \cdot \sim(\sim A \cdot \sim B)]$	3.	[2, DM]
$\sim(A \cdot B) \mid \sim(\sim A \cdot \sim B)$	4.	[3, Df /]
$(A \mid B) \mid (\sim A \mid \sim B)$	5.	[4, Df /]
$(A \mid B) \mid [(A \mid A) \mid (B \mid B)]$	6.	[5, সূত্র ১]

কোনো বাক্যকে কেবল " / " দিয়ে ব্যক্ত করতে হলে—
প্রদত্ত বাক্যকে প্রথমে "~(— · —)" আকারে রূপান্তরিত করার চেষ্টা করবে।

৩. কেবল বর্শা দিয়ে ব্যক্ত করা

কেবল বর্শা দিয়েও সব সত্যাপেক্ষ উক্তি ব্যক্ত করা যায়। কি করে যায় তা নিচে দেখানো হল। এ প্রসঙ্গে মনে রাখবে ঃ "$p \downarrow q$" মানে ঃ Neither p nor q। এ কথাটাই আমরা নিম্নোক্ত সূত্রে বলেছি

Df ↓ : "$\sim p \cdot \sim q$" সম "$p \downarrow q$"

I. $\sim p$

$\sim p$	1.	
$\sim p \cdot \sim p$	2.	[1, Idem]
$p \downarrow p$	3.	[2, Df ↓]

এ সমার্থতা প্রমাণ থেকে পেলাম

সূত্র I : "$\sim p$" সম "$p \downarrow p$"

II. $p \cdot q$

$p \cdot q$	1.
$\sim\sim p \cdot \sim\sim q$	2. [1, DN]
$\sim(\sim p) \cdot \sim(\sim q)$	3. [2, বন্ধনীর ব্যবহার]
$\sim p \downarrow \sim q$	4. [3, Df $\downarrow$]
$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$	5. [4, সূত্র I]

এ প্রমাণ থেকে পাই

সূত্র II : "$p \cdot q$" সম "$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$"

III. $p \vee q$

$p \vee q$	1.
$\sim(\sim p \cdot \sim q)$	2. [1, DM]
$\sim(p \downarrow q)$	3. [2, Df /]
$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$	4. [3, সূত্র I]

এ প্রমাণ থেকে পেলাম

সূত্র III : "$p \vee q$" সম "$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$"

IV. $p \supset q$

$p \supset q$	1.
$\sim p \vee q$	2. [1, Df $\supset$]
$(p \downarrow p) \vee q$	3. [2, Df $\downarrow$]
$[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p)] \downarrow q$	4. [3, সূত্র III]

এ প্রমাণ থেকে পাই নিম্নোক্ত সূত্রটি

সূত্র IV : "$p \supset q$" সম "$[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$"

উক্ত সূত্রগুলির সাহায্য নিয়ে যে কোনো বাক্যকে কেবল বর্শা দিয়ে ব্যক্ত করা সম্ভব।

উদাহরণ

$A \equiv B$	1.
$(A \supset B) \cdot (B \supset A)$	2. [1, Df$\equiv$]
$(\sim A \vee B) \cdot (\sim B \vee A)$	3. [2, Df $\supset$]
$\sim(\sim\sim A \cdot \sim B) \cdot \sim(\sim\sim B \cdot \sim A)$	4. [3, DM, DM]
$\sim(A \cdot \sim B) \cdot \sim(B \cdot \sim A)$	5. [4, DN, DN]
$(A \cdot \sim B) \downarrow (B \cdot \sim A)$	6. [5, Df $\downarrow$]
$(\sim\sim A \cdot \sim B) \downarrow (\sim\sim B \cdot \sim A)$	7. [6, DN, DN]
$(\sim A \downarrow B) \downarrow (\sim B \downarrow A)$	8. [7, Df $\downarrow$]
$[(A \downarrow A) \downarrow B] \downarrow [(B \downarrow B) \downarrow A]$	9. [8, সূত্র I, সূত্র I]

দেখা গেল : যে কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যকে দণ্ড দিয়ে বা বর্শা দিয়ে ব্যক্ত করা যায়। সুতরাং, যা " / " দিয়ে ব্যক্ত তাকে " ↓ ", আর যা " ↓ " দিয়ে ব্যক্ত তাকে " / " দিয়ে ব্যক্ত করা যাবে।

উদাহরণ

- $A \downarrow B$
  $\sim A \cdot \sim B$ [Df ↓]
  $(A/A) \cdot (B/B)$ [সূত্র ১]
  $[(A/A)\ (B/B)]\ [A/A)/(B/B)]$ [সূত্র ২]

  A/B
  $\sim(A \cdot B)$ [Df /]
  $\sim[(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)]$ [সূত্র II]
  $[(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)] \downarrow [(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)]$ [সূত্র I]

অনুশীলনী

১. 'p' বাক্যটির এমন সমার্থক দাও যা
(১) সংযৌগিক, (২) বৈকল্পিক, (৩) প্রাকল্পিক, (৪) প্রাতিকল্পিক বাক্য।

২. 'p'-এর এমন সমার্থক দাও যা
(*i*) সংযৌগিকের নিষেধ, (*ii*) বৈকল্পিকের নিষেধ, (*iii*) প্রাকল্পিকের নিষেধ।

৩. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে কেবল " / " দিয়ে* ব্যক্ত কর

(*i*) A (*vi*) $A \supset (A \vee B)$
(*ii*) $A \cdot \sim B$ (*vii*) $(A \vee B) \supset (B \vee A)$
(*iii*) $\sim A \vee B$ (*viii*) $\sim A \equiv B$
(*iv*) $A \supset \sim B$ (*ix*) $(A \cdot \sim B) \supset C$
(*v*) $(A \vee A) \supset A$ (*x*) $[(A \cdot \sim B) \supset C] \supset [A \supset (\sim B \supset C)]$

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে " / " আর " ↓ " ছাড়া অন্য যোজক দিয়ে ব্যক্ত কর :

(*i*) $(p/p)/(p/q)$ (*iii*) $[(p/p)/(q/q)]/(p/q)$
(*ii*) $(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)$ (*iv*) $[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

* আর বর্ণপ্রতীক, আর বন্ধনী দিয়ে

৯

যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষা

১. বাক্যকলনের ব্যাকরণ : সুগঠিত বাক্য

সাধারণ ভাষায় ব্যবহৃত কোনো শব্দ সুগঠিত কিনা, শব্দটির অর্থ আছে কিনা, তা নির্ণয় করতে হলে আমরা অভিধান দেখি। আবার কোনো শব্দ বা বাক্য সুগঠিত কিনা সে সম্বন্ধে সংশয় হলে আমরা ব্যাকরণের সাহায্য নিই। যে শব্দ অভিধানে নেই বা ব্যাকরণ-অনুমোদিত নয় সে শব্দ, আর যে বাক্য ব্যাকরণসম্মত নয় সে বাক্য, অ-সুগঠিত বলে গণ্য করি। যুক্তিবিজ্ঞানে সাংকেতিক ভাষা ব্যবহার করা হয়। কাজেই যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত সংকেতেরও একটা "অভিধান" থাকার দরকার। আর এসব সংকেত দিয়ে গঠিত বাক্য সুগঠিত কিনা তা নির্ণয় করার জন্য বাক্যগঠন সংক্রান্ত নিয়মের "ব্যাকরণ" দরকার। বাক্যকলনই আমাদের আলোচ্য। বাক্যকলনের ভাষার উপকরণ হল

১. বাক্যগ্রাহক প্রতীক : 'p', 'q', 'r' ইত্যাদি ; 'প', 'ফ', 'ব' ইত্যাদি

২. একাঙ্গী যোজক : "$\sim$"

৩. দ্বৈতাঙ্গী যোজক : "$\cdot$", "$\vee$" "$\supset$", "$\equiv$"*

৪. যতিচিহ্ন (বন্ধনী) : "(" , ")", তাছাড়া—"{", "}", "[", "]"

এটি আমাদের বাক্যকলনের "বর্ণলিপি"। এ লিপির অন্তর্গত 'বর্ণ' দিয়েই বাক্যকলনের ভাষা গঠিত হয়।**

বাংলা ভাষার ব্যাকরণের নিয়ম না জানলেও বুঝতে পারি যে অমুক বাক্যটির, যথা

ঝিকমিক আলো ভয় চারিদিক গেল হয়

এ বাক্যটির, প্রত্যেকটি শব্দের অর্থ থাকলেও, "বাক্যটি" সুগঠিত নয়, সুতরাং অর্থহীন, বা "বাক্যটি" অর্থহীন সুতরাং অসুগঠিত। যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষায় যোজক প্রতীক ছাড়া অন্য কোনো অর্থপূর্ণ প্রতীকই ব্যবহৃত হয় না। যেমন, যুক্তিবিজ্ঞানে আমরা নিম্নোক্তরূপ বাক্যের সাক্ষাৎ পেতে পারি :

$$\sim p, \quad p \cdot q, \quad p \supset q \supset r, \quad p \cdot q \vee r$$

* অনেকে "/", "$\downarrow$" ও ব্যবহার করেন।

** বাক্যকলনে, সাধারণভাবে আকারসর্বস্ব যুক্তিবিজ্ঞানে, অবশ্য সাধারণ বাংলা, ইংরেজি ইত্যাদিও ব্যবহৃত হয়। এসব সাধারণ ভাষার দরকার যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্র ব্যাখ্যা করার জন্য। কিন্তু যুক্তিবৈজ্ঞানিক ভাষা বলতে এখানে বোঝাচ্ছে সূত্রের ভাষা, আর সূত্রগুলিতে উক্তরূপ সংকেত ভিন্ন অন্য কোনো সংকেত ব্যবহৃত হয় না।

এ জাতীয় বাক্য সুগঠিত কিনা বাক্যগুলির অন্তর্গত 'p', 'q' ও যোজকের অর্থ বিচার করে তা নির্ণয় করা যায় না, কেননা 'p', 'q' প্রভৃতি, এক অর্থে, অর্থহীন। কাজেই সাধারণ ভাষায় বাক্য গঠন নিয়ন্ত্রণের জন্য যদি ব্যাকরণের প্রয়োজন থাকে, যুক্তিবৈজ্ঞানিক ভাষা নিয়ন্ত্রণের জন্য "ব্যাকরণ"-এর, বাক্যগঠন সংক্রান্ত নিয়মের, যে অনেক বেশী প্রয়োজন তা বলাই বাহুল্য। বস্তুত এরূপ নিয়ম অপরিহার্য। এ জাতীয় নিয়মকে বলে (বাক্য-) গঠনের নিয়ম—formation rules। আর যে বাক্য "ব্যাকরণ"সম্মত, মানে উক্তরূপ নিয়মসম্মত, তাকে বলে wellformed formula, সংক্ষেপে wff (উচ্চারণ ঃ ওয়েফ্)। এরূপ বাক্যকে আমরা (বাংলায়) সুগঠিত বাক্য, সংক্ষেপে—সুঃ বাঃ, সুবাঃ, বা আরো সংক্ষেপে—সুবা বলে অভিহিত করব।

বাক্যকলনে বাক্যগঠনের নিয়ম নানাভাবে বিবৃত হতে পারে। নিচে একভাবে গঠন-নিয়ম বিবৃত হল।

১. যেকোনো একক বাক্যগ্রাহক সুবা বলে গণ্য।

২. যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '~(ব)'ও সুবা বলে গণ্য।

 তবে 'ব' যদি একবর্ণ সুবা* হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে '~(ব)'-এর বন্ধনী বাদ দেওয়া যাবে।

৩. যদি 'ব' সুবা হয় এবং 'ভ' সুবা হয় তাহলে '(ব)' আর '(ভ)'-এর মধ্যে যে কোনো দ্বৈতাঙ্গী যোজক ব্যবহার করে যে বাক্য পাওয়া যাবে তাও সুবা বলে গণ্য।

 তবে 'ব' বা 'ভ' যদি একবর্ণ সুবা হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে একবর্ণ 'ব' বা একবর্ণ 'ভ'-এর বন্ধনী বাদ দেওয়া যাবে।

৪. যা উক্ত ১, ২, ৩ থেকে পাওয়া যায় না তা সুবা বলে গণ্য নয়।

উদাহরণ

$p,\ q,\ r$	—এসব সুবা (নিয়ম ১)
$\sim p,\ \sim q,\ \sim r$	,, ,, (নিয়ম ১, ২)
$p \cdot q,\ p \vee q,\ p \supset q$	,, ,, (নিয়ম ১, ৩)
$\sim(p \cdot q),\ \sim p \vee q,\ \sim p \supset \sim q$	,, ,, (নিয়ম ১, ২, ৩)
$(p \cdot q) \supset r,\ (p \cdot q) \equiv r,\ (p \cdot q) \supset (p \vee q)$	,, ,, (নিয়ম ১, ৩)

কিন্তু '$p\sim$', '$\supset p \cdot r$', '$p \cdot q \vee r$' সুবা বলে গণ্য নয়। কেননা এসব বাক্য গঠনে উক্ত নিয়মগুলি লঙ্ঘন করা হয়েছে। সর্বশেষ উদাহরণটি নেওয়া যাক।

$$p \cdot q \vee r$$

'p', '$p \cdot q$', '$q \vee r$' এসব সুবা, কিন্তু উক্ত বাক্যটি সুবা নয়। যদি এখানে 'p'-এর সঙ্গে " . " দিয়ে '$q \vee r$' যুক্ত করা হয়ে থাকে তাহলে লেখা উচিত ছিল

$$p \cdot (q \vee r) \qquad (\text{নিয়ম } ৩)$$

---

* মানে একাক্ষর, 'p', 'q' ইত্যাদি

আর যদি '$p \cdot q$'-এর সঙ্গে 'v' দিয়ে 'r' যুক্ত করা হয়ে থাকে তাহলে লেখা উচিত ছিল

$(p \cdot q) \vee r$ (নিয়ম ৩)

সেরূপ

$p \supset q \supset r \qquad p \supset q \equiv r \qquad p \cdot q \vee r \cdot s$

এসবও সুবা বলে গণ্য হতে পারে না। এখানে নিয়ম ৩-এর বন্ধনী সংক্রান্ত উপনিয়মটি লঙ্ঘিত হয়েছে। এ নিয়ম অনুসারে কোনো অনেকাঙ্গী বাক্যকে অন্য বাক্যের সঙ্গে যুক্ত করতে হলে অনেকাঙ্গীটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখার দরকার। উক্তরূপ অসুবা অনেকার্থতা দোষে দুষ্ট। যথা

"$p \supset q \supset r$" বলতে বুঝতে পারি : '$p \supset q$' সত্য হলে 'r' সত্য (১)

বা : 'p' সত্য হলে '$q \supset r$' সত্য (২)

যদি (১)ই আমাদের বক্তব্য হয় তাহলে বলার দরকার : $(p \supset q) \supset r$

আর যদি (২)ই আমাদের বক্তব্য হয় তাহলে বলতে হবে : $p \supset (q \supset r)$।

উক্তরূপ বাক্যের যে অনেকার্থতা তাকে বলে গ্রন্থনগত অনেকার্থতা।* কেবল বন্ধনী ব্যবহার করেই এরূপ অনেকার্থতা থেকে মুক্ত থাকা যায়।

২. বাক্যের অন্বয় ও ভাষান্তর :

২.১ গ্রন্থনগত অনেকার্থতা

গণিত ও যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত সাংকেতিক ভাষার সবচেয়ে বড় সুবিধা হল এই : এ ভাষায় বন্ধনী ব্যবহার করে দ্ব্যর্থহীনভাবে প্রতীক গ্রন্থন করা যায়, কোন্ প্রতীক কোন্ প্রতীকের সঙ্গে অন্বিত বা যূথবদ্ধ হয়েছে তা দেখানো যায়। ফলে গণিত ও যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষা গ্রন্থনগত অনেকার্থতামুক্ত। কিন্তু সাধারণ ভাষার একটা মস্ত অসুবিধা হল—এ ভাষায় সব সময় সার্থকভাবে গ্রন্থন বা অন্বয় দেখানো সম্ভব নয়। ফলে সাধারণ ভাষা অনেক ক্ষেত্রে গ্রন্থনগত অনেকার্থতা দোষে আক্রান্ত হয়। দু একটা উদাহরণ নেওয়া যাক।

গালফোলা গোবিন্দের মা

বললে বোঝা যায় না কে গালফোলা—গোবিন্দ নাকি গোবিন্দের মা। বোঝা যায় না এ বাক্যাংশের অন্বয় কিভাবে করতে হবে

গালফোলা গোবিন্দের-মা

এভাবে, নাকি এভাবে—

গালফোলা-গোবিন্দের মা

সেরকম,

ছোট সুন্দর মেয়েদের স্কুল

* ambiguity in grouping

অন্তত তিনটি ভিন্ন অর্থ বোঝাতে পারে। হাইফেন্ ব্যবহার করে এ অর্থগুলির বিভিন্নতা দেখানো হল :

ছোট সুন্দর-মেয়েদের স্কুল	(স্কুলটি ছোট, স্কুলটি সুন্দর মেয়েদের জন্য)
ছোট-সুন্দর মেয়েদের-স্কুল	(স্কুলটি ছোট ও সুন্দর)
ছোট-সুন্দর-মেয়েদের স্কুল	(স্কুলটি ছোট-ও-সুন্দর-মেয়েদের জন্য)

ভারতীয় যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র মাত্রই জানে, প্রথম শিক্ষার্থীদের, পক্ষে

সিষাধয়িষাবিরহসহকৃতসিদ্ধ্যভাব

এ কথার মানে বোঝা বেশ কষ্টকর, জানে—গ্রন্থনচিহ্ন বা অন্বয় চিহ্নের অভাব এ বাক্যের দুর্বোধ্যতার হেতু। তারা জানে এ বাক্যাংশের অন্বয় হবে এরূপ :

(সিষাধয়িষাবিরহসহকৃতসিদ্ধি-) অভাব

এরূপ নয়

সিষাধয়িষাবিরহসহকৃত (সিদ্ধি-অভাব)

আর একটা উদাহরণ

অরুণ প্রথম হবে এবং বরুণ দ্বিতীয় স্থান অধিকার করবে যদি চন্দন পরীক্ষা না দেয়

—এ বাক্যের দ্ব্যর্থতা অসহ্য : বোঝবার উপায় নেই—(১) অরুণের প্রথম হওয়া চন্দনের পরীক্ষা না দেওয়ার উপর নির্ভর করছে, নাকি (২) করছে না। যদি (১)ই বক্তব্য হত তাহলে বন্ধনীর সাহায্যে বাক্যটিকে এভাবে দ্ব্যর্থহীন করা যেত :

যদি চন্দন পরীক্ষা না দেয় তাহলে (অরুণ প্রথম হবে এবং বরুণ দ্বিতীয় স্থান অধিকার করবে) [$\sim C \supset (A \cdot B)$]

আর বক্তার বক্তব্য যদি এই হত যে অরুণের প্রথম হওয়া চন্দনের পরীক্ষা না দেওয়ার উপর নির্ভর করছে না তাহলে অনেকার্থতামুক্ত করে বাক্যটি এভাবে ব্যক্ত করা যেত :

অরুণ প্রথম হবে এবং (বরুণ দ্বিতীয় স্থান অধিকার করবে যদি চন্দন পরীক্ষা না দেয়)

বা এভাবে—

অরুণ প্রথম হবে এবং যদি চন্দন পরীক্ষা না দেয় তাহলে বরুণ দ্বিতীয় স্থান অধিকার করবে [$A \cdot (\sim C \supset B)$]

২.২ ভাষান্তর : শাব্দিক সুলুক*

আমাদের সমস্যা : সাধারণ ভাষার কোনো বাক্যকে কিভাবে যুক্তিবিজ্ঞানের সাংকেতিক ভাষায় "অনুবাদ" করব? সাধারণ ভাষার কোনো যোজকের বদলে যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত কোন্ অশাব্দ যোজক ('v', '⊃' ইত্যাদি) প্রয়োগ করব তা বিভিন্ন

* clue, শাব্দিক সুলুক = verbal clue

অপেক্ষক আলোচনা করতে গিয়ে বলেছি। কিন্তু প্রশ্ন হল: সাধারণ ভাষার কোনো বাক্যকে অনুবাদ করতে হলে, বাক্যটির অঙ্গগুলি কিভাবে অন্বিত বা যূথবদ্ধ হয়েছে তা বুঝব কি করে? সাধারণ ভাষায় যে অন্বয়করণের কোনো ঈঙ্গিত থাকে না তা নয়। যেসব সুলুক সন্ধান সাধারণ ভাষায় পাওয়া যায় তার কয়েকটি নিচে উল্লেখ করা হল।

কমা, সেমিকোলন, কোলন, ড্যাস

অনেক ক্ষেত্রে এসব যতিচিহ্ন দেখে বক্তার ঈপ্সিত অন্বয় বা গ্রন্থন বোঝা যায়। যথা—

যদি অরুণ আসে তাহলে বরুনা আসবে ; এবং চন্দনা আসবে $=(A \supset B) \cdot C$

যদি রাম আসে তাহলে: শ্যাম আসবে, তরুণ আসবে, উদয় আসবে $=R \supset (S.T.U)$

এমন নয় যে—রাম প্রথম হবে এবং শ্যাম প্রথম হবে এবং তুষারও প্রথম হবে

$= \sim(R.S.T)$

২.৩ বাক্‌সংকোচন

সাধারণ ভাষায় যে বাক্‌সংকোচন দেখি তার থেকে অন্বয়করণের সুলুক সন্ধান পাওয়া যায়। বাক্‌সংকোচন করা হয় নানাভাবে—যথা দুটি স্বতন্ত্র বাক্যের উদ্দেশ্য দুটিকে, বিধেয় দুটিকে বা ক্রিয়াপদগুলিকে একত্রিত করে।

যেমন

রাম আসবে এবং শ্যাম আসবে

এ বাক্যকে বাক্‌সংকোচন করে এভাবে ব্যক্ত করা হয়

রাম এবং শ্যাম আসবে

সেরূপ

রাম আসবে এবং রাম থেকে যাবে

এ উক্তিকে বাক্‌সংকোচন করে এভাবে ব্যক্ত করা হয়

রাম আসবে এবং থেকে যাবে।

উক্তরূপ বাক্‌সংকোচনকে বলে অনুপ্রবেশ (telescoping); কেননা এরূপ সংকোচনে দুটি বাক্যের একটির মধ্যে অন্যটি যেন অনুপ্রবিষ্ট হয়ে যায়।

এখন কোনো বাক্যের অঙ্গগুলি কিভাবে অন্বিত হবে অনুপ্রবেশ দেখে তা বোঝা যায়। এ প্রসঙ্গে আমরা একটা নিয়ম উল্লেখ করতে পারি:

> যে বাক্যাঙ্গগুলিতে বাক্‌সংকোচন দেখা যায় তাদের একত্রগ্রথিত, যূথবদ্ধ (বা বন্ধনীভূক্ত) বলে গণ্য করতে হবে।

উদাহরণ

যদি অরুণ আসে তাহলে বরুনা আসবে এবং চন্দনা আসবে

এ বাক্যের বক্তব্য $A \supset (B \cdot C)$ নাকি $(A \supset B) \cdot C$ তা বোঝা শক্ত। কিন্তু সহজেই বোঝা যায়,

যদি অরুণ আসে তাহলে বরুনা এবং চন্দনা আসবে

এটি একটি প্রাকল্পিক বাক্য (এর বক্তব্য $A \supset (B \cdot C)$) ; এ বাক্যের অনুকল্প "বরুনা আসবে এবং চন্দনা আসবে"। লক্ষণীয় "বরুনা আসবে" এবং "চন্দনা আসবে" এ দুটি বাক্যকে বাক্‌সংকোচন করে ("বরুনা"র পর "আসবে" উহ্য রেখে) বাক্য গঠন করা হয়েছে : "বরুনা এবং চন্দনা আসবে"। এ অনুপ্রবেশ দেখে বুঝতে পারছি উক্ত বাক্য দুটিকে যূথবদ্ধ বলে গণ্য করতে হবে।

আবার,

রাম থেকে যাবে এবং শ্যাম থেকে যাবে অথবা তুষার আসবে

এ বাক্যটি দ্ব্যর্থক ; বোঝা যায় না এর বক্তব্য $(R \cdot S) \vee T$ নাকি $R \cdot (S \vee T)$? কিন্তু

রাম এবং শ্যাম থেকে যাবে অথবা তুষার আসবে

এ বাক্যের বক্তব্য পরিষ্কার : $(R \cdot S) \vee T$। এখানে "রাম এবং শ্যাম থেকে যাবে" এ অংশে বাক্‌সংকোচন আছে বলে "রাম থেকে যাবে" এবং "শ্যাম থেকে যাবে" যূথবদ্ধ বলে গণ্য।

আর একটা উদাহরণ* :

> If the new mail-order campaign does not break the Dripsweet monopoly and restore freedom of competition then Jones will sell his car and mortgage his house.

এ বাক্যকে "অনুবাদ" করতে যে সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করব তা নিচে উল্লেখ করা হল।

M = the new mail-order campaign breaks the Dripsweet *monopoly*
F = the new ,, ,, restores *freedom* of competition
C = Jones will sell his *car*
H = Jones will mortgage his *house*

বলা বাহুল্য, উক্ত উদাহরণের "If ··· car" এ অংশ একটি প্রাকল্পিক বাক্য এবং এর পূর্বকল্প হল "the new ··· competition"। কিন্তু প্রশ্ন হল : এ পূর্বকল্পের অন্তর্গত "not"-এর প্রভাব কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত—"monopoly" পর্যন্ত ? নাকি "competition" পর্যন্ত ? মানে, পূর্বকল্পটির অঙ্গ বাক্যগুলির বিন্যাস এরূপ : "$\sim M \cdot H$", নাকি এরূপ : "$\sim(M \cdot H)$" ? লক্ষণীয়, মূল বাক্যে আছে "restore" : যদি "restore ··· competition" এ অংশ "not"-এর প্রভাব ক্ষেত্র বা আওতার বাইরে থাকত তাহলে মূল বাক্যে "restore-"

* এ উদাহরণটি এবং এ বিভাগের বাকি উদাহরণগুলি কোয়াইন্-এর *Methods of Logic* থেকে নেওয়া।

এর স্থলে "restores" থাকত। এর থেকে বোঝা যায়, এখানে "restore" "not"-এর আওতার অন্তর্গত। মানে পূর্বকল্পটির সাংকেতিক রূপ হল

$$\sim(M \cdot F)$$

কিন্তু আলোচ্য বাক্যের "then"-এর প্রভাব কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত—"his car" পর্যন্ত ? নাকি "his house" পর্যন্ত ? মানে, অনুকল্প কি "C" নাকি "C. H." ? মানে বাক্যটির সাংকেতিক রূপ কি

$$[\sim(M \cdot F) \supset C] \cdot H \text{ নাকি } \sim(M \cdot F) \supset (C \cdot H) \text{ ?}$$

উপরে যে নিয়মটি, অনুপ্রবেশসংক্রান্ত নিয়ম, উল্লেখ করেছি সে নিয়ম অনুসারে

then Jones will sell his car and mortgage his house

এ বাক্যাংশের "then"-এর পরবর্তী সমগ্র বাক্যটি "then"-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত, কেননা এখানে বাকসংকোচন করা হয়েছে ('and *Jones will* mortagage' না লিখে কেবল 'and mortgage…' লেখা হয়েছে)। এ সংকোচন থেকে বোঝা যায় "and"-এর প্রভাব বাম ধারে কেবল "Jones" পর্যন্ত বিস্তৃত। মানে "and" অনুকল্পটির অন্তর্ভুক্ত, এবং ফলে প্রদত্ত বাক্যটি প্রাকল্পিক বাক্য, সংযৌগিক নয়—মুখ্যযোজক "then", "and" নয়। তাহলে বাক্যটির যথার্থ অনুবাদ হল

$$\sim(M \cdot F) \supset (C \cdot H)$$

২.৪ "Either—or—", "Both—and—"

যে যোজকগুলি দুটি শব্দ দিয়ে গঠিত (যথা, "If—then—") সেগুলির পরিধি বুঝতে অসুবিধা হওয়ার কথা নয়। এ রকম ক্ষেত্রে শব্দ দুটি অঙ্গবাক্যের দুই সীমান্তরূপে কাজ করে। যেমন "If—then"-এর মধ্যবর্তী অংশের ভেতরে অন্য যোজক থাকলেও সমগ্র অংশ পূর্বকল্প বলে গণ্য হয়। অনেক সময় আমরা "Either—or"-এর পরিবর্তে সংক্ষেপে "—or—"ব্যবহার করি, ঠিক ; কিন্তু অন্বয় বা বাক্‌বন্ধন নির্দেশের জন্য অনেক সময় আবার সমগ্র যোজকটি ("Either—or—") প্রয়োগ করা হয়। যথা

Jones came and Smith stayed or Robinson left

এ বাক্য দ্ব্যর্থক ; বোঝা যায় না, এর মুখ্য যোজক "and" নাকি "or"। কিন্তু

Either Jones came and Smith stayed *or* Robinson left

এ বাক্যের ঈপ্সিত অন্বয় স্পষ্ট : $(J \cdot R) \vee S$। সে রকম

Jones came and either Smith stayed or Robinson left

এ বাক্যও দ্ব্যর্থতামুক্ত, এর বক্তব্য : $J \cdot (R \vee S)$।

তারপর, "and"-এর সহায়ক হিসাবে "both" যোগ করে, "Both—and—" যোজকটি ব্যবহার করেও, অনেক সময় বাক্‌বন্ধন দেখানো হয়। উদাহরণ :

Robinson left or Jones came and Smith stayed (১)

Robinson left or *both* Jones came *and* Smith stayed (২)

এ বাক্য দুটির পার্থক্য স্পষ্ট ; (১) গ্রন্থনগত অনেকার্থতা দোষে দুষ্ট, কিন্তু (২)-তে

কোনো গ্রন্থনগত দ্ব্যর্থতার অবকাশ নেই, স্পষ্ট বোঝা যায় "both"-এর পরবর্তী সমগ্র অংশ "or"-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত, বোঝা যায় বাক্যটির বক্তব্য : $R \vee (J \cdot S)$

২.৫ **"It is the case that—and that—"**
"It is not the case that—"

সাধারণ ভাষায় কখনও কখনও আড়ম্বর করে "It is the case that" প্রয়োগ করা হয় এবং পরবর্তী "and that" দিয়ে অন্বয় ব্যক্ত করা হয়। যথা

Jones came or Smith stayed and Robinson left

এ বাক্যটি দ্ব্যর্থক, কিন্তু

It is the case that Jones came or Smith stayed *and that* Robinson left

এ বাক্য গ্রন্থনগত অনেকার্থতামুক্ত। এখানে "that" দুটি সমপর্যায়ের, কাজেই বোঝা যায় প্রথম "that"-এর প্রভাব "and that"-এর আগে পর্যন্ত বিস্তৃত, বোঝা যায়—এ বাক্যে "and"-ই মুখ্যযোজক, বোঝা যায় যে বাক্যটির নির্ভুল অনুবাদ হবে নিম্নরূপ :

$$(J \vee S) \cdot R$$

অনেক সময় আবার "not"-এর পরিবর্তে আড়ম্বরপূর্ণ "It is not the case that" ব্যবহার করা হয়, এবং কেবল শব্দ বাহুল্যের জন্যই এরূপ দীর্ঘ বাক্যাংশ ক্ষুদ্রতর "not"-এর চেয়ে বেশী প্রভাবশালী বলে গণ্য হয়। তার মানে—"not" যতটা বাক্যাংশ নিয়ন্ত্রণ করে "It is not the case that" তার চেয়ে বৃহত্তর বাক্যাংশ নিয়ন্ত্রণ করে। যথা

Jones came but it is not the case that Smith stayed and Robinson left

এ বাক্যটি নিঃসন্দিগ্ধভাবে সংযৌগিক ("but" দেখে বোঝা যায়)। এখন শব্দবহুল "it is not the case" দেখে আন্দাজ করা যায় যে বক্তা "that" এর পরবর্তী সমগ্র বাক্যাংশকে নিষেধ করতে চান। অর্থাৎ বক্তার বক্তব্য হল

Jones came · ~(Smith stayed · Robinson left) $[J \cdot \sim(S \cdot R)]$

বক্তা যদি কেবল "Smith stayed"কেই নিষেধ করতে চাইতেন তাহলে তিনি বাগাড়ম্বর না করে, "it is not the case" প্রয়োগ না করে, আরও সংক্ষেপে বলতেন

Jones came and Smith did not stay and Robinson left

$[J \cdot \sim S \cdot R]$

২.৬ **"and also", "and furthermore", "or else"**

"and"-এর পরে "also" বা "furthermore" যোগ করা বাহুল্য মাত্র। কিন্তু এরূপ বাক্‌বাহুল্য করে অনেক সময় "and"-কে আরও শক্তিশালী করা হয় এবং এরূপ বাক্‌বাহুল্যের সাহায্যে ঈপ্সিত অন্বয় ব্যক্ত করা হয়। নিম্নোক্ত বাক্য দুটি তুলনীয় :

Jones came or Smith stayed *and* Robinson left

Jones came or Smith stayed *and furthermore* Robinson left

এ বাক্য দুটির প্রথমটি দ্ব্যর্থক। দ্বিতীয়টির নিঃসঙ্গ "or"-এর চেয়ে দীর্ঘতর "and furthermore" বেশী শক্তিশালী বলে বিবেচ্য এবং সেজন্য বাক্যটি সংযৌগিক বলে গণ্য। অর্থাৎ এ বাক্যের বক্তব্য হল

(Jones came v Smith stayed) · Robinson left

উক্তরূপে "or"-এর সঙ্গে "else" যোগ করে "or"-কে নিঃসঙ্গ "and" বা "or"-এর চেয়ে বেশী প্রভাবশালী করা হয়। নিম্নোক্ত বাক্য দুটি তুলনা কর।

Jones came *or* Smith stayed and Robinson left
Jones came *or else* Smith stayed and Robinson left

এখানে দ্বিতীয় বাক্যে কেবল "or" ব্যবহার না করে "or else" ব্যবহার করা হয়েছে। এর থেকে বোঝা যায় যে বাক্যটির অন্বয় নিম্নরূপ

Jones came v (Smith stayed · Robinson left)

অন্বয় সম্পর্কে যে সব সুলুকসন্ধান পেলাম সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল।

১. যে অঙ্গবাক্যগুলিতে সংকোচনের চিহ্ন থাকে সেগুলিকে যূথবদ্ধ বলে গণ্য করতে হবে।

২. "It is the case that–and that–" আকারের বাক্যে শূণ্যস্থানে যে সব অঙ্গবাক্য থাকে তাদের একত্র গ্রথিত করতে হবে।

৩. নিঃসঙ্গ "not"-এর চেয়ে "it is not the case that" অধিকতর প্রভাবশালী
এর প্রভাবসীমা "that"-এর পরবর্তী "and", "or"কেও ছাড়িয়ে যায়,
"and"-এর চেয়ে "and also", "and furthermore" বেশী শক্তিশালী
এদের প্রভাবসীমা পরবর্তী "or"কে ছাড়িয়ে যায়
"or"-এর চেয়ে "or else" বেশী শক্তিশালী
এর প্রভাবসীমা পরবর্তী "and"কে ছাড়িয়ে যায়।

উদাহরণ : এবার একটি জটিল উদাহরণ নেওয়া যাক—

If Jones is ill or Smith is away then neither will the Argus deal be concluded nor will the directors meet and declare a dividend unless Robinson comes to his senses and takes matters into his own hands. (১)

এরূপ বাক্যকে সাংকেতিক ভাষায় অনুবাদ করতে হলে প্রথমে মুখ্য যোজক নির্ণয় করতে হবে এবং যোজকটিকে অনুবাদ করতে হবে, তারপর তার চেয়ে কম শক্তিশালী যোজক, তারপর আরও কম শক্তিশালী যোজক নির্ণয় ও অনুবাদ করতে হবে—এভাবে ক্রমশ এগিয়ে যেতে হবে। এখন উক্ত বাক্যের মুখ্যযোজক কোন্‌টি ? "If—then—" না "unless" ? মনে হয় এখানে "If—then"-ই মুখ্য যোজক। তাহলে বাক্যটিকে এভাবে লিখতে পারি

(Jones is ill v Smith is away) ⊃ {neither...his own hands} (২)

এখন "neither···his own hands"—এ অংশের মধ্যে সবচেয়ে শক্তিশালী যোজক কোন্‌টি ?

বোঝা যাবে "unless"-এ অংশের প্রধান যোজক। এখন "unless"-কে "v"-তে* অনুবাদ করে পাই

(Jones is ill v Smith is away)⊃{neither...dividend v Robinson comes ... his own hands} (৩)

"এখন neither ··· dividend" এ অংশের মধ্যে সব চেয়ে শক্তিশালী যোজক কোন্‌টি ? "and" নয়, কেননা দুটি বাক্য সংকোচন (telescoping) করে পেয়েছি : "will the directors meet and declare a dividend", সুতরাং এ অংশ অন্বিত হবে "nor"-এর ডান ধারের অঙ্গ হিসাবে। কাজেই "neither—nor—" অংশটি লিখতে হবে এভাবে

neither will the Argus deal be concluded nor (will the directors meet and declare a dividend)

সুতরাং আলোচ্য বাক্য এভাবে লেখার দরকার

(Jones is ill v Smith is away)⊃{[~Argus deal will be concluded · ~(the directors will meet · the directors will declare a dividend] v (Robinson...hands)} (৪)

প্রশ্ন ওঠে, অনুকল্পের "v"-এর প্রভাব কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত ?—"senses" পর্যন্ত নাকি "hands" পর্যন্ত ? "and takes" ("and Robinson takes" বলা হয় নি) থেকে বোঝা যায় বাক্‌সংকোচন করা হয়েছে। কাজেই "... v (Robinson...hands)" এ অংশের অন্বয় হবে এরূপ

... v (Robinson comes to his senses · Robinson takes matters into his own hands)

কাজেই প্রদত্ত বাক্যটিকে এভাবে অনুবাদ করতে পারি :

(*Jones* is ill v *Smith* is away)⊃{[~*Argus* deal will be concluded · ~(the directors will *meet* · the directors will *declare* a dividend)] v (*Robinson* will come to his senses · Robinson will take matters into his own *hands*)} (৫)

এবার অঙ্গগুলির পরিবর্তে সংক্ষেপক প্রতীক বসিয়ে পাই

$$(J \vee S) \supset \{[\sim A \cdot \sim(M \cdot D)] \vee (R \cdot H)\} \quad (৬)$$

৩. বিন্দুলিপি

৩.১ বন্ধনীর দৌরাত্ম্য

আমরা দেখেছি গ্রন্থনগত অনেকার্থতা দোষ এড়িয়ে চলতে হলে বন্ধনীর প্রয়োজন। যুক্তিবিজ্ঞানে ও গণিতে বন্ধনীর গুরুত্ব অসীম। বন্ধনীর ব্যবহার ছাড়া গণিত এর প্রাথমিক পর্যায় অতিক্রম করে অগ্রসর হতে পারত না। কিন্তু বন্ধনী একটা আপদ বা উপদ্রব হিসাবেও

---

* p unless $q = p \vee q$ ৬৭ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

দেখা দিতে পারে। ক্রমাগত বন্ধনী ব্যবহারের ফলে বাক্য অস্বচ্ছ ও দুর্বোধ্য হয়ে ওঠে। এবং বন্ধনীকণ্টকিত দুষ্পাঠ্য ও দুর্বোধ্য বাক্য পাঠককে স্বভাবতই আতঙ্কিত করে। ধরা যাক, আমরা

$$\sim p \cdot \sim q \qquad p \cdot q$$

এ বাক্য দুটিকে "v" দিয়ে যুক্ত করতে চাই। তাহলেই বন্ধনীর প্রয়োজন হবে। এদের যুক্ত করে পাই

(১) $(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$

এখন যদি এ বাক্যের সঙ্গে " · " দিয়ে "$(p \cdot r) \equiv s$" যুক্ত করতে হয় তাহলে (১)-কে বন্ধনীর মধ্যে রেখে এভাবে বাক্য গঠন করার দরকার

(২) $((\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)) \cdot ((p \cdot r) \equiv s)$

(২)-কে নিষেধ করতে হলে আবার বন্ধনীর প্রয়োজন। (২)-কে নিষেধ করে পাই

(৩) $\sim(((\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)) \cdot ((p \cdot r) \equiv s))$

এ রকম বন্ধনী কণ্টকিত বাক্য প্রথম দৃষ্টিতে দুর্বোধ্য বলে মনে হয়; সহজে বোঝা যায় না: এ বাক্যের কোন্‌টি মুখ্যযোজক, বাক্যটি সংযৌগিক না বৈকল্পিক নাকি নিষেধক। আর এ রকম বাক্যে বন্ধনী ঠিক ঠিক ব্যবহার করা হয়েছে কিনা এ সম্বন্ধেও সন্দেহ জাগতে পারে।

৩.২ বন্ধনী ও বন্ধনীসাথী

বন্ধনীচিহ্ন জোড়ায় জোড়ায় ব্যবহার করতে হয়। কোনো বাক্যকে বন্ধনীভুক্ত করতে হলে এর বামে "(" (বাম বন্ধনী) আর ডাইনে ")" (দক্ষিণ বন্ধনী)* ব্যবহার করার দরকার। বাম বন্ধনী ও দক্ষিণ বন্ধনীকে পরস্পরের সাথী (mate) বলে**। এখানে বন্ধনীসংক্রান্ত একটা নিয়ম উল্লেখ করতে পারি:

কোনো বাক্যে যতগুলি বাম বন্ধনী থাকবে ঠিক ততগুলি দক্ষিণ সাথীবন্ধনী থাকবে; যে বাক্যে বাম ও দক্ষিণ বন্ধনীর সংখ্যা অসমান সে বাক্য সুগঠিত বলে গণ্য নয়।

যথা

$$(((p \cdot q) \supset (r \supset t) \supset t$$

এ বাক্য সুগঠিত নয়; কেননা এতে আছে চারটি বামবন্ধনী আর দুটি দক্ষিণ বন্ধনী কিন্তু

$$\sim(((\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)) \cdot ((p \cdot r) \equiv s))$$

এ বাক্যে ৬টি বাম বন্ধনী ৬টি দক্ষিণ বন্ধনী। সুতরাং এতে বন্ধনীসংক্রান্ত নিয়ম লঙ্ঘিত হয় নি। বাক্যটিকে সহজপাঠ্য করার জন্য এর কোন্ অংশ কোন্ বন্ধনী জোড়ের আওতার মধ্যে তা উপরে নিচে মাত্রা দিয়ে দেখানো হল।

$$\sim(\ ((\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)\ ) \cdot (\ (p \cdot r) \equiv s)\ )$$

* '[', '{'—এগুলিও বাম বন্ধনী; ']' '}'—এগুলিও দক্ষিণ বন্ধনী।

** যথা, '('-এর সাথী হল ')', '['-এর সাথীবন্ধনী হল ']'

বন্ধনী দিয়ে যোজকের পরিধি আরও স্পষ্টভাবে দেখাবার জন্য অনেক সময় ভিন্ন ভিন্ন আকৃতির বন্ধনী ব্যবহার করা হয় ঃ

( ) ঃ প্রথম বন্ধনী (ভ্রূবন্ধনী)
[ ] ঃ দ্বিতীয় বন্ধনী (বাক্সবন্ধনী)
{ } ঃ তৃতীয় বন্ধনী (ধনুর্বন্ধনী)

এসব বন্ধনী ব্যবহার করে উপরোক্ত বাক্যটি এভাবে লিখতে পারতাম

$$\sim\{[(\sim p\cdot\sim q)\vee(p\cdot q)]\cdot[(p\cdot r)\equiv s]\}$$

কেবল একাকৃতি বন্ধনী (যথা, ভ্রূবন্ধনী) ব্যবহার না করে ভিন্ন ভিন্ন আকৃতির বন্ধনী ব্যবহার করলে যোজকগুলির পরিধি বোঝা কিছুটা সুগম হয়, ঠিক। কিন্তু তিন জোড়া ভিন্নাকৃতির বন্ধনী দিয়েও সব সময় চলে না। সাধারণভাবে বলা যায়, বন্ধনীকণ্টকিত বাক্যমাত্রই বিরক্তি উদ্রেক করে। এজন্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা নানানভাবে বন্ধনীর উপদ্রব দূর করার চেষ্টা করেন। এখানে আমরা একটি বন্ধনীমুক্তি পদ্ধতি আলোচনা করব। আরও সঠিকভাবে বলতে গেলে—একটি সহজতর বিকল্প বন্ধনী পদ্ধতির কথা বলব।

৩.৩ বন্ধনীমুক্তি ঃ বিন্দুবন্ধনী

বন্ধনী হল যতিচিহ্ন ; এবং যতিচিহ্ন বাদ দিলে, বাক্য গ্রন্থনগত অনেকার্থতা দোষে দুষ্ট হয়। কাজেই বন্ধনী বর্জন করলেও এমন কোনো কৌশল অবলম্বন করার দরকার যা দিয়ে অঙ্গবাক্যের গ্রন্থন বা অন্বয় বোঝানো যায়। গণিতবিদরা অনেক সময় প্রাথমিক পর্যায়ে নিম্নোক্ত কৌশলে কার্য উদ্ধার করেন। গাণিতিক যোজকগুলিকে বিশেষ ক্রমে সাজিয়ে নিয়ে তারা বলেন ঃ আমরা মেনে নেব অমুক যোজক তমুক যোজকের চেয়ে বেশী শক্তিশালী, অমুক যোজকের পরিধি তমুক যোজকের চেয়ে বৃহত্তর। যথা, গাণিতিক বিধান অনুসারে, সরলীকরণ করতে হলে প্রথমে ভাগের কাজ, তারপর গুণের, তারপর যোগের এবং সর্বশেষে বিয়োগের কাজ করতে হয়।* একটা উদাহরণ ঃ

$$\{[২\times(৬\div২)]+৮\}-২$$

এ বাক্যের বন্ধনী তুলে দিয়ে এভাবে লেখা যেত

$$২\times৬\div২+৮-২$$

এতে গ্রন্থনগত অনেকার্থতার সম্ভাবনা নেই, কেননা গাণিতিক বিধান থেকেই জানা যায় কোন্ যোজকের প্রভাব ক্ষেত্র কতদূর পর্যন্ত বিস্তৃত।

গণিতবিদ্‌দের মত আমরাও বিভিন্ন যোজকের আপেক্ষিক শক্তি সম্বন্ধে নিয়ম রচনা করে নিতে পারি। নিম্নোক্ত নিয়ম দুটি লক্ষ কর। এগুলি মেনে চললে বন্ধনীর বন্ধন থেকে কিছুটা মুক্তি পাওয়া যায়

নিয়ম ১ ঃ "~"-এর প্রভাব বা পরিধি ক্ষুদ্রতম ; "~" কেবল তার অব্যবহিত পরবর্তী (ডান ধারের) বাক্যকেই (আণবিক বা বন্ধনীভুক্ত বাক্যকেই) নিয়ন্ত্রণ করে।

---

* মানে '÷'-এর পরিধি ক্ষুদ্রতম, তার চেয়ে বৃহত্তর পরিধি '×'-এর, তার চেয়ে বৃহত্তর '+'-এর এবং '−'-এর পরিধি বৃহত্তম।

নিয়ম ২ ঃ "·"-এর পরিধি বৃহত্তম ; এ যোজকটি 'v', '⊃' ইত্যাদির চেয়ে বেশী শক্তিশালী, অর্থাৎ যোজকটি এর উভয় দিককার '$p \supset q$', '$p \vee q$' ইত্যাদিকে নিয়ন্ত্রণ করে।

উদাহরণ ঃ দ্বিতীয় নিয়ম অনুসারে

"$(p \supset q) \cdot p$"-এর বদলে লেখা যায় ঃ $p \supset q \cdot p$

কেননা উক্ত নিয়মে বলা হয়েছে "·" "⊃"-এর চেয়ে বেশী শক্তিশালী। ফলে বোঝা যায় "$p \supset q \cdot p$"-এর বক্তব্য হল ঃ $(p \supset q) \cdot p$

সেরকম,

$p \cdot (q \supset r)$	-এর বদলে লেখা যায় ঃ	$p \cdot q \cdot r$
$(p \vee q) \cdot r$	,, ,, ,, ,, ঃ	$p \vee q \cdot r$
$(p \equiv q) \cdot r$	,, ,, ,, ,, ঃ	$p \equiv q \cdot r$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$	,, ,, ,, ,, ঃ	$p \supset q \cdot q \supset p$

উক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে, এ লিপিতে "·" এরকম ক্ষেত্রে সংযোজনের কাজও করে, যতিচিহ্নের কাজও করে।

এখন, ধরা যাক "⊃", "v", "≡" ইত্যাদির কোনোটিকে "·"-এর চেয়ে, অথবা অন্য কোনো '⊃", 'v", "≡" প্রভৃতির চেয়ে, বেশী প্রভাবশালী যোজক হিসাবে ব্যবহার করতে চাই। তাহলে বন্ধনীর ব্যবহার ছাড়া আমাদের বক্তব্য ব্যক্ত করব কি করে, বাক্য-অন্বয় দেখাবো কি করে ? যথা

$(p \cdot q) \supset (q \vee p)$ $\quad$ $(q \cdot \sim p) \equiv (p \cdot \sim q)$ $\quad$ $(p \cdot q) \vee (q \cdot p)$

এসব বাক্য বন্ধনীমুক্ত করব কি করে ?

বন্ধনীর দৌরাত্ম্য থেকে মুক্তি পাবার প্রথম প্রয়াস হিসাবে আমরা এরকম ক্ষেত্রে প্রত্যেক বন্ধনীজোড়ের অন্তত প্রান্তিক সাথীটিকে বাদ দিতে পারি। যথা

$(p \cdot q) \supset (q \vee p)$	-এর বদলে লিখতে পারি ঃ	$p \cdot q) \supset (q \vee p$
$(q \cdot \sim q) \equiv (p \cdot \sim p)$	,, ,, ,, ,, ঃ	$q \cdot \sim q) \equiv (p \cdot \sim p$
$(p \cdot q) \vee (q \cdot p)$	,, ,, ,, ,, ঃ	$p \cdot q) \vee (q \cdot p$

যে বন্ধনীমুক্তি পদ্ধতি আলোচনা করছি সে পদ্ধতি অনুসারে অবশিষ্ট বন্ধনীও বর্জন করা যায়, —যায়, যদি বন্ধনীর বদলে বিন্দু ব্যবহার করি। যথা, সাথীহীন বন্ধনীগুলির বদলে বিন্দু ব্যবহার করে

$p \cdot q) \supset (q \vee p$	-এর বদলে লিখতে পারি ঃ	$p \cdot q \cdot \supset \cdot q \vee p$
$q \cdot \sim q) \equiv (p \cdot \sim p$	,, ,, ,, ঃ	$q \cdot \sim q \cdot \equiv \cdot p \cdot \sim p$
$p \cdot q) \vee (q \cdot p$	,, ,, ,, ,, ঃ	$p \cdot q \cdot \vee \cdot q \cdot p$

লক্ষণীয়, এরকম ক্ষেত্রে "⊃", "≡", "v"-এর দু পাশের বিন্দু দুটি সংযোগিক যোজক নয়, এগুলি বন্ধনীর পরিবর্ত হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে। এরকম ক্ষেত্রে "·" এক প্রকারের বন্ধনী, এরূপ বন্ধনীকে আমরা বিন্দুবন্ধনী বলে চিহ্নিত করতে পারি।

উপরে বন্ধনী বর্জনের যে কৌশলের কথা বলা হল তা একটি অনুজ্ঞার আকারে ব্যক্ত হল :

কোনো যোজককে যদি "·", "v", "⊃", "≡" প্রভৃতি যেকোনো যোজকের চেয়ে বেশী শক্তিশালী যোজক হিসাবে ব্যবহার করতে চাও তাহলে যোজকটির দুপাশে একটি করে বিন্দু যোগ কর।

বোঝা যায়, যোজকের শক্তির তারতম্য সম্পর্কে নিম্নোক্ত নিয়মটি রচনা করতে পারি।

নিয়ম ৩ : যে যোজকের পাশে বিন্দুবন্ধনী থাকে সে যোজকটির পরিধি এর বামের ও দক্ষিণের বিন্দুমুক্ত "v", "⊃", "≡" এবং সংযৌগিক " · "-এর পরিধি অতিক্রম করে যায়।

একটা কথা। আমরা বলেছি "v", "⊃", "≡" প্রভৃতিকে অধিকতর প্রভাবশালী করতে হলে এদের দু পাশে একটি করে বিন্দু বসাতে হয় (এরূপ বিন্দু পরস্পরের সাথী)। কিন্তু যদি ভুল বোঝার সম্ভাবনা না থাকে তাহলে উভয় পার্শ্বে বিন্দু না দিলেও চলে, কেবল এক পাশে বিন্দু বসিয়ে সাথীবিন্দু বাদ দেওয়া যায়। যথা

"$p \supset (q \supset r)$"-এর, বা সংক্ষেপে, "$p \supset (q \supset r$"-এর বদলে লিখতে পারি

$$p \supset \cdot q \supset r$$

এ ক্ষেত্রে প্রথম '⊃'-এর বামধারের সাথীবিন্দুটি না থাকলেও বোঝা যায় যে প্রথম "⊃"-এর প্রভাব বামধারে 'p' পর্যন্ত বিস্তৃত। সেরূপ

$p \cdot v \cdot q \cdot r$	-এর বদলে লিখতে পারি :	$p \vee \cdot q \cdot r$
$p \cdot q \cdot \supset \cdot p$	,, ,, ,, ,, :	$p \cdot q \cdot \supset p$
$\sim p \cdot \equiv \cdot p \cdot \sim p$	,, ,, ,, ,, :	$\sim p \equiv \cdot p \cdot \sim p$

উপরে যে নিয়মগুলি উল্লেখ করা হয়েছে কেবল সেগুলি অনুসরণ করলে চলে না। একটা উদাহরণ

$$[\,(p \vee \sim p) \supset (q \vee \sim q)\,] \vee [\,(r \vee \sim r) \supset (s \vee \sim s)\,] \qquad (১)$$

এ বাক্যের প্রান্তিক সাথীবন্ধনী বাদ দিয়ে বাক্যটিকে আরও সরল করা যায় :

$$(p \vee \sim p) \supset (q \vee \sim q)\,] \vee [\,(r \vee \sim r) \supset (s \vee \sim s) \qquad (২)$$

আবার প্রান্তিক সাথীবন্ধনী বাদ দিয়ে পাই

$$p \vee \sim p) \supset (q \vee \sim q\,] \vee [\, r \vee \sim r) \supset (s \vee \sim s \qquad (৩)$$

তৃতীয় নিয়ম অনুসারে অবশিষ্ট বন্ধনীর বদলে বিন্দু বসিয়ে পাই

$$p \vee \sim p \cdot \supset \cdot q \vee \sim q \cdot \vee \cdot r \vee \sim r \cdot \supset \cdot s \vee \sim s \qquad (৪)$$

মূল বাক্যে মধ্যবর্তী "v" মুখ্যযোজক, এর পরিধি বামদিকে 'p' পর্যন্ত আর ডানদিকে '$\sim s$' পর্যন্ত বিস্তৃত। কিন্তু (৪)-এর যতিচিহ্ন দেখে বোঝবার উপায় নেই যে মধ্যবর্তী "v"টি বাম দিকের ও ডান দিকের বিন্দুবেষ্টিত "⊃"-এর চেয়ে বেশী প্রভাবশালী। মধ্যবর্তী

"v"-এর প্রভাবক্ষেত্র যে বৃহত্তম তা আলোচ্য পদ্ধতিতে বোঝাতে হলে "v"-এর পার্শ্বস্থ বিন্দুর সংখ্যা বাড়িয়ে দিতে হয়। যেহেতু অপেক্ষাকৃত গৌণ যোজক "⊃"-এর দুপাশে একটি করে বিন্দু আছে, সেজন্য মুখ্য যোজক, মধ্যবর্তী "v"-এর দুপাশে দুটি করে বিন্দু বসানোর দরকার। এভাবে বিন্দু যোগ করে পাই

$$p \vee \sim p \cdot \supset \cdot q \vee \sim q : \vee : r \vee \sim r \supset \cdot s \vee \sim s \qquad (৫)$$

সেরূপ, প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে,

$$[\,(p \supset q) \supset r\,] \equiv (s \vee u)$$

এ বাক্যকে এভাবে লিখতে পারি

$$p \supset q \cdot \supset \cdot r : \equiv \cdot s \vee u$$

এ ক্ষেত্রে "≡"-এর ডানদিকে দুটি বিন্দুর প্রয়োজন নেই, কেননা তৃতীয় নিয়ম অনুসারে বিন্দুবেষ্টিত যোজকমাত্রই (এখানে "≡") বিন্দুবিহীন যোজকের (এখানে "v"-এর) চেয়ে বেশী প্রভাবশালী। আর একটি উদাহরণ।

$$\{[(p \supset q) \supset (r \supset s)] \supset (t \equiv u)\} \supset (v \vee w)$$

এ বাক্যকে বন্ধনীমুক্ত করতে গিয়ে প্রথম পর্যায়ে পাই

$$[\,p \supset q \cdot \supset \cdot r \supset s\,] \cdot \supset \cdot t \equiv u\} \cdot \supset \cdot v \vee w \qquad (1)$$

দ্বিতীয় পর্যায়ে

$$p \supset q \cdot \supset \cdot r \supset s : \supset \cdot t \equiv u\} \cdot \supset \cdot v \vee w \qquad (2)$$

[চতুর্থ '⊃'-এর শক্তিবৃদ্ধি করা হল]

তৃতীয় পর্যায়ে

$$p \supset q \cdot \supset \cdot r \supset s : \supset \cdot t \equiv u : . \supset \cdot v \vee w \qquad (3)$$

[পঞ্চম '⊃'-এর শক্তিবৃদ্ধি করা হল]

উক্ত দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে যোজকের পরিধি সম্বন্ধে আরও একটি নিয়ম রচনা করতে পারি।

নিয়ম ৪ : যে যোজক অধিকতর সংখ্যক বিন্দুর দ্বারা বেষ্টিত সে যোজক অপেক্ষাকৃত কম সংখ্যক বিন্দুর দ্বারা বেষ্টিত যোজকের (বা বিন্দুবিহীন যোজকের) চেয়ে বেশী প্রভাবশালী।

এ নিয়ম থেকে সংযৌগিক " · " সংক্রান্ত আর একটি নিয়ম নিঃসৃত হয়। এ নিয়মটিকে অনুজ্ঞার আকারে ব্যক্ত করতে পারি—

> যে বাক্যের মুখ্যযোজক " · " সে বাক্যকে বন্ধনীমুক্ত করতে হলে, প্রয়োজনমত, সংযৌগিক " · "-এর সঙ্গে আরও বিন্দু যোগ করতে হবে, এভাবে—:, : ., . :, : :

যথা

$$(\,(p \vee q) \cdot r\,) \cdot (s \vee t)$$

এ বাক্যটি লিখতে হবে এভাবে

$$p \vee q \cdot r : s \vee t$$

আর নিম্নোক্ত বাক্যটিকে

$$\{[p \vee (q \cdot r)] \cdot s\} \cdot (t \vee u)$$

এভাবে

$$p \vee \cdot q \cdot r : s : . t \vee u$$

আরও একটি উদাহরণ।

$$\{(q \vee r) \supset [q \vee (p \cdot r)]\} \supset \{[p \vee (q \cdot r)] \supset \{p \vee [q \supset (p \cdot r]\}\}$$

এ অতিজটিল বাক্যকে এভাবে লেখা যায় ঃ

$$q \vee r . \supset : q \vee \cdot p \cdot r . : \supset : : p \vee \cdot q \cdot r : \supset : . p \vee : q \supset \cdot p \cdot r$$

কি করে সাধারণ বন্ধনী পরিহার করা যায় দেখলাম। তবে যূথনিষেধ ব্যক্ত করতে হলে সাধারণ বন্ধনীর দরকার*। যথা

$$p \supset q \cdot q \supset r \cdot p \cdot \sim r$$

এ বাক্যের নিষেধ পেতে হলে বন্ধনী ব্যবহার করে লেখার দরকার*

$$\sim (p \supset q \cdot q \supset r \cdot p \cdot \sim r)$$

বিন্দুলিপির সঙ্গে পরিচয় হল। আমরা বিন্দুলিপিতে লিখতে পারি, সাধারণ বন্ধনীও ব্যবহার করতে পারি। আবার প্রয়োজনবোধে একই বাক্যে সাধারণ বন্ধনী ও বিন্দুবন্ধনী যুগপৎ ব্যবহার করতে পারি।

৪. বিকল্প সংকেতলিপি ঃ বন্ধনীমুক্ত লিপি

পূর্ববর্তী বিভাগে আমরা বন্ধনীমুক্তির কথা বলে আরম্ভ করেছিলাম, কিন্তু আসলে শেষ করেছি একটি বিকল্প বন্ধনী পদ্ধতির কথা বলে। ঐ পদ্ধতিতে সাধারণ বন্ধনীর স্থলে অন্য এক প্রকারের বন্ধনী, বিন্দুবন্ধনী ব্যবহার করা হয়। এখন যে সংকেতলিপির কথা বলতে যাচ্ছি তা প্রকৃতই বন্ধনীমুক্ত। এতে কোনো প্রকারের বন্ধনীর প্রয়োজন হয় না —কি সাধারণ বন্ধনী, কি বিন্দুবন্ধনী, কি অন্য আকৃতির বন্ধনী। অথচ বন্ধনীবিহীন হলেও এ লিপিতে লেখা বাক্য গ্রন্থনগত অনেকার্থতা দোষ থেকে মুক্ত থাকে।

এ লিপির উদ্ভাবন করেন পোলাণ্ডের প্রখ্যাত যুক্তিবিজ্ঞানী লুকাসিভিজ এবং পোলাণ্ডের যুক্তিবিজ্ঞানীরা প্রধানত এ লিপিই ব্যবহার করেন। এজন্য এ লিপিকে বলে পোল (পোলাণ্ডীয়) লিপি।

পোল লিপিতে অশাব্দ যোজক "·", "v", "⊃" প্রভৃতির পরিবর্তে বর্ণমালার অক্ষর ব্যবহার করা হয় ঃ

$$\sim \quad \vee \quad \cdot \quad \supset \quad \equiv$$

এদের পরিবর্তে ব্যবহৃত হয়, যথাক্রমে

N A K C E

—"Negation" থেকে '*N*', "Alternation" থেকে '*A*', "Konjunction" ('Conjunc-

---

* সাধারণ বন্ধনী ছাড়া যে বাক্য ব্যক্ত করা যেত না তা নয়। বিন্দুবন্ধনী ব্যবহার করে বাক্যটি এভাবে ব্যক্ত করা যেত $\sim : p \supset q \cdot q \supset r \cdot p \cdot \sim r$

tion') থেকে "K", "Conditional" থেকে "C" আর "(Material) Equivalence" (বা "Biconditional") থেকে "E"।

যে লিপি আমরা এতক্ষণ ব্যবহার করে আসছি তা হল রাসেলীয় সংকেতলিপি। এ সংকেতলিপিতে প্রত্যেকটি দ্বৈতাঙ্গী যোজক থাকে যোজিত অঙ্গ দুটির মাঝখানে; কেবল একাঙ্গী যোজক "$\sim$" থাকে নিষেধনীয় বাক্যের বাম ধারে। পোল লিপিতে কিন্তু প্রত্যেকটি যোজক স্থাপন করা যোজনীয় বাক্যের বামে। এ লিপিতে বিভিন্ন বাক্য কিভাবে ব্যক্ত হয় দেখ।

রাসেলীয় লিপি	পোল লিপি
$\sim p$	$N p$
$p \vee q$	$A p q$
$p \cdot q$	$K p q$
$p \supset q$	$C p q$
$p \equiv q$	$E p q$

যোজকের অব্যবহিত দক্ষিণ ধারের বাক্যগুলির ক্রম থেকে বোঝা যায়—কোন্‌টি প্রথম অঙ্গবাক্য কোন্‌টি দ্বিতীয়। যথা "$C p q$"-এতে 'p' প্রথম অঙ্গ (পূর্বকল্প) আর "$C q p$"-এতে 'p'—এ প্রাকল্পিকটির অনুকল্প।

'N' একাঙ্গী যোজক আর অন্য যোজকগুলি দ্বৈতাঙ্গী। কোনো দ্বৈতাঙ্গী যোজকের ব্যবহার দেখলে বুঝতে হবে যোজকটি তার অব্যবহিত ডানধারের দুটি বাক্য বা বাক্যযূথকে যুক্ত করেছে। পোল লিপিতে লেখা কোনো বাক্যে একাধিক যোজক থাকলে ডানধারের যোজকটি থেকে পড়া সুরু করতে হবে এবং ক্রমশ বামধারে এগিয়ে যেতে হবে। উদাহরণ

$$KCpqp$$

এখানে 'C' এর পরবর্তী 'p', 'q'-কে যুক্ত করেছে. 'Cpq'-এর বক্তব্য ঃ $p \supset q$। দ্বৈতাঙ্গী 'K'-ও দুটি অঙ্গবাক্য যুক্ত করবে। কোন্ দুটি? 'p', 'q' আগেই যূথবদ্ধ হয়েছে। কাজেই 'K'-এর দ্বারা যোজিত অঙ্গের একটি হল 'Cpq' আর একটি অবশ্যই সর্বদক্ষিণের 'p'। মানে উক্ত বাক্যটির বক্তব্য ঃ $(Cpq) \cdot p$ বা $(p \supset q) \cdot p$। আর একটি উদাহরণ ঃ

$$C\underline{KCpqp}q$$

এ বাক্যের দাগানো অংশের মানে আগেই উদ্ধার করেছি। এখন সর্ববাম ধারের 'C' কোন্ দুটি অঙ্গ যোজনা করবে? এ অঙ্গগুলির একটি স্পষ্টতই '$KCpqp$' (পূর্বকল্প) আর একটি সর্বদক্ষিণের 'q' (অনুকল্প)। মানে উক্ত বাক্যের বক্তব্য হল ঃ $(KCpqp) \supset q$। বন্ধনী ব্যবহার করে বাক্যটির অন্তর্নিহিত বিভিন্ন অঙ্গযোজনা এভাবে দেখানো যায়

$$C\{[K(Cpq)\, p]\}q$$

বা রাসেলীয় লিপিতে

$$((p \supset q) \cdot p) \supset q$$

"$p \vee q \vee r$"-কে পোল লিপিতে কিভাবে ব্যক্ত করব? এভাবে কি ঃ $Apqr$?

উত্তর : না, দ্বৈতাঙ্গী 'A' কেবল 'pq' কে যুক্ত করতে পারে, 'r'কে নয়। কাজেই '$Apqr$' সুগঠিত বাক্য নয়, দ্বৈতাঙ্গী 'A'-এর ডাইনে তিনটি অঙ্গ থাকার কথা নয়। "$p \vee q \vee r$" কে অনুবাদ করতে হবে এভাবে

$$AApqr^*$$

সেরকম "$p \vee q \vee r \vee s \vee t$" অনুবাদ করে পাব : $AAAApqrst^{**}$

ধরা যাক দুয়ের বেশী সংখ্যক অঙ্গবিশিষ্ট সংযৌগিক বাক্যকে পোল লিপিতে ব্যক্ত করতে হবে। এক্ষেত্রে একটি 'K' দিয়ে কাজ হতে পারে না।

"$p \cdot q \cdot r$" অনুবাদ করতে হবে এভাবে : $KKpqr$

"$p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t$" ,, ,, ,, ,, : $KKKKpqrst$

নিম্নোক্ত অনুবাদগুলি লক্ষ কর।

$KpKqr$	$p \cdot (q \cdot r)$
$KKpqr$	$(p \cdot q) \cdot r$
$ApAqr$	$p \vee (q \vee r)$
$AApqr$	$(p \vee q) \vee r$

আর একটি উদাহরণ।

$$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$$

—এ বাক্যকে পোল লিপিতে অনুবাদ করতে হবে। বোঝাবার সুবিধার জন্য তিনটি পর্যায়ে এ অনুবাদকর্ম করা হল।

$$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$$
$$Apq \vee r \equiv p \vee Aqr$$
$$AApqr \equiv ApAqr$$
$$EAApqrApAqr$$

'N' একাঙ্গী যোজক, কাজেই 'N' কেবল তার অব্যবহিত ডান ধারের একটি বাক্য বা বাক্যযূথকে বিশেষিত করে। 'Np'-এর বক্তব্য : $\sim p$; NNp-এর ? ডান ধারের 'N' p-কে নিষেধ করছে, আর বাম ধারের 'N' নিষেধ করছে পরবর্তী 'Np'-কে। মানে 'NNp'-এর বক্তব্য : $\sim\sim p$; সেরকম '$NNNp$'-এর : $\sim\sim\sim p$। আর একটি উদাহরণ।

$$NCqNp$$

এর কী বক্তব্য ? উত্তর : $Np = \sim p$, $CqNp = q \supset \sim p$, $NCqNp = \sim(q \supset \sim p)$

এখন, $NKpp$, $KNpp$, $KpNp$

-এর পার্থক্য লক্ষ কর।

"$NKpp$"-এর বক্তব্য : $N(p \cdot p)$ বা $\sim(p \cdot p)$

"$KNpp$"-এর বক্তব্য : $K\sim pp$ বা $(\sim p \cdot p)$

"$KpNp$"-এর বক্তব্য : $Kp\sim p$ বা $(p \cdot \sim p)$

---

* $p \vee q \vee r = (p \vee q) \vee r = Apq \vee r = AApqr$

** $p \vee q \vee r \vee s \vee t = (p \vee q) \vee r \vee s \vee t = Apq \vee r \vee s \vee t = (Apq \vee r) \vee s \vee t$
$= AApqr \vee s \vee t = (AApqr \vee s) \vee t = AAApqrs \vee t = AAAApqrst$

পোল লিপির নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষণীয়।

১. প্রারম্ভিক যোজকটি (সব চেয়ে বামধারের যোজকটি) হল মুখ্যযোজক।
২. কোনো যোজক যে বাক্যাংশ গঠন করে সে অংশটি তার অব্যবহিত* বামের যোজকটির পরিধির অন্তর্ভুক্ত। অর্থাৎ
যদি কয়েকটি যোজক পর পর* বিন্যস্ত থাকে তাহলে (বুঝতে হবে), যে যোজকের স্থান যত বামে সে যোজক তত বেশী প্রভাবশালী, সে যোজকের পরিধি তত বৃহৎ।

$$CCCpqpq$$

এখানে সর্ববাম ধারের 'C' মুখ্য যোজক। তৃতীয় 'C'-এর দ্বারা গঠিত বাক্য দ্বিতীয় 'C'-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত, আর দ্বিতীয় 'C'-এর দ্বারা গঠিত বাক্য প্রথম 'C'-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত। এ বাক্যের বক্তব্য :

$$[(p \supset q) \supset p] \supset q$$

এখানে প্রথম '$\supset$'-এর বদলে বসানো হয়েছে সবচেয়ে ডানধারের 'C'টি, দ্বিতীয় '$\supset$'-এর বদলে দ্বিতীয় 'C'টি, আর তৃতীয় '$\supset$'-এর বদলে বসানো হয়েছে বাম প্রান্তের 'C'টি।

নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষ কর।

$p \supset (q \supset p)$	$CpCqp$
$(p \supset q) \supset p$	$CCpqp$
$((p \supset q) \supset p) \supset p$	$CCCpqpp$
$p \supset (q \supset (p \supset p))$	$CpCqCpp$
$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$	$CCpqCNqNp$
$(p \supset q) \supset \sim(q \supset \sim p)$	$CCpqNCqNp$

$CCNqNpCpq$	$(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$
$CCpCqrCCpqCpr$	$[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
$CCpqCNKqrNKrp$	$(p \supset q) \supset [\sim(q \cdot r) \supset \sim(r \cdot p)]$

অনুশীলনী

১. কোনো বাক্যকলনে সুবা (সুগঠিত বাক্য, wff) গঠনের নিয়ম নিম্নরূপ :

(১) যে কোনো একক বাক্যগ্রাহক, 'p', 'q', 'r' ইত্যাদি, সুবা বলে গণ্য।
(২) যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '$\sim$(ব)'ও সুবা বলে গণ্য। তবে 'ব' যদি একাঙ্গী সুবা হয় তাহলে '$\sim$(ব)'-এর বন্ধনী বাদ দেওয়া যাবে।

---

* মানে, যদি দুই বা ততোধিক যোজকের মধ্যে কোনো অঙ্গবাক্য না থাকে ; যথা $CCCpqpq$ —এখানে 'CCC' পরপর বিন্যস্ত, এদের একটি আর একটির অব্যবহিত পরবর্তী, এদের দ্বিতীয়টি প্রথমটির, এবং তৃতীয়টি দ্বিতীয়টির।

(৩) যদি 'ব' সুবা হয় এবং 'ভ' সুবা হয় তাহলে 'ব v ভ' সুবা বলে গণ্য।

(৪) যদি কোনো প্রতীক-অনুক্রম উপরোক্ত নিয়ম থেকে নিঃসৃত হয়, অথবা গৃহীত সংজ্ঞা অনুসারে কোনো সুবার সমার্থক হয় তাহলে সে-প্রতীক-অনুক্রমটিও সুবা বলে গণ্য।

(৫) যদি 'ব' বা 'ভ' অনেকাঙ্গী সুবা হয় তাহলে তা দিয়ে অন্য সুবা গঠন করতে হলে অনেকাঙ্গী, 'ব' বা 'ভ'-কে বন্ধনীর মধ্যে রাখতে হবে।

এখন উক্ত নিয়ম প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সুবাগুলি নিষ্কাশন কর।

(i)	$p \cdot q$	(vi)	p / q
(ii)	$\sim p \supset q$	(vii)	$p \downarrow q$
(iii)	$(p \cdot \sim q) \supset r$	(viii)	$(p \downarrow p) \downarrow (p \downarrow p)$
(iv)	$p \supset (\sim q \supset r)$	(ix)	$(p / p) / (p / p)$
(v)	$\sim[\sim p \supset (p \supset q)]$	(x)	$\sim[q \supset (\sim p \supset q)]$

২. নিচে প্রত্যেকটি ছত্রে দুটি বাক্যযোজক আছে। একই ছত্রের যোজক দুটির পার্থক্য কী ?

—or—	Either—or—
—and—	—and furthermore—
—or—	—or else—

৩. নিম্নলিখিত বাক্যগুলিকে বিন্দুলিপিতে ব্যক্ত কর :

(i) $[(A \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset (A \supset C)$

(ii) $(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$

(iii) $(A \vee B) \supset \{[\sim C \cdot \sim(D \cdot E)] \vee (F \cdot G)\}$

(iv) $\{(A \vee B) \supset [A \vee (C \cdot B)]\} \supset \{[C \vee (A \cdot B)] \supset \{C \vee [A \supset (C \cdot B)]\}\}$

৪. নিম্নলিখিত বাক্যগুলিকে সাধারণ বন্ধনী—ভুবন্ধনী, ধনুর্বন্ধনী ও বাক্সবন্ধনী—দিয়ে ব্যক্ত কর :

(i) $A \supset B \cdot C \cdot \vee \cdot D$

(ii) $A \supset B \cdot C \supset D \cdot \vee \cdot D \supset E$

(iii) $A \equiv B \cdot \vee \cdot C \supset D : \supset : \sim D \vee E \cdot \equiv \supset \cdot C \vee F$

(iv) $A \vee B \cdot \supset : A \vee \cdot C \cdot B \,.: \supset :: C \vee \cdot A \cdot B : \supset : C \vee : A \supset \cdot C \cdot B$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে পোল লিপিতে ব্যক্ত কর :

(i) $A \vee B \vee C \vee D$

(ii) $A \cdot B \cdot C \cdot D$

(iii) $[(A \supset B) \cdot (B \supset C] \supset (A \supset C)$

(iv) $\sim\{[A \vee (B \cdot C)] \cdot \sim[(A \vee B) \cdot (A \vee C)]\}$

(v) $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset C]$

(vi) $[(\sim A \supset \sim B) \cdot (\sim C \supset \sim D) \cdot (B \vee D)] \supset (A \vee C)$

৬. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে রাসেলীয় লিপিতে : $\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\supset$ প্রভৃতি যোজক দিয়ে, ব্যক্ত কর।

(i)	*CCpNqCqNp*	(v)	*CCqpCCCpqqp*
(ii)	*CCpCqrCqCpr*	(vi)	*CCCCCpqCNrNsrtCCtpCsp*
(iii)	*CCqrCApqApr*	(vii)	*CCpqCNKqrNKrp*
(iv)	*KAApqNqAApqNp*	(viii)	*ANANANpqArAstANANspArAtp*

১০

মৌল সত্যসারণী ও প্রাথমিক যুক্তিবিধি

১. অমাধ্যম অনুমান

প্রত্যেকটি মৌল সত্যসারণী এক একটি যোজকের সংজ্ঞা। এসব সত্যসারণী, বা সারণীকৃত সংজ্ঞা, থেকে দু রকমের যুক্তিবিধি পাওয়া যায়। কেননা (দেখা যাবে) ঃ

(১) কোনো কোনো ক্ষেত্রে প্রদত্ত বাক্যের সত্যমূল্য জানা থাকলে অঙ্গবাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব অনুমান করা যায়, আবার

(২) কোনো কোনো ক্ষেত্রে অঙ্গবাক্যের (আণবিক অঙ্গের) সত্যমূল্য জানা থাকলে অঙ্গীবাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব অনুমান করা যায়।

দেখা যাবে,

(১´) যে বাক্য কেবল একটি সত্যমূল্য বিন্যাসেই সত্য বা মিথ্যা হতে পারে সে বাক্য থেকে প্রথম প্রকারের অনুমান করা যায়, অনুমান করা যায় ঃ অমুক বাক্য সত্য (বা মিথ্যা), সুতরাং বাক্যটির অমুক অঙ্গ সত্য (বা মিথ্যা)।

(২´) যে বাক্য একাধিক বিকল্প সত্যমূল্য বিন্যাসে সত্য বা মিথ্যা হতে পারে সে বাক্য থেকে দ্বিতীয় প্রকারের অনুমান করা যায়, অনুমান করা যায় ঃ অমুক অঙ্গবাক্যটি সত্য (বা মিথ্যা), সুতরাং অমুক অঙ্গীবাক্য সত্য (বা মিথ্যা)।

প্রাচীনদের অনুসরণে উক্তরূপ অনুমানকে অমাধ্যম অনুমান বলে অভিহিত করা যায়। নিচে যা বলা হল তাতে উক্ত সূত্র দুটির বহু উদাহরণ মিলবে। উদাহরণ ঃ

"$p \cdot q$"-এর সত্যসারণীটি লক্ষ কর।

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

"$p \cdot q$" সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' সত্য ও 'q' সত্য হয়। কাজেই "$p \cdot q$" সত্য—এ তথ্য থেকে অনুমান করতে পারি ঃ সুতরাং 'p' সত্য, অনুমান করতে পারি ঃ সুতরাং 'q' সত্য। মানে

এ যুক্তি-আকারগুলি বৈধ।

লক্ষণীয়

$$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \quad\quad (A \supset B) \cdot (C \supset D) \quad \left[\frac{p}{A \supset B}, \frac{q}{C \supset D}\right]^*$$
$$\therefore A \supset B \quad\quad \therefore C \supset D$$

এ যুক্তিগুলি উপরোক্ত বৈধ আকারের দৃষ্টান্ত, সুতরাং বৈধ। সেরকম উক্ত যুক্তিবিধি অনুসারে

$$A \cdot (B \cdot C) \quad\quad (A \cdot B) \cdot C$$
$$\therefore A \quad\quad \therefore A \cdot B$$

এ যুক্তিগুলিও বৈধ।

$$p \cdot q \quad\quad p \cdot q$$
$$\therefore p \quad\quad \therefore q$$

এ আকারের যুক্তিকে, এ আকারকে বা যুক্তিবিধিকে, বলে সংযোগীসমুচ্ছেদ (simplification)। "$p \cdot q$"-এর সত্যসারণীর দিকে আবার নজর দাও। দেখবে—যদি 'p' মিথ্যা হয় (৩য় ও ৪র্থ সারি দ্রষ্টব্য) তাহলে অনুমান করা যায়ঃ সুতরাং "$p \cdot q$" মিথ্যা। সেরূপ 'q'-এর মিথ্যাত্ব থেকে (২য় ও ৪র্থ সারি দ্রষ্টব্য) "$p \cdot q$"-এর মিথ্যাত্ব অনুমান করা যায়। তার মানে

$$\sim p \quad\quad \sim q$$
$$\therefore \sim(p \cdot q) \quad\quad \therefore \sim(p \cdot q)$$

এ যুক্তি-আকারগুলি বৈধ। এ যুক্তি-আকারের সিদ্ধান্তবাক্যে ডি মরগেন সূত্র প্রয়োগ করে আকার দুটি এভাবে ব্যক্ত করা যায়ঃ

$$\sim p \quad\quad \sim q$$
$$\therefore \sim p \vee \sim q \quad\quad \therefore \sim p \vee \sim q$$

আবার, এ আকারে 'p'-এর পরিবর্তে '$\sim p$' এবং 'q'-এর পরিবর্তে '$\sim q$' নিবেশন করে, এবং নিষেধের নিষেধ অনুসারে যুগ্ম ঢেউ বর্জন করে পাই

$$p \quad\quad q$$
$$\therefore p \vee q \quad\quad \therefore p \vee q$$

এ আকারের যুক্তিকে, এ যুক্তি-আকার বা যুক্তিবিধিকে, বলে বিকল্পযোজনা (addition)। বলা বাহুল্য, এ যুক্তিবিধি অনুসারে

$$A \supset B \quad\quad C \supset D \quad \left[\frac{p}{A \supset B}, \frac{q}{C \supset D}\right]^*$$
$$\therefore (A \supset B) \vee (C \supset D) \quad\quad \therefore (A \supset B) \vee (C \supset D)$$

এ যুক্তি দুটিও বৈধ।

"$p \cdot q$"-এর সত্যসারণী লক্ষ করলে আরও বুঝতে পারবে যে নিম্নোক্ত যুক্তি-আকারগুলি অবৈধ।

* এ "ভাষ্য" পড়তে হবে এভাবেঃ পাওয়া গেল—উক্ত আকারে "p"-এর পরিবর্তে "$A \supset B$" বসিয়ে, "q"-এর পরিবর্তে "$C \supset D$" বসিয়ে।

p	q
$\therefore\ p \cdot q$	$\therefore\ p \cdot q$
অবৈধ, কেননা এমন হতে পারে যে 'p' সত্য কিন্তু "$p \cdot q$" মিথ্যা (২য় সারি দ্রষ্টব্য)	অবৈধ, কেননা এমন হতে পারে যে 'q' সত্য কিন্তু "$p \cdot q$" মিথ্যা (৩য় সারি দ্রষ্টব্য)

এ আকারের বা এ আকারের অপযুক্তির যে দোষ তাকে সংযোগী-সংযুক্তি বলে চিহ্নিত করতে পারি।

আবার, নিম্নোক্ত আকারগুলিও অবৈধ।

$\sim(p \cdot q)$	$\sim(p \cdot q)$
$\therefore\ \sim p$	$\therefore\ \sim q$
অবৈধ, কেননা এমন হতে পারে যে "$p \cdot q$" মিথ্যা কিন্তু 'p' সত্য (২য় সারি দেখ)	অবৈধ, কেননা এমন হতে পারে যে "$p \cdot q$" মিথ্যা কিন্তু 'q' সত্য (৩য় সারি দেখ)

শেষোক্ত আকার দুটিকে এভাবেও ব্যক্ত করা যায়

$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
$\therefore\ \sim p$	$\therefore\ \sim q$

আর এ আকার দুটি থেকে পাই*

$p \vee q$	$p \vee q$
$\therefore\ p$	$\therefore\ q$

এ আকারের বা এ আকারের অপযুক্তির যে দোষ তাকে বিকল্পবর্জন বলে চিহ্নিত করা যায়।

যে বৈধ ও অবৈধ যুক্তি-আকারগুলির সাক্ষাৎ পেলাম সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল।

বৈধ		অবৈধ	
$p \cdot q$	$p \cdot q$	p	q
$\therefore\ p$	$\therefore\ q$	$\therefore\ p \cdot q$	$\therefore\ p \cdot q$
p	q	$p \vee q$	$p \vee q$
$\therefore\ p \vee q$	$\therefore\ p \vee q$	$\therefore\ p$	$\therefore\ q$

অমাধ্যম (সত্যাপেক্ষ) যুক্তি উক্ত আকারগুলির কোনো না কোনো রূপ পরিগ্রহ করে। অন্যান্য সত্যসারণী থেকে যেসব বৈধ যুক্তি-আকার উদ্ধার করব, দেখতে পাবে, সেগুলির প্রত্যেকটি হয় সংযোগীসমুচ্ছেদ নয়ত বিকল্পযোজনা নামক আকার। আর "$p \supset q$",

* অব্যবহিত পূর্ববর্তী আকার দুটিতে 'p'-এর পরিবর্তে '$\sim p$', 'q'-এর পরিবর্তে '$\sim q$' নিবেশন করে, আর যুগ্ম ঢেউ বর্জন করে

"$p \vee q$" প্রভৃতি বাক্য থেকে অবৈধভাবে অনুমান করলে যে অপযুক্তি পাওয়া যাবে তা হয় সংযোগী-সংযুক্তি নয়ত বিকল্পবর্জন দোষে দুষ্ট।

এবার "$p \vee q$"-এর সারণীটি লক্ষ কর।

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

এ সারণীর ৪র্থ সারি লক্ষ করলে বোঝা যাবে

$\sim(p \vee q)$ $\quad\quad$ $\sim(p \vee q)$

$\therefore \sim p$ $\quad\quad$ $\therefore \sim q$

এ যুক্তি-আকার (বা এ আকারের যুক্তি) বৈধ।

এদের এ ভাবেও ব্যক্ত করা যায়

$\sim p \cdot \sim q$ $\quad\quad$ $\sim p \cdot \sim q$

$\therefore \sim p$ $\quad\quad$ $\therefore \sim q$

স্পষ্টতই এগুলি সংযোগীসমুচ্ছেদ নামক যুক্তি-আকার। আবার,

p $\quad\quad$ q

$\therefore p \vee q$ $\quad\quad$ $\therefore p \vee q$

(১ম ও ২য় সারি দেখ) $\quad$ (১ম ও ৩য় সারি দেখ)

এ যুক্তি আকারগুলিও বৈধ। এগুলি ত আমাদের পূর্বপরিচিত বিকল্পযোজনারই পুনরাবৃত্তি।

লক্ষণীয় যে, নিম্নোক্ত যুক্তি-আকারগুলি অবৈধ

$p \vee q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$
$\therefore p$	$\therefore q$	$\therefore \sim(p \vee q)$	$\therefore \sim(p \vee q)$
৩য় সারি দেখ,	২য় সারি দেখ,	৩য় সারি দেখ,	২য় সারি দেখ,
এখানে $p=0$	এখানে $q=0$	এখানে '$p \vee q$' সত্য	এখানে '$p \vee q$' সত্য

আরও লক্ষণীয়, প্রথম ও দ্বিতীয় আকারের যুক্তি বিকল্পবর্জন দোষে, আর তৃতীয় ও চতুর্থ আকারের যুক্তি সংযোগী-সংযুক্তি দোষে দুষ্ট।

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

এ সারণীর ২য় সারি লক্ষ করলে বোঝা যাবে

$\sim(p \supset q)$ $\quad\quad$ $\sim(p \supset q)$

$\therefore p$ $\quad\quad$ $\therefore \sim q$

এ আকারগুলি বা এ আকারের যুক্তি বৈধ।

এ আকারগুলি এভাবে ব্যক্ত করা যেত :

$p \cdot \sim q$ $\quad\quad$ $p \cdot \sim q$

$\therefore p$ $\quad\quad$ $\therefore \sim q$

স্পষ্টতই এগুলি সংযোগীসমুচ্ছেদ বিধির বিকল্প রূপ। আবার নিম্নোক্ত আকারগুলিও বৈধ

$\sim p$ $\therefore\ p \supset q$ (৩য় ও ৪র্থ সারি দেখ)

q $\therefore\ p \supset q$ (৩য় ও ১ম সারি দেখ)

এদের এভাবেও লেখা যেত

$\sim p$ $\therefore\ \sim p \vee q$

q $\therefore\ \sim p \vee q$

বলা বাহুল্য এগুলি বিকল্পযোজনা বিধির বিকল্পরূপ।

দেখা গেল, বিভিন্ন প্রকারের বৈধ অমাধ্যম যুক্তিকে হয় সংযোগীসমুচ্ছেদ নয়ত বিকল্পযোজনায় রূপান্তরিত করা যায়। কাজেই কেবল এ দুটি বৈধ যুক্তি-আকার মেনে নিলেই চলে। যেমন, মনে করা যাক

$$\sim(p \supset q)$$
$$\therefore\ p$$

বলে কোনো যুক্তিবিধি আমরা স্বীকার করি নি বা এরূপ বিধির সঙ্গে আমাদের পরিচয় নেই। তাহলেও কিন্তু "$\sim(A \supset B)$" থেকে বৈধভাবে "A" নিষ্কাশন করতে পারি, পারি এভাবে—

$\sim(A \supset B)$	(1)	
$\sim(\sim A \vee B)$	(2)	[1, Df $\supset$]
$\sim\sim A \cdot \sim B$	(3)	[2, DM]
$A \cdot \sim B$	(4)	[3, DN]
A		[4, simplification]

'$p \cdot q$', '$p \vee q$', 'p', 'q' ইত্যাদি থেকে যে সব বৈধ অমাধ্যম অনুমান পাওয়া যায় তার আকার নিচে তালিকাভুক্ত হল।

অমাধ্যম যুক্তি

বৈধ আকারের তালিকা*

$p \cdot q$	$\therefore$	p	$\sim p$	$\therefore$	$\sim(p \cdot q)$
$p \cdot q$	$\therefore$	q	$\sim q$	$\therefore$	$\sim(p \cdot q)$
$\sim(p \vee q)$	$\therefore$	$\sim p$	p	$\therefore$	$p \vee q$
$\sim(p \vee q)$	$\therefore$	$\sim q$	q	$\therefore$	$p \vee q$
$\sim(p \supset q)$	$\therefore$	p	$\sim p$	$\therefore$	$p \supset q$
$\sim(p \supset q)$	$\therefore$	$\sim q$	q	$\therefore$	$p \supset q$
$\sim(p / q)$	$\therefore$	p	$\sim p$	$\therefore$	p / q
$\sim(p / q)$	$\therefore$	q	$\sim q$	$\therefore$	p / q
এ স্তম্ভের প্রত্যেকটি আকারকে সংযোগীসমুচ্ছেদ নামক আকারে রূপান্তরিত করা যায়।			এ স্তম্ভের প্রত্যেকটি আকারকে বিকল্পযোজনা নামক আকারে রূপান্তরিত করা যায়।		

* আরও চারটি বৈধ আকার:

$p \downarrow q \quad \therefore\ \sim p, \qquad p \downarrow q \quad \therefore\ \sim q$

$p \quad \therefore\ \sim(p \downarrow q), \qquad q \quad \therefore\ \sim(p \downarrow q)$

আমরা সংযোগীসমুচ্ছেদের দুটি রূপ, আবার বিকল্পযোজনারও দুটি রূপ উল্লেখ করেছি। কিন্তু যেহেতু "·" ক্রমান্তরযোগ্য, আবার "v"ও ক্রমান্তরযোগ্য সেহেতু এদের দুটি করে রূপ মানবার দরকার নেই, একটি করে যুক্তি-আকার বা যুক্তিবিধি মেনে নিলেই চলে। আমরা নিম্নোক্ত আকার দুটিকে বৈধ অমাধ্যম অনুমানের মৌল আকার বা মৌল যুক্তিবিধি বলে গণ্য করব।

সংযোগীসমুচ্ছেদ	বিকল্পযোজনা
Simplification	Addition
$p \cdot q$	p
$\therefore p$	$\therefore p \vee q$

এখন ধরা যাক, "$A \cdot B$" থেকে 'B', বা 'A' থেকে "$B \vee A$" অনুমান করতে হবে। অনুমান করা যাবে এভাবে—

1. $A \cdot B$
2. $B \cdot A$ (1, ক্রমান্তরকরণ)
3. B (2, সংযোগীসমুচ্ছেদ)

1. A
2. $A \vee B$ (1, বিকল্পযোজনা)
3. $B \vee A$ (2, ক্রমান্তরকরণ)

নিম্নোক্ত আকার দুটিকে অবৈধ* অমাধ্যম অনুমানের প্রতিনিধিমূলক আকার বলে গণ্য করব।

অবৈধ আকার

p	$p \vee q$
$\therefore p \cdot q$	$\therefore p$
(সংযোগী-সংযুক্তি দোষে দুষ্ট)	(বিকল্পবর্জন দোষে দুষ্ট)

২. মাধ্যম অনুমান

যে বাক্য একাধিক সত্যমূল্য-বিন্যাসে সত্য (বা মিথ্যা) তার থেকে এরূপ অনুমান করা** যায় না : সুতরাং বাক্যটির অমুক অঙ্গ সত্য, অমুক অঙ্গ মিথ্যা। ধরা যাক "$p \vee q$" সত্য। এখন এ তথ্য থেকে 'p' সম্বন্ধে বা 'q' সম্বন্ধে নিশ্চয় করে কিছু বলা বলা যায় না। কেননা,

এমন হতে পারে যে "$p \vee q$" সত্য এবং 'q' সত্য, (অথবা)
এমন হতে পারে যে "$p \vee q$" সত্য এবং 'q' মিথ্যা।

কিন্তু যদি কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্য সম্বন্ধে জানা থাকে যে বাক্যটি সত্য এবং যদি বাক্যটির কোনো অঙ্গের সত্যমূল্য জানা থাকে তাহলে এরূপ অনুমান করা যায় : সুতরাং অপর অঙ্গটি সত্য, সুতরাং অপর অঙ্গটি মিথ্যা। ধরা যাক, জানা গেল, "$p \vee q$" সত্য, এবং এর 'p' মিথ্যা।

---

* ১৬৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য। ওখানে চারটি অবৈধ আকার উল্লেখ করা হয়েছিল।

** সিদ্ধান্ত করা

তাহলে বলা যাবে : সুতরাং 'q' সত্য (নিম্নোক্ত সারণীর ৩য় সারি দ্রষ্টব্য)। আবার মনে করা যাক, জানা গেল যে 'q' মিথ্যা (এবং "$p \vee q$" সত্য)। তাহলে বৈধভাবে অনুমান করা যাবে : সুতরাং 'p' সত্য (২য় সারি দ্রষ্টব্য)।

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

এর থেকে বোঝা গেল যে

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore\ q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \therefore\ p \end{array}$$

এ যুক্তি-আকারগুলি বৈধ।

এরূপ যুক্তির হেতুবাক্য সত্য হলে সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে না। "v"-এর সংজ্ঞা অনুসারে, "$p \vee q$" সত্য মানে : 'p', 'q'—এদের অন্তত একটি সত্য। এখন যদি "$p \vee q$" সত্য হয় এবং এ বাক্যের কোনো অঙ্গ মিথ্যা হয় তাহলে বলা যায় : অপর অঙ্গটি অবশ্যই সত্য। উক্তরূপ আকারের যুক্তির বা যুক্তি-আকারের নাম বিকল্প ব্যতিরেকী—Modus Tollendo Ponens,* সংক্ষেপে MTP। তবে বিকল্প ক্রমান্তরযোগ্য। কাজেই MTP বলে দুটি স্বতন্ত্র যুক্তি-আকার মানবার দরকার নেই। কেবল নিম্নোক্ত আকারটি মেনে নিলেই চলে।

বিকল্প ব্যতিরেকী (MTP)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore\ q \end{array}$$

এ যুক্তিবিধি অনুসারে

কোনো সত্য বৈকল্পিক বাক্যের প্রথম বিকল্পটি নিষেধ করা হলে বলা যায় : সুতরাং দ্বিতীয় বিকল্পটি সত্য।

এখন, যদি "$A \vee B$" আর "$\sim B$" থেকে 'A' সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করতে চাই তাহলে "$A \vee B$"-কে সমার্থক "$B \vee A$"-তে রূপান্তরিত করে নিয়ে উক্ত বিধি অনুসারে বলতে পারি : $B \vee A, \ \sim B \ \therefore A$। লক্ষণীয় যে

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \therefore\ \sim q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ q \\ \therefore\ \sim p \end{array}$$

(১ম ও ২য় সারি দেখ) (১ম ও ৩য় সারি দেখ)

এ আকারগুলি অবৈধ। '$p \vee q$' সত্য হলে এবং এর কোনো অঙ্গ সত্য হলে বলা যায় না : সুতরাং অপর অঙ্গটি মিথ্যা (কেননা এমন হতে পারে যে দুটি অঙ্গই সত্য)।

---

* Modus = mood, tollendo (tollere ক্রিয়াপদ থেকে) = by denying, ponens (ponere ক্রিয়াপদ থেকে) = affirms, MTP = the mood that by denying affirms [tollere = to deny, ponere = to affirm]

উক্ত আকারের অপযুক্তির যে দোষ তার নাম বিকল্পগ্রহণ দোষ (fallacy of affirming the alternant)। উদাহরণ :

রাম আসবে অথবা শ্যাম আসবে,
রাম আসবে ;
∴ শ্যাম আসবে না

এ যুক্তি বিকল্পগ্রহণ দোষে দুষ্ট।

এবার "$p \supset q$"-এর সারণীটি লক্ষ কর।

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

বুঝতে পারবে যে
$p \supset q,\ p\ \therefore\ q$—এ আকারটি বৈধ (১ম সারি দেখ)।
$p \supset q,\ \sim q\ \therefore\ \sim p$—এ আকারটিও বৈধ (৪র্থ সারি দেখ)॥

"$\supset$"-এর সংজ্ঞা অনুসারে, "$p \supset q$" সত্য—এ কথার মানে : এমন নয় যে 'p' সত্য এবং 'q' মিথ্যা। সুতরাং যদি জানা যায় যে, "$p \supset q$" সত্য, এবং 'p' সত্য, তাহলে অনুমান করা যায় : সুতরাং 'q' মিথ্যা নয় বা 'q' সত্য। আবার, যদি জানি 'q' মিথ্যা তাহলে অনুমান করতে পারি : 'p' সত্য নয়।

প্রথম আকারের যুক্তির বা যুক্তি-আকারের নাম পূর্বকল্প অন্বয়ী—Modus Ponendo Ponens*, সংক্ষেপে MP। আর দ্বিতীয় আকারের নাম অনুকল্প ব্যতিরেকী—Modus Tollendo Tollens,** সংক্ষেপে MT। আকার বা যুক্তিবিধি দুটি ভাল করে লক্ষ কর। এ আকার দুটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

পূর্বকল্প অন্বয়ী (MP)	অনুকল্প ব্যতিরেকী (MT)
$p \supset q$	$p \supset q$
p	$\sim q$
$\therefore\ q$	$\therefore\ \sim p$

লক্ষণীয় যে নিম্নোক্ত আকার দুটি অবৈধ :

$$p \supset q,\ \sim p\ \therefore\ \sim q$$
$$p \supset q,\quad q\ \therefore\quad p$$

কেননা, "$p \supset q$" সত্য আর 'p' মিথ্যা হলে : 'q' সত্যও হতে পারে (৩য় সারি দেখ)
'q' মিথ্যাও হতে পারে (৪র্থ সারি দেখ)

সুতরাং "$(p \supset q) \cdot \sim p$" থেকে '$q$' সম্বন্ধে কিছুই বৈধভাবে অনুমান করা যায় না।

* the mood that by affirming affirms
** the mood that by denying denies

আবার, "$p \supset q$" সত্য আর 'q' সত্য হলে : 'p' মিথ্যাও হতে পারে (৩য় সারি দেখ)
'p' সত্যও হতে পারে (১ম সারি দেখ)

সুতরাং "$(p \supset q) \cdot q$" থেকে 'p' সম্বন্ধে কিছুই বৈধভাবে অনুমান করা যায় না।

এখন,

$$p \supset q, \sim p \quad \therefore \quad q$$

আকারের অপযুক্তি যে দোষে দুষ্ট তার নাম পূর্বকল্পনিষেধ দোষ (fallacy of denying the antecedent)। আর

$$p \supset q, q \quad \therefore \quad p$$

আকারের অপযুক্তির যে দোষ তার নাম অনুকল্পগ্রহণ (fallacy of affirming the consequent)।†

উদাহরণ

যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান
ঐ পর্বত ধূমবান নয় ;
∴ ঐ পর্বত বহ্নিমান নয়।

—এ যুক্তি পূর্বকল্পনিষেধ দোষে দুষ্ট। অপরপক্ষে

যদি ঐ পর্বত ধূমবান হয় তাহলে ঐ পর্বত বহ্নিমান,
ঐ পর্বত বহ্নিমান ;
∴ ঐ পর্বত ধূমবান।

—এ যুক্তি অনুকল্পগ্রহণ দোষে দুষ্ট।

উক্ত দোষগুলি সম্পর্কে বিশেষভাবে অবহিত হওয়া দরকার। দৈনন্দিন জীবনে যে সব অপযুক্তি প্রয়োগ করা হয় সেগুলির অধিকাংশ পূর্বকল্পনিষেধ নয়ত অনুকল্পগ্রহণ দোষে, বা এদের সমজাতীয় কোনো দোষে, দুষ্ট।

এবার "p / q"-এর সারণীটির দিকে আবার নজর দাও।

p	q	p / q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

"p / q" সত্য—এ কথার মানে : 'p', 'q'–এদের অন্তত একটি মিথ্যা। এখন, ধরা যাক, জানা গেল যে—"p / q" সত্য, আরও জানা গেল এ বাক্যের একটি অঙ্গ সত্য। তাহলে স্পষ্টতই বৈধভাবে অনুমান করা যাবে : সুতরাং অপর অঙ্গটি মিথ্যা।

এর থেকে বোঝা যাবে যে নিম্নোক্ত আকারগুলি বৈধ :

† লক্ষণীয়, দ্বিতীয় হেতুবাক্যে প্রথম হেতুবাক্যের অঙ্গটি সম্বন্ধে কি বলা হয়—অঙ্গটি সত্য (গ্রহণ) নাকি মিথ্যা (নিষেধ)—সে দিকে নজর রেখে দোষগুলির নামকরণ করা হয়।

$p \mid q$ | $p \mid q$
p | q
$\therefore \sim q$ | $\therefore \sim p$
(২য় সারি দেখ) | (৩য় সারি দেখ)

এরূপ যুক্তির বা যুক্তি-আকারের নাম প্রতিকল্প অন্বয়ী—Modus Ponendo Tollens*, সংক্ষেপে MPT। এখন প্রতিকল্প ক্রমান্তরযোগ্য, কাজেই MPT বলে দুটি স্বতন্ত্র আকার মানবার দরকার নেই, কেবল নিম্নোক্ত আকারটি মেনে নিলেই চলে।

প্রতিকল্পঅন্বয়ী (MPT)

$$p \mid q$$
$$p$$
$$\therefore \sim q$$

সত্যসারণীটি লক্ষ করলে বুঝতে পারবে, নিম্নোক্ত আকারের যুক্তি অবৈধ :

$p \mid q, \sim p \therefore q$ (৪র্থ ও ৩য় সারি দেখ)

$p \mid q, \sim q \therefore p$ (৪র্থ ও ২য় সারি দেখ)

যে বৈধ আকারগুলি পেলাম সেগুলি একত্র করা হল।

মাধ্যম যুক্তি

বৈধ আকারের তালিকা

Modus Ponendo Ponens (MP) : $p \supset q, \ p \ \therefore \ q$
Modus Tollendo Tollens (MT) : $p \supset q, \sim q \therefore \sim p$
Modus Tollendo Ponens (MTP) : $p \vee q, \ \sim p \ \therefore \ q$
Modus Ponendo Tollens (MPT) : $p \mid q, \ p \ \therefore \sim q$

এখন "$p \vee q$", "$p \mid q$"-কে সমার্থক প্রাকল্পিক বাক্যে রূপান্তরিত করা যায়। কাজেই MTP আর MPT আকারের যুক্তি MP বা MT আকারে রূপান্তরিত করা যায়। (সুতরাং চারটি স্বতন্ত্র যুক্তিবিধি মানবার দরকার নেই, কেবল MP ও MT মেনে নিলেই চলে)। নিচে এ রূপান্তর দেখানো হল।*

(MTP) $p \vee q, \sim p \therefore q$
$\sim p \supset q, \sim p \therefore q$ (MP)

(MPT) $p \mid q, \ p \ \therefore \sim q$
$p \supset \sim q, p \therefore \sim q$ (MP)

আবার MP ও MT বলে দুটি ভিন্ন বিধি মানবারও দরকার হয় না। কেননা MTকে MPতে (MPকে MTতে) রূপান্তরিত করা যায়। এ রূপান্তর লক্ষ কর।

(MT) $p \supset q, \sim q \ \therefore \sim p$
$\sim q \supset \sim p, \sim q \ \therefore \sim p$ (MP)

* the mood that by affirming denies

অনুশীলনী

১. সংজ্ঞা সত্যসারণী বা যোজকের "নামতা" নির্দেশ করে দেখাও যে

(i) নিম্নোক্ত যুক্তি-আকারগুলি বৈধ ঃ

$\sim(p / q), \quad p; \quad \therefore \quad \sim q$

$p \vee q, \quad \sim p; \quad \therefore \quad q$

$p \supset q, \quad \sim q; \quad \therefore \quad \sim p$

(ii) নিম্নোক্ত আকারগুলি অবৈধ ঃ

$p \supset q, \quad \sim p; \quad \therefore \quad \sim q$

$\sim p \vee q, \quad \sim p; \quad \therefore \quad \sim q$

$\sim p \vee q; \quad \therefore \quad \sim p$

২. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলিকে MP আকারে রূপান্তরিত কর ঃ

$\sim A \supset \sim B, \quad B; \quad \therefore \quad A$

$A \vee \sim B, \quad \sim A; \quad \therefore \quad \sim B$

$\sim(\sim A \cdot B), \quad \sim A; \quad \therefore \quad \sim B$

৩. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর। যদি দেখ কোনো যুক্তি অবৈধ তাহলে যুক্তিটি যে দোষে দুষ্ট তার নাম কর।

(i) Cassius is not hungry,
∴ Cassius is not both lean and hungry.

(ii) Cassius is not both lean and hungry,
∴ Cassius is not hungry.

(iii) If it rains the match will not be played, but it does not rain;
∴ the match will be played.

(iv) If he studies hard, he will pass; and he passed;
∴ he has studied hard.

(v) It rains, ∴ it rains and pours

(vi) The cover of the book is either red or blue, it is red;
∴ it is not blue.

৪. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর ঃ

It is raining ∴ if it is not raining then it is raining

It is raining ∴ if it is raining then it is raining

৫. নিম্নোক্ত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(i) If it is raining then it is raining and snowing, and it is not snowing.
Is it raining ?

(ii) If he fails to score 34% marks or no grace marks are given, he will fail to pass. But he passed.
Were any grace marks given ?

(iii) If *A* is present or *B* is present the meeting will be held. The meeting was held.
Was A present ?

(iv) If the President or the Secretary is present, then the meeting will be held. But the meeting was not held.
Was the Secretary present ?

(v) If he is a college teacher then he is an M. Phil or a D. Phil. And he is a D. Phil.
Is he a college teacher ?

৬. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রমাণ করতে পার ?

$A \quad \therefore \; B \vee \sim B$

$A \cdot \sim A \quad \therefore \; B$

১১

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ ঃ সত্যসারণী

১. ভূমিকা

কোন্ প্রকারের সত্যাপেক্ষ বাক্য কখন সত্য কখন মিথ্যা—এ প্রশ্নের জবাব দিতে গিয়ে, বিভিন্ন বাক্য-যোজকের অর্থ ব্যাখ্যা করতে গিয়ে, আমরা কতকগুলি "নামতা" ও সংজ্ঞা সত্যসারণী (সংজ্ঞাসারণী) উল্লেখ করেছি। এদের মধ্যে যে কয়টি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল।

নিষেধক

নামতা		সত্যসারণী	
$\sim p$		p	$\sim p$
$\sim 1 = 0$		1	0
$\sim 0 = 1$		0	1

সংযৌগিক

নামতা	সত্যসারণী		
$p \cdot q$	p	q	$p \cdot q$
$1 \cdot 1 = 1$	1	1	1
$1 \cdot 0 = 0$	1	0	0
$0 \cdot 1 = 0$	0	1	0
$0 \cdot 0 = 0$	0	0	0

বৈকল্পিক

নামতা	সত্যসারণী		
$p \vee q$	p	q	$p \vee q$
$1 \vee 1 = 1$	1	1	1
$1 \vee 0 = 1$	1	0	1
$0 \vee 1 = 1$	0	1	1
$0 \vee 0 = 0$	0	0	0

প্রাকল্পিক

নামতা			
$p \supset q$	p	q	$p \supset q$
$1 \supset 1 = 1$	1	1	1
$1 \supset 0 = 0$	1	0	0
$0 \supset 1 = 1$	0	1	1
$0 \supset 0 = 1$	0	0	1

দ্বিপ্রাকল্পিক

নামতা			
$p \equiv q$	p	q	$p \equiv q$
$1 \equiv 1 = 1$	1	1	1
$1 \equiv 0 = 0$	1	0	0
$0 \equiv 1 = 0$	0	1	0
$0 \equiv 0 = 1$	0	0	1

কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যের অঙ্গগুলির নির্দিষ্ট সত্যমূল্য দেওয়া থাকলে সমগ্র বাক্যটির সত্যমূল্য কি করে নির্ণয় করা যায় তা আমরা জানি ; জানি—যোজকের নামতা (বা সত্যসারণীগত সংজ্ঞা) প্রয়োগ করে তা নির্ণয় করা যায়। এভাবে সকল সম্ভাব্য সত্যমূল্যবিন্যাস বিচার করে প্রদত্ত বাক্যের সত্যাসত্য (কোন্ বিন্যাসে সত্য, কোন্ বিন্যাসে মিথ্যা—তা) নির্ণয় করাকে বলে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ (truthvalue analysis)।

আমরা সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে যাচ্ছি সত্যসারণী গঠন করে। দেখতে পাব, উপরোক্ত নামতা ও সংজ্ঞাসারণী অনুসারে যে কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যের সত্যসারণী গঠন করা যায়। এখন, নির্ভুলভাবে সত্যসারণী গঠন করতে হলে

(১) সব সম্ভাব্য সত্যমূল্য বিন্যাস* (বা সারি) উল্লেখ করার দরকার, এবং

(২) বিন্যাসগুলি একই বিশেষ-ক্রমে উল্লেখ করা সুবিধাজনক।

মোট সত্যমূল্যবিন্যাস—সারি সংখ্যা

আমরা দেখেছি, 1টি বর্ণপ্রতীক দিয়ে গঠিত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে (যথা "$\sim p$"-এর ক্ষেত্রে) 2^1 বা 2টি সত্যমূল্য সম্ভব ঃ 1,0 ; 2টি বর্ণপ্রতীক** দিয়ে গঠিত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে 2^2 বা 4টি সত্যমূল্য বিন্যাস সম্ভব ঃ 1 1, 1 0, 0 1, 0 0। দেখা যাবে, 3টি বর্ণপ্রতীক বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে মোট 2^3 বা 8টি সত্যমূল্য বিন্যাস সম্ভব ঃ 1 1 1, 1 1 0, 1 0 1, 1 0 0, 0 1 1, 0 1 0, 0 0 1, 0 0 0। সামান্যীকরণ করে বলতে পারি ঃ 'n' দিয়ে যদি বাক্যস্থ বর্ণপ্রতীকের সংখ্যা বোঝানো হয়, তাহলে—

> n সংখ্যক বর্ণপ্রতীক বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে মোট 2^n সত্যমূল্য বিন্যাস সম্ভব, মানে উক্তরূপ বাক্যের নির্ভুল সত্যসারণীতে 2^n সারি থাকবে।

যথা, "$(p \cdot q \cdot r \cdot s) \supset (p \vee s)$"-এ বাক্যে আছে 4টি (স্বতন্ত্র) বর্ণপ্রতীক ঃ p, q, r, s ; কাজেই এ বাক্যের সত্যসারণীতে থাকবে 2^4 বা 16টি সারি।

সত্যমূল্যবিন্যাসের, বা সারির, ক্রম

সব যুক্তিবিজ্ঞানী যে একই ক্রম অনুসরণ করেন তা নয়। আমরা কোন্ ক্রম অনুসরণ করব, কী ক্রমে সত্যমূল্যবিন্যাসগুলি লিপিবদ্ধ করব, নিম্নোক্ত আকরস্তম্ভগুলি লক্ষ করলে তা বোঝা যাবে।

3-অঙ্গ-বিশিষ্ট বাক্যের সত্যসারণীর আকরস্তম্ভ

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

2-অঙ্গ-বিশিষ্ট বাক্যের সত্যসারণীর আকরস্তম্ভ

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

1-অঙ্গ-বিশিষ্ট বাক্যের সত্যসারণীর আকরস্তম্ভ

p
1
0

* "সত্যমূল্যবিন্যাস"-এর পরিবর্তে আমরা "সত্যসর্ত" কথাটিও উল্লেখ করব। যথা, বলব ঃ 11—এ সত্যসর্তে "$p \cdot q$" সত্য, আর 10 সত্যসর্তে "$p \cdot q$" মিথ্যা।

** এ প্রসঙ্গে বর্ণপ্রতীক বলতে বুঝতে হবে—স্বতন্ত্র বর্ণপ্রতীক। যথা, "$((p \supset q) \cdot p) \supset q$" —এ বাক্যে আছে দুটি (স্বতন্ত্র) বর্ণপ্রতীক ঃ p, q।

আকরস্তম্ভগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে : কোনো সত্যসারণীতে যতগুলি সারি থাকবার কথা তার অর্ধেক সংখ্যক 1 ও সমসংখ্যক 0 থাকবে প্রথম বর্ণপ্রতীকের নিচে। প্রথম বর্ণপ্রতীকের তলায় যতগুলি 1, তার অর্ধেক সংখ্যক 1 ও সমসংখ্যক 0 থাকবে দ্বিতীয় বর্ণপ্রতীকের নিচে ; এবং উক্তভাবে বিন্যস্ত অঙ্কগুচ্ছ বার বার লিখে সমস্ত স্তম্ভটি* ভর্তি করতে হবে। দ্বিতীয় বর্ণপ্রতীকের তলায় যতগুলি 1, তার অর্ধেক সংখ্যক 1 ও সমসংখ্যক 0 থাকবে তৃতীয় বর্ণ-প্রতীকের নিচে ; এবং উক্তভাবে বিন্যস্ত অঙ্কগুচ্ছ বার বার লিখে স্তম্ভটি ভর্তি করতে হবে। এভাবে ক্রমাগত অগ্রসর হয়ে যেতে হবে।

উদাহরণ : "$p \vee q \vee r \vee s$"—এ বাক্যে 4টি বর্ণপ্রতীক, কাজেই এ বাক্যের সত্য-সারণীতে 2^4 বা 16টি সারি থাকবে। উক্ত রীতি অনুসারে—

আকরস্তম্ভে প্রথম বর্ণ 'p'-এর নিচে থাকবে : 8টি 1 ও তার অব্যবহিত পরে 8টি 0॥

দ্বিতীয় বর্ণ 'q'-এর নিচে থাকবে : 4টি 1 ও তার অব্যবহিত পরে 4টি 0, এবং 1111,0000—এ অঙ্কগুচ্ছ পরপর 2 বার লিখতে হবে॥

তৃতীয় বর্ণ 'r'-এর নিচে থাকবে : 2টি 1 ও তার অব্যবহিত পরে 2টি 0, এবং 11,00—এ অঙ্কগুচ্ছ পরপর 4 বার পুনরুক্ত হবে॥

চতুর্থ বর্ণ 's'-এর নিচে থাকবে : 1টি 1 ও তার অব্যবহিত পরে 1টি 0, এবং 1,0—এ অঙ্কগুচ্ছ মোট 8 বার পুনরুক্ত হবে॥

উপরে যে রীতির কথা বলা হল তা একটি সূত্রের আকারে ব্যক্ত করতে পারি। ধরা যাক,

t হল মোট সারি সংখ্যা,

m হল বর্ণপ্রতীকের স্থান-(১ম, ২য় ইত্যাদি স্থান)-জ্ঞাপক সংখ্যা—১, ২, ৩ ইত্যাদি, তাহলে

কোনো m-তম বর্ণপ্রতীকের নিচে লিখতে হবে $\frac{t}{2^m}$ সংখ্যক 1 ও সমসংখ্যক 0,

এবং এ সত্যমূল্যগুচ্ছ বার বার** লিখে সব সারি (t-সংখ্যক সারি) ভর্তি করতে হবে।

উদাহরণ : $p \cdot q \cdot r \cdot s$—এ বাক্যের তৃতীয় বর্ণ '$r$'-এর নিচে সত্যমূল্য কী ক্রমে থাকবে ?

উত্তর : এখানে $t = 16$, 'r'-এর স্থান ৩য়, মানে m হল 3, সুতরাং 'r'-এর তলায় লিখতে হবে $\frac{16}{2^3}$ সংখ্যক বা 2টি 1 ও সমসংখ্যক 0, এবং এ অঙ্কগুচ্ছ (11,00) পরপর 4 বার লিখতে হবে।

* মানে—বাকি সারিগুলি

** প্রশ্ন : কতবার ? উত্তর : 2^{m-1} বার।

২. অগ্রগামী সত্যসারণী পদ্ধতি

কি করে আকরস্তম্ভ গঠন করতে হয় শিখলাম। এখন আমরা যে কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যের সত্যসারণী গঠন করতে পারব। সত্যসারণী গঠন করা যায় নানানভাবে। প্রথমে যে পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি তার নামকরণ করতে পারি অগ্রগামী সত্যসারণী পদ্ধতি। একটা উদাহরণ : ধরা যাক, আমরা

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$

এ বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে চাই এবং সেজন্য এর সত্যসারণী গঠন করতে চাই। প্রথমে প্রদত্ত বাক্য ও এর আকরস্তম্ভ এভাবে সাজিয়ে নিতে হবে :

p	q	$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

এটা গঠনীয় সারণীর কাঠামো। এখন আমাদের কাজ হবে আকরস্তম্ভের প্রত্যেক সারিতে যে সত্যসর্ত (সত্যমূল্যবিন্যাস) সে সত্যসর্তে প্রদত্ত বাক্য সত্য না মিথ্যা তা নির্ণয় করা। এজন্য প্রথমে দরকার আকরস্তম্ভের প্রত্যেক সারির ডান দিককার শূন্যস্থান পূর্ণ করা। আলোচ্য পদ্ধতিতে এ সব শূন্যস্থান পূরণ করতে হলে

আকরস্তম্ভে যে মূল্য দেওয়া আছে সে মূল্যগুলি মূল বাক্যের বর্ণপ্রতীকে আরোপ করতে হবে, এবং

মূল বাক্যের যোজক ও বন্ধনীগুলি অপরিবর্তিত রাখতে হবে।

প্রথম শিক্ষার্থীরা এ কাজ করবে দুটি পর্যায়ে।

প্রথমে, সারণী-কাঠামোর ডান-উপরের কোণে যে বাক্য আছে তার অন্তর্গত প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীকের নিচে পর পর (উপর থেকে নিচের দিকে গিয়ে) সত্যমূল্য বসাবে—আকরস্তম্ভের মূল্য অনুসারে।

এভাবে মূল্য বসিয়ে উক্ত কাঠামোর শূন্যস্থান আংশিকভাবে পূরণ করে পাবে নিচেকার অসম্পূর্ণ সারণীটি :

p	q	$[(p$	$\supset q)$	$\cdot\ p]$	$\supset q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0

তারপর মূল বাক্যটিতে যোজক ও বন্ধনীগুলি যেমনভাবে বিন্যস্ত ঠিক তেমনভাবে এদের ব্যবহার করে ডান-নিচেকার কোণের সারিগুলির শূন্যস্থান পূরণ করবে (বাম-দিক থেকে ডান দিকে গিয়ে)।

এভাবে মূল বাক্যটির যোজক ও বন্ধনীর অবিকল প্রতিলিপি করে পাবে নিম্নোক্ত সারণীটি :

p	q	$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
1		$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1$
1		$[(1 \supset 0) \cdot 1] \supset 0$
0		$[(0 \supset 1) \cdot 0] \supset 1$
0	0	$[(0 \supset 0) \cdot 0] \supset 0$

এখন এ সারণীর ডান-নিচেকার কোণে যে চারটি "আঙ্কিক বাক্য" আছে সেগুলির প্রত্যেকটিকে সরলীকরণ করে সত্যমূল্য 1 বা 0-তে পৌঁছাতে হবে। এরূপ সরলীকরণ অতীব সহজ কাজ ; সরলীকরণ করতে হবে বিভিন্ন যোজকের নামতা অনুসারে। উদাহরণ হিসাবে প্রথম বাক্যটি নেওয়া যাক :

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1 \qquad (১)$$

বলা বাহুল্য '$\supset$'-এর নামতা অনুসারে $1 \supset 1 = 1$; কাজেই উক্ত বাক্যটিকে সরলীকরণ করে পাই

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1 = [1 \cdot 1] \supset 1 \qquad (২)$$

এখন "$\cdot$"-এর নামতা অনুসারে $1 \cdot 1 = 1$, কাজেই উপরোক্ত বাক্যের ডান ধার সরলীকরণ করতে পারি এভাবে

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1 = [1 \cdot 1] \supset 1 = 1 \supset 1 \qquad (৩)$$

শেষোক্ত $1 \supset 1 = 1$, সুতরাং (৩) থেকে পাই

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1 = [1 \cdot 1] \supset 1 = 1 \supset 1 = 1$$

এভাবে উপরোক্ত সারণীর প্রত্যেকটি আঙ্কিক বাক্যের সরলীকরণ করে পাই নিম্নোক্ত পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণীটি।

উদাহরণ 1

		$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
1	1	$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset 1 = [1 \quad 1] \supset 1 = 1 \supset 1 = 1$
1	0	$[(1 \supset 0) \cdot 1] \supset 0 = [0 \quad 1] \supset 0 = 0 \supset 0 = 1$
0	1	$[(0 \supset 1) \cdot 0] \supset 1 = [1 \cdot 0] \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$
0	0	$[(0 \supset 0) \cdot 0] \supset 0 = [1 \cdot 0] \supset 0 = 0 \supset 0 = 1$

সর্বদাক্ষিণের স্তম্ভটি হল উক্ত সারণীর ফলস্তম্ভ। এ স্তম্ভ থেকে বোঝা যায়—যেকোনো সত্যসর্তে প্রদত্ত বাক্যটি সত্য।

সরলীকরণ সম্বন্ধে এ কথাটা মনে রাখবে।

> যে যোজকের শক্তি সব চেয়ে কম সে যোজক দিয়ে গঠিত বাক্যাংশ প্রথমে সরলীকরণ করতে হবে, তারপর আরও শক্তিশালী যোজক দিয়ে গঠিত বাক্যাংশ, তারপর আরও……এবং এভাবে এগিয়ে যেতে হবে।

উদাহরণ II

p	q	$(q \supset p) \cdot q \cdot {\sim}p$
1	1	$(1 \supset 1) \cdot 1 \cdot {\sim}1 = (1 \supset 1) \cdot 1 \cdot 0 = 0$
1	0	$(0 \supset 1) \cdot 0 \cdot {\sim}1 = (0 \supset 1) \cdot 0 \cdot 0 = 0$
0	1	$(1 \supset 0) \cdot 1 \cdot {\sim}0 = (1 \supset 0) \cdot 1 \cdot 1 = 0$
0	0	$(0 \supset 0) \cdot 0 \cdot {\sim}0 = (0 \supset 0) \cdot 0 \cdot 1 = 0$

এখানে প্রথম সংযোগীটির সরলীকরণ করার দরকার হল না। লক্ষণীয় (৩য় সারিতে) $1 \supset 0 = 0$ $\therefore (1 \supset 0) \cdot 1 \cdot 1 = 0$

ফলস্তম্ভটি লক্ষ করলে দেখা যাবে—প্রদত্ত বাক্যটি সর্ব অবস্থাতেই (সব সত্যসর্তে বা সত্যমূল্য বিন্যাসে) মিথ্যা। আর একটি উদাহরণ ; এ উদাহরণের বাক্যটিতে তিনটি স্বতন্ত্র বর্ণ প্রতীক, সুতরাং এর সারণীতে থাকবে মোট আটটি সারি।

উদাহরণ III

p	q		$[(p \supset q) \cdot q] \supset (p \vee r)$
1	1	1	$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset (1 \vee 1) = [1 \cdot 1] \supset (1 \vee 1) = 1 \supset (1 \vee 1) = 1 \supset 1 =$
1	1	0	$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset (1 \vee 0) = [1 \cdot 1] \supset (1 \vee 0) = 1 \supset (1 \vee 0) = 1 \supset 1 =$
1	0	1	$[(1 \supset 0) \cdot 0] \supset (1 \vee 1) = [0 \cdot 0] \supset (1 \vee 1) = 0 \supset (1 \vee 1) = 0 \supset 1 =$
1	0	0	$[(1 \supset 0) \cdot 0] \supset (1 \vee 0) = [0 \cdot 0] \supset (1 \vee 0) = 0 \supset (1 \vee 0) = 0 \supset 1 =$
0	1	1	$[(0 \supset 1) \cdot 1] \supset (0 \vee 1) = [1 \quad 1] \supset (0 \vee 1) = 1 \supset (0 \vee 1) = 1 \supset 1$
0	1	0	$[(0 \supset 1) \cdot 1] \supset (0 \vee 0) = [1 \quad 1] \supset (0 \vee 0) = 1 \supset (0 \vee 0) = 1 \supset 0$
0	0	1	$[(0 \supset 0) \cdot 0] \supset (0 \vee 1) = [1 \quad 0] \supset (0 \vee 1) = 0 \supset (0 \vee 1) = 0 \supset 1$
0	0	0	$[(0 \supset 0) \cdot 0] \supset (0 \vee 0) = [1 \quad 0] \supset (0 \vee 0) = 0 \supset (0 \vee 0) = 0 \supset 0$

ফলস্তম্ভটি লক্ষ কর। দেখবে, কোনো কোনো সত্যসর্তে (বস্তুত ৭টি ক্ষেত্রে) এ বাক্য সত্য, আর কোনো ক্ষেত্রে (৬ষ্ট ক্ষেত্রে, তারকাচিহ্নিত ক্ষেত্রে) বাক্যটি মিথ্যা।

উপরোক্ত সারণীর আঙ্কিক বাক্যগুলির সরলীকরণ করা হয়েছে চারটি পর্যায়ে (চারটি '=' লক্ষণীয়)। সহজবোধ্য করার জন্য এত বিশদভাবে সরলীকরণ করা হয়েছে। "মানসাঙ্ক" করে আরও অনেক সংক্ষেপে সরলীকরণ করা যেত। যথা, প্রথম সারিটি এভাবে লিখতে পারতাম

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset (1 \vee 1) = 1 \supset 1 = 1$$

বা এভাবে

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset (1 \vee 1) = 1$$

কি করে "মানসাঙ্ক" করলাম দেখ। একটু মনোনিবেশ করলেই দেখতে পেতে

$$[(1 \supset 1) \cdot 1] \supset (1 \vee 1)$$

-এর অনুকল্প 1, সুতরাং বাক্যটির সত্যমূল্য 1। সেরূপ তৃতীয় সারিটি এভাবে লিখতে পারতাম

$$[(1 \supset 0) \cdot 0] \supset (1 \vee 1) = 1$$

কেননা স্পষ্টতই পূর্বকল্পের মূল্য 0, সুতরাং প্রাকল্পিকটির সত্যমূল্য 1।

উক্তরূপে "মানসাঙ্ক" করে আরও কয়টি সত্যসারণী গঠন করা হল।

উদাহরণ 1

p	q	$q \supset [p \equiv (p \cdot q)]$
1	1	$1 \supset [1 \equiv (1 \cdot 1)=1 \supset [1 \equiv 1]=1$
1	0	$0 \supset [1 \equiv (1 \cdot 0)=0 \supset [1 \equiv 0]=1$
0	1	$1 \supset [0 \equiv (0 \cdot 1)=1 \supset [0 \equiv 0]=1$
0	0	$0 \supset [0 \equiv (0 \cdot 0)=0 \supset [0 \equiv 0]=1$

উদাহরণ 2

p	q	$(p \equiv q) \equiv [(p \supset \sim q) \cdot (\sim q \supset p)]$
1	1	$(1 \equiv 1) \equiv [(1 \supset \sim 1) \cdot (\sim 1 \supset 1)]=1 \equiv [0 \cdot 1]=0$
1	0	$(1 \equiv 0) \equiv [(1 \supset \sim 0) \cdot (\sim 0 \supset 1)]=0 \equiv [1 \cdot 1]=0$
0	1	$(0 \equiv 1) \equiv [(0 \supset \sim 1) \cdot (\sim 1 \supset 0)]=0 \equiv [1 \cdot 1]=0$
0	0	$(0 \equiv 0) \equiv [(0 \supset \sim 0) \cdot (\sim 0 \supset 0)]=1 \equiv [1 \cdot 0]=0$

উদাহরণ 3

p	q	r	$(p \supset q) \supset [(p \supset r) \supset (q \supset r)]$
1	1	1	$(1 \supset 1) \supset [(1 \supset 1) \supset (1 \supset 1)=1 \supset [1 \supset 1]=1$
1	1	0	$(1 \supset 1) \supset [(1 \supset 0) \supset (1 \supset 0)=1 \supset [0 \supset 0]=1$
1	0	1	$(1 \supset 0) \supset [(1 \supset 1) \supset (0 \supset 1)=0 \supset [1 \supset 1]=1$
1	0	0	$(1 \supset 0) \supset [(1 \supset 0) \supset (0 \supset 0)=0 \supset [0 \supset 1]=1$
0	1	1	$(0 \supset 1) \supset [(0 \supset 1) \supset (1 \supset 1)=1 \supset [1 \supset 1]=1$
0	1	0	$(0 \supset 1) \supset [(0 \supset 0) \supset (1 \supset 0)=1 \supset [1 \supset 0]=0$
0	0	1	$(0 \supset 0) \supset [(0 \supset 1) \supset (0 \supset 1)=1 \supset [1 \supset 1]=1$
0	0	0	$(0 \supset 0) \supset [(0 \supset 0) \supset (0 \supset 0)=1 \supset [1 \supset 1]=1$

৩. অগ্রপশ্চাৎগামী সত্যসারণী পদ্ধতি

অগ্রগামী সত্যসারণী প্রসঙ্গে আমরা সংক্ষেপকরণের কথা বলেছি। এখন যে পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি, দেখতে পাব, সে পদ্ধতিতে আরও অনেক সংক্ষিপ্ত আকারে সত্যসারণী গঠন করা যায়। আলোচ্য পদ্ধতিকে আমরা অগ্রপশ্চাৎগামী সত্যসারণী পদ্ধতি বলে চিহ্নিত করলাম।

আকরস্তম্ভের স্থানান্তর : সংজ্ঞাসারণীগুলি, এবং অগ্রগামী-পদ্ধতিতে-গঠিত সারণীগুলি লক্ষ করলে দেখবে—এদের প্রত্যেকটিতে উল্লম্ব রেখার বামধারে আকরস্তম্ভ, এবং দক্ষিণপ্রান্তে ফলস্তম্ভ। এখন যে পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি সে পদ্ধতি অনুসারে সারণী গঠন করতে হলে

পৃথকভাবে আকরস্তম্ভ গঠন না করে বর্ণপ্রতীকের সত্যমূল্যগুলি সরাসরি বাক্যস্থ বর্ণপ্রতীকের নিচে লিখতে হবে।

যথা

I

p	$\sim p$
1	0
0	1

II

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

এ সারণীগুলিতে যেভাবে বামধারে পৃথক আকরস্তম্ভ গঠন করা হয়েছে সেভাবে গঠন না করে, সরাসরি অঙ্গবাক্য 'p', 'q'—এদের নিচে আকরস্তম্ভ স্থাপন করতে হবে ; মানে অঙ্গ-বাক্যগুলির সত্যমূল্য লিপিবদ্ধ করতে হবে এভাবে ঃ

$\sim p$	$p \cdot q$
1	1 1
0	1 0
	0 1
	0 0
	১ ২

সংযৌগিক অপেক্ষকটি লক্ষ কর। এখানে স্তম্ভ দুটি হল আকরস্তম্ভ। স্তম্ভের তলদেশে ১, ২ দিয়ে বোঝানো হল কোন্ ক্রমে সত্যমূল্যগুলি বসানো হয়েছে। "১" বোঝাচ্ছে ঃ প্রথমে 'p'-এর মূল্য, "২" বোঝাচ্ছে ঃ তারপর 'q'-এর মূল্য।

এখন ফলস্তম্ভ পৃথকভাবে ডানদিকে না রেখে, সরাসরি যোজকের নিচে স্থাপন করতে পারি। এভাবে ফলস্তম্ভ স্থাপন করলে নিষেধক ও সংযৌগিকের সংজ্ঞাসারণী, I ও II, নিম্নোক্ত আকার ধারণ করবে।

১

$\sim$	p
0	1
1	0
২	১

২

p	$\cdot$	q
1	1	1
1	0	0
1	0	1
0	0	0
১	৩	২

কী ক্রমে স্তম্ভগুলি রচিত হয়েছে স্তম্ভের তলদেশের সংখ্যাগুলি লক্ষ করলে তা বোঝা যাবে। যথা, বোঝা যাবে—দ্বিতীয় সারণীতে প্রথমে 'p'-এর মূল্য তারপর 'q'-এর মূল্য এবং সর্বশেষে "$p \cdot q$"-এর মূল্য উল্লেখ করা হয়েছে।

দ্বিতীয় সারণীটি লক্ষ কর। এরকম কোনো সারণীর কোনো আঙ্কিক সারি পড়তে* হলে ঃ প্রথমে প্রথম অক্ষরটি তারপর তৃতীয় অক্ষরটি এবং সর্বশেষে মধ্যবর্তী অক্ষরটি পড়তে হবে। যথা, দ্বিতীয় সারি পড়তে হবে এভাবে ঃ যদি 'p'-এর মূল্য 1 হয়, 'q'-এর মূল্য 0 হয় তাহলে "$p \cdot q$"-এর মূল্য হবে 0।

* আকরস্তম্ভ রচনা করতে গিয়ে আমরা উপর দিক থেকে নিচের দিকে যাই, ঠিক ; সত্যসারণী পড়তে হলে সব সময় ডাইনে বামে, অনুভূমিক আকারে, চলতে হবে।

অগ্রপশ্চাৎগামী সত্যসারণী গঠন

যে পদ্ধতির কথা বলছি সে পদ্ধতি অনুসারে সারণী গঠন করতে হলে নিম্নোক্ত নির্দেশগুলি মনে রাখবে।

১ম নির্দেশ : বাক্যস্থ প্রত্যেকটি স্বতন্ত্র বর্ণপ্রতীকের নিচে—প্রথমটি থেকে সুরু করে—প্রস্তাবিত ক্রমে সত্যমূল্য উল্লেখ কর। এক কথায়, প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্যের নিচে আকরস্তম্ভ গঠন কর।

২য় নির্দেশ : একই বর্ণপ্রতীক যদি প্রদত্ত বাক্যে একাধিক বার থাকে তাহলে প্রতীকটির প্রথম দৃষ্টান্তের নিচে যে সত্যমূল্যমালা বসিয়েছ প্রত্যেকটি পরবর্তী দৃষ্টান্তের নিচে ঠিক সে মূল্যমালা বসাও। মানে, একই বাক্যে একই বর্ণপ্রতীক একাধিক স্থানে থাকলে প্রত্যেকটি স্থানে অভিন্ন আকরস্তম্ভ রচনা কর।

উদাহরণ ১ : উদাহরণ হিসাবে

$$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$$

—এ বাক্যটি নেওয়া যাক। এতে ২টি স্বতন্ত্র অঙ্গবাক্য। কাজেই এর সত্যসারণীতে ৪টি সারি থাকবে, এবং প্রথম অঙ্গবাক্য 'p'-এর নিচে থাকবে 11, 00, আর দ্বিতীয় অঙ্গ 'q'-এর নিচে থাকবে 10, 10। পরবর্তী 'p', 'q'-এর নিচে যথাক্রমে উক্ত মূল্যগুচ্ছ বসিয়ে পাই

উদাহরণ ১ : ১ম পর্ব

[(p	$\vee$	q)	$\cdot$	$\sim p$]	$\supset$	q
1		1		1		1
1		0		1		0
0		1		0		1
0		0		0		0
১		২		1		2*

প্রথমে ১ তারপর ২ সংখ্যক স্তম্ভ রচিত হল। লক্ষণীয় 1 হল ১-এর, আর 2 হল ২-এর পুনরাবৃত্তি।

৩য় নির্দেশ : যোজকের নামতা বা সংজ্ঞাসারণী অনুসারে ফলস্তম্ভ গঠন কর। মানে—যোজকের নিচেকার ফলস্তম্ভের-জন্য-নির্ধারিত শূন্যস্থান পূর্ণ কর।

৪র্থ নির্দেশ : ফলস্তম্ভগুলি গঠন করতে গিয়ে, যে যোজকের পরিধি ক্ষুদ্রতম সে যোজক দিয়ে কাজ আরম্ভ কর ; তারপর বাকি যোজকের মধ্যে যে যোজক ক্ষুদ্রতম সে যোজকের কাজ—তারপর বাকি যোজকের মধ্যে যা ক্ষুদ্রতম তার কাজ—এভাবে এগিয়ে চরম ফলস্তম্ভ রচনা কর।**

---

* এভাবে স্তম্ভের তলদেশে বাংলাতে, আবার ইংরেজীতে, লেখা হলে বুঝতে হবে : বাংলা-অক্ষরে-চিহ্নিত স্তম্ভটির অব্যবহিত পরেই ইংরেজী-অক্ষরে-চিহ্নিত স্তম্ভটি গঠন করা হয়েছে।

** যতগুলি যোজক ততগুলি ফলস্তম্ভ হবে। তবে এদের মধ্যে মুখ্য বা চরম ফলস্তম্ভ অবশ্য একটি—মুখ্য যোজকের নিচেকার স্তম্ভ। যেমন, আলোচ্য উদাহরণে '$\supset$'-এর নিচে যে স্তম্ভ রচিত হবে তাই এ সারণীর চরম ফলস্তম্ভ। সাধারণভাবে ফলস্তম্ভ বলতে চরম ফলস্তম্ভই বোঝায়।

এখন, আলোচ্য বাক্যের ক্ষুদ্রতম যোজক হল '~'। প্রথমে '~'-এর নিচে ফলস্তম্ভ রচনা করে পাই ঃ

উদাহরণ ১ ঃ ২য় পর্ব

$[(p$	$\vee$ $q)$	$\cdot$ $\sim$	$p]$	$\supset q$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0
১	২	৩	1	2

এখন উক্তরূপ গঠনপর্ব* বাদ দেওয়া যায়। "~"-এর নিচে ফলস্তম্ভ রচনা এতই সহজ যে আমরা মূল (অনিষেধিত বাক্যটির নিচে মূল্য না বসিয়ে সরাসরি "~"-এর তলায় বিরুদ্ধ সত্যমূল্য বসাতে পারি। যথা, প্রথমেই আমরা এভাবে অগ্রসর হতে পারতাম ঃ

$[(p$	$\vee$ $q)$	$\cdot$ $\sim p]$	$\supset q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0
১	২	১´	2

এখানে তৃতীয় স্তম্ভটি পেয়েছি ১-এর মূল্য নিষেধ করে, এজন্য এর নিচে ১´। এভাবে সংক্ষেপকরণ অনুমোদন করে একটি নির্দেশ দেওয়া হল।

৫ম নির্দেশ ঃ যদি কোনো আণবিক অঙ্গের—'p', 'q' ইত্যাদির, অব্যবহিত বামধারে '~' চিহ্ন থাকে তাহলে অঙ্গটির নিচে আকরস্তম্ভ গঠন করার দরকার নেই। এরকম ক্ষেত্রে অনিষেধিত অবস্থায় অঙ্গটির যে মূল্য গ্রহণ করার কথা, তার বিরুদ্ধ মূল্য সরাসরি '~'-এর নিচেই বসানো চলে।

যেমন, "$\sim p \cdot q$"-এর সত্যসারণী গঠন করতে গিয়ে প্রথম পর্বেই পেতে পারি ঃ

$\sim p$	$\cdot$ q
0	1
0	0
1	1
1	0

এখানে 'p'-এর নিচে 11,00 থাকবার কথা ; কাজেই সরাসরি "$\sim p$"-এর নিষেধচিহ্ন "~"-এর নিচেই 00,11 বসানো হল।

---

* কোনো অঙ্গবাক্যের নিচে আকরস্তম্ভ গঠন করে তারপর তার নিষেধ চিহ্নের নিচে ফলস্তম্ভ গঠন করা

এবার আমাদের মূল উদাহরণে ফিরে যাই। এখন* প্রদত্ত বাক্যের ক্ষুদ্রতম যোজক হল "v"। এ যোজকটি কোন্ সারিতে কী মূল্য গ্রহণ করবে বৈকল্পিকের নামতা প্রয়োগ করে তা নির্ধারণ করে পাই—

উদাহরণ ১ : ৩য় পর্ব

[(p	$\vee$	q)	$\cdot$	$\sim p$]	$\supset$	q
1	1	1		0		1
1	1	0		0		0
0	1	1		1		1
0	0	0		1		0
১	৪	২		৩		2

এখানে ৪ গঠন করা হয়েছে আকরস্তম্ভ ১ আর ২-তে যে সত্যমূল্য আছে তা বিচার করে—বৈকল্পিকের নামতা অনুসারে। উক্ত অসম্পূর্ণ সারিতে এখন ক্ষুদ্রতম যোজক হল " · "। কাজেই এবার "$(p \vee q) \cdot \sim p$" এ বাক্যাংশের " · "-এর নিচে ফলস্তম্ভ গঠন করতে হবে। এ বাক্যাংশটি সংযৌগিক; এর প্রথম সংযোগী "$p \vee q$"-এর মূল্য নির্ধারিত হয়েছে ৪ স্তম্ভে আর দ্বিতীয় সংযোগীটির ৩ স্তম্ভে। এখন এ সংযৌগিক বাক্যাংশ কোন্ সারিতে কী মূল্য গ্রহণ করতে পারে, সংযৌগিকের নামতা অনুসারে তা নির্ধারণ করে পাই—

উদাহরণ ১ : ৪র্থ পর্ব

[(p	$\vee$	q)	$\cdot$	$\sim p$]	$\supset$	q
1	1	1	0	0		1
1	1	0	0	0		0
0	1	1	1	1		1
0	0	0	0	1		0
১	৪	২	৫	৩		2

৪ ও ৩ স্তম্ভের মূল্য বিচার করে কিভাবে ৫ সংখ্যক ফলস্তম্ভ গঠন করা হয়েছে তা পৃথক-ভাবে দেখানো হল

[(p	$\vee$	q)	$\cdot$	$\sim p$]	$\supset$	q
	1		0	0		
	1		0	0		
	1		1	1		
	0		0	1		
	৪		৫	৩		

৪র্থ পর্ব দেখ। এখন বাকি থাকল বৃহত্তম যোজক "$\supset$"। প্রদত্ত বাক্যটির পূর্বকল্প একটি সংযৌগিক বাক্য, এ পূর্বকল্পটির মূল্য নির্ধারিত হয়েছে ৫ স্তম্ভে। এখন ৫-এতে

* "এখন" বলছি এজন্য যে, পূর্বে ক্ষুদ্রতম যোজক ছিল '$\sim$'। কিন্তু '$\sim$'-এর ফলস্তম্ভ রচনা করা হয়ে গেছে। বাকি আছে 'v' আর '$\supset$'। উক্ত বাক্যে এদের মধ্যে "v"-ই ক্ষুদ্রতম।

লিখিত আর ২-এতে লিখিত মূল্য বিচার করে—প্রাকল্পিকের নামতা অনুসারে— "⊃" -এর নিচে মুখ্য ফলস্তম্ভটি এভাবে রচনা করতে পারি

$[(p \vee q) \cdot \sim p]$	$\supset$	q
0	1	1
0	1	0
1	1	1
0	1	0
৫	৬	2

তাহলে সমগ্র সত্যসারণীটি নিম্নোক্তরূপ পরিগ্রহ করবে।

উদাহরণ ১ ঃ সর্বশেষ পর্ব

$[(p$	$\vee$	$q)$	$\cdot$	$\sim p]$	$\supset$	q
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0
১	৪	২	৫	৩	৬	2

চরম ফলস্তম্ভটি বিশেষভাবে দৃষ্টি-আকর্ষক করে তোলার জন্য এ অঙ্ক স্তম্ভের দুপাশে দুটি উল্লম্ব সমান্তরাল রেখা সংস্থাপিত হল।

লক্ষণীয় যে "ফলস্তম্ভ" কথাটি আপেক্ষিক। যা কোনো যোজকের ফলস্তম্ভ তা অন্য বৃহত্তর যোজকের আকরস্তম্ভের কাজ করতে পারে। যথা ৪ হল ১ ও ২-এর সম্পর্কে ফলস্তম্ভ, কিন্তু ৫ গঠন করতে গিয়ে ৪ ও ৩-কে আকরস্তম্ভ হিসাবে গণ্য করেছি। বলা বাহুল্য, কেবল মুখ্য যোজকের নিচেকার স্তম্ভটি কেবল-ফলস্তম্ভ, এটি আকরস্তম্ভ বলে গণ্য হতে পারে না। মুখ্য যোজকের নিচেকার স্তম্ভটি হল চরম ফলস্তম্ভ।

উদাহরণ ২

$(p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$(\sim p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$\sim q$
1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1
১	৫	২	৭	৩	৬	2	৮	৪

এখানে দুটি "·"-ই সমপর্যায়ের কাজেই প্রথম "·" টির নিচেও মুখ্য ফলস্তম্ভ রচনা করা যেত।

উদাহরণ ৩

$\sim$	$(p$	$\cdot$	$q)$	$\supset$	$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
৫	১	৩	২	৭	৬	1	৪	2

বুঝবার সুবিধার জন্য আমরা প্রত্যেক স্তম্ভের নিচে ক্রমজ্ঞাপক সংখ্যা—১, ২……ইত্যাদি উল্লেখ করেছি। যদি সত্যসারণী গঠনের কায়দা আয়ত্ত করে ফেল তাহলে এরূপ ক্রমসংখ্যা দিয়ে সারণীকে ভারাক্রান্ত করার দরকার নেই। কেবল চরম ফলস্তম্ভের দুধারে দুটি উল্লম্বরেখা দিয়ে স্তম্ভটি চিহ্নিত করবে।

আর একটি উদাহরণ ঃ

প্রথম পর্ব

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

p	q	q	r	p	r
1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0

দ্বিতীয় পর্ব

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

p	$\supset$	q	q	$\supset$	r	p	$\supset$	r
1	**1**	1	1	**1**	1	1	**1**	1
1	**1**	1	1	**0**	0	1	**0**	0
1	**0**	0	0	**1**	1	1	**1**	1
1	**0**	0	0	**1**	0	1	**0**	0
0	**1**	1	1	**1**	1	0	**1**	1
0	**1**	1	1	**0**	0	0	**1**	0
0	**1**	0	0	**1**	1	0	**1**	1
0	**1**	0	0	**1**	0	0	**1**	0

তৃতীয় পর্ব

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

$\supset$	$\cdot$	$\supset$
1	**1**	1
1	**0**	0
0	**0**	1
0	**0**	1
1	**1**	1
1	**0**	0
1	**1**	1
1	**1**	1

সর্বশেষ পর্ব

[(p	$\supset$	q)	$\cdot$	(q	$\supset$	r)]	$\supset$	(p	$\supset$	r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

৪. অগ্রগামী পদ্ধতি ও অগ্রপশ্চাৎগামী পদ্ধতি ঃ তুলনা

অগ্রপশ্চাৎগামী সত্যসারণী পদ্ধতির একটা অসুবিধা হল এই ঃ প্রদত্ত বাক্য কোন্ সত্যসর্তে কী মূল্য গ্রহণ করবে, মানে কোন্ সারিতে মুখ্য যোজকের নিচে কী মূল্যাঙ্ক বসবে, তা নির্ণয় করতে হলে কখনও বাম ধারের মূল্যের সঙ্গে অগ্রবর্তী ডানধারের মূল্যকে, আবার কখনও ডান ধারের মূল্যকে পশ্চাদবর্তী বাম ধারের মূল্যের সঙ্গে সম্পর্কিত করার দরকার। প্রথম তিনটি উদাহরণে স্তম্ভের নিচেকার সংখ্যাগুলি লক্ষ করলে দেখতে পাবে কিভাবে কতগুলি মূল্যাঙ্ক ডিঙিয়ে কখনও বাম দিক থেকে ডান দিকে, কখনও ডান দিক থেকে বাম দিকে যেতে হয়। তারপর এ পদ্ধতিতে গঠিত সারণীতে চরম ফলস্তম্ভটি কোনো নির্দিষ্ট জায়গায় থাকতে পারে না ; গঠিত সারণীর যে কোনো জায়গায়—একবারে প্রথমে* বা সারণীর মাঝখানে যে কোনো জায়গায়—স্তম্ভটি গড়ে উঠতে পারে।

কিন্তু অগ্রগামী পদ্ধতিতে গঠিত সারণীতে চরম ফলস্তম্ভটি সব সময় একটা নির্দিষ্ট জায়গায় গড়ে ওঠে—সারণীর সর্বদক্ষিণে। এ পদ্ধতিতে সারণী গঠনের সুবিধা হল এই ঃ এতে কোনো মূল্যাঙ্ক ডিঙিয়ে ডান ধার থেকে বাম ধারে যেতে হয় না ; কেবল সমীকরণগুলি পর পর সরলীকরণ করে যেতে হয়। কাজেই এতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা অনেক কম। কিন্তু এ পদ্ধতির অসুবিধা হল এই ঃ এতে প্রত্যেক সারিতে অনেক বেশী অক্ষর-মূল্যাঙ্ক, যোজক, বন্ধনী—লেখার দরকার। অপরপক্ষে, অগ্রপশ্চাৎগামীতে অনেক সংক্ষেপে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ সম্ভব।

তোমরা ইচ্ছামত যে কোনো পদ্ধতি ব্যবহার করতে পার। মনে হয়, প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে অগ্রগামী পদ্ধতি প্রয়োগ করা বাঞ্ছনীয়। তবে অগ্রপশ্চাৎগামী পদ্ধতি আয়ত্ত করে ফেললে স্বভাবতই কেউ আর অগ্রগামী পদ্ধতি ব্যবহার করতে চাইবে না।

৫. আরও দুরকম সত্যসারণীবিন্যাস

অগ্রপশ্চাৎগামী পদ্ধতিতে সত্যসারণী গঠন করতে হলে প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্যের নিচে আকরস্তম্ভ রচনা করতে হয়। ফলে অনেকগুলি স্তম্ভ ঘনসন্নিবিষ্ট হয়ে থাকে এবং সারণী

*যথা, '$\sim(p \vee q)$'—এ বাক্যের অগ্রপশ্চাৎগামী সারণীতে

অত্যন্ত জটিল আকার ধারণ করে। সারণীতে স্তম্ভসংখ্যা হ্রাস করার জন্য নিম্নোক্ত রীতিও অনুসরণ করতে পার।

প্রথমে, অগ্রগামী পদ্ধতিতে যেমন করা হয় ঠিক তেমনি, আকরস্তম্ভগুলি বাম ধারে পৃথক ভাবে গঠন কর।

তারপর, আকরস্তম্ভের মূল্যের দিকে নজর রেখে প্রদত্ত বাক্যের প্রত্যেক যৌগিক অঙ্গের মূল্য নির্ণয় কর—মানে, প্রত্যেক যৌগিক অঙ্গের নিচে অন্তর্বর্তী ফলস্তম্ভ রচনা কর।

সর্বশেষে, যৌগিক অঙ্গগুলির স্তম্ভমূল্য সম্পর্কিত করে মূল বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ কর—মানে, মুখ্য যোজকের নিচে চরম ফলস্তম্ভ রচনা কর।

উদাহরণ (i)

p	q	$(p \cdot q)$	$\supset$	$(p \vee q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	0
		১		২

উদাহরণ (ii)

p	q	$\sim$	$[(p \supset q)$	$\equiv$	$(\sim q \supset \sim p)]$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1
			১	৩	২

এ সারণীর আকরস্তম্ভে কেবল 'p', 'q'-এর মূল্য দেওয়া আছে, ঠিক ; তবে 'p', 'q'-এর মূল্য থেকে সহজেই '$\sim p$', '$\sim q$'-এর মূল্য পেতে পারি। এজন্য পৃথকভাবে '$\sim p$', $\sim$'q'-এর নিচে অন্তর্বর্তী ফলস্তম্ভ রচনা করা হল না।

উপরোক্ত সারণীগুলিতে ডান-উপরের কোণে আছে কেবল মূল বাক্যটি এবং আছে অবিকৃত অবস্থায়। অনেকে উক্ত কোণে মূল বাক্যের প্রত্যেকটি যৌগিক অঙ্গ পৃথক পৃথক ভাবে লিখে, তারপর সর্বশেষে সমগ্র মূল বাক্যটি লেখেন। এবং আগে স্বতন্ত্রভাবে যৌগিক অঙ্গগুলির মূল্য নির্ণয় করে নিয়ে (অন্তর্বর্তী ফলস্তম্ভ রচনা করে নিয়ে) তারপর সর্বদক্ষিণে-লিখিত মূল বাক্যের মুখ্য যোজকের নিচে চরম ফলস্তম্ভ রচনা করেন। এ রীতি অনুসরণ করে একটি সত্যসারণী গঠন করা হল।

উদাহরণ (iii)

"$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$"-এর সত্যসারণী

p	q	$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1
		১	২	৩	৪	৫	৬

৬. স্বতসত্য, স্বতমিথ্যা ও পরতসাধ্য বাক্য*

যে বাক্যগুলির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করেছি সেগুলির সত্যসারণী লক্ষ করলে দেখতে পাবে ঃ

(ক) কোনো কোনো বাক্য সকল সম্ভাব্য সত্যসর্তেই সত্য—এদের সারণীতে ফলস্তম্ভে** 1 ছাড়া অন্য মূল্য থাকে না। এরূপ বাক্যকে স্বতসত্য বাক্য বলে।

উদাহরণ ঃ I, 1, ১ আর (i)-এতে যে বাক্যগুলির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হয়েছে সেগুলি।

(খ) কোনো কোনো বাক্য সকল সম্ভাব্য সত্যসর্তেই মিথ্যা—এদের সারণীতে ফলস্তম্ভে 0 ছাড়া অন্য মূল্য থাকে না। এরূপ বাক্যকে স্বতমিথ্যা বাক্য বলে। উদাহরণ ঃ II, 2, ২ আর (ii) দ্রষ্টব্য।

(গ) কোনো কোনো বাক্য কোনো কোনো সত্যসর্তে সত্য, অন্য কোনো সত্যসর্তে মিথ্যা—এদের সত্যসারণীর ফলস্তম্ভে 1-ও থাকে 0-ও থাকে। এরূপ বাক্যকে পরতসাধ্য আপতিক বা ব্যাপারবিষয়ক বাক্য বলে। উদাহরণ ঃ III, 3, ৩ ও (iii) দ্রষ্টব্য॥

নিচে উক্ত তিন প্রকারের বাক্য আরও বিশদভাবে আলোচিত হল। উক্ত তিন প্রকারের বাক্যের লক্ষণ দিতে গিয়ে সাধারণত বলা হয়—

স্বতসত্য ঃ যে বাক্য অনিবার্যভাবে বা আবশ্যিকভাবে সত্য, বা অবশ্যই সত্য—যে বাক্য মিথ্যা হতে পারে না, তাকে বলে স্বতসত্য (বাক্য)।

স্বতমিথ্যা ঃ যে বাক্য অনিবার্যভাবে মিথ্যা, অবশ্যই মিথ্যা—যে বাক্য সত্য হতে পারে না, তাকে বলে স্ববিরোধী বাক্য বা স্বতমিথ্যা (বাক্য)।

পরতসাধ্য ঃ যে বাক্য আবশ্যিকভাবে সত্যও নয় আবশ্যিকভাবে মিথ্যাও নয়—স্বতসত্যও নয়, স্বতমিথ্যাও নয়—তাকে বলে আপতিক বাক্য বা পরতসাধ্য (বাক্য)॥

উপরে বিভিন্ন প্রকারের বাক্যের লক্ষণ দিতে গিয়ে—"অনিবার্যভাবে সত্য" "অনিবার্যভাবে মিথ্যা", "অবশ্যই সত্য", "হতে পারে না" এরূপ বাক্‌ভঙ্গি প্রয়োগ করা হয়েছে। আবার বাক্যের সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে গিয়ে উক্তরূপ "বিশেষণ" ব্যবহার করা হয়। যথা বলা হয়

দুটি বিরুদ্ধ বাক্যের একটি সত্য হলে অন্যটি অবশ্যই মিথ্যা,
দুটি সমার্থক বাক্যের একটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা হতে পারে না।

* অধ্যায় ২, বিভাগ ৭ দ্রষ্টব্য।
** বলা বাহুল্য, এ প্রসঙ্গে "ফলস্তম্ভ" মানে ঃ চরম ফলস্তম্ভ।

এখন আমরা সত্যসারণী গঠন করতে শিখেছি। সত্যসারণী গঠন করতে গিয়ে দেখি—কোনো কোনো বাক্য এমন যে বাক্যটির আণবিক অঙ্গে যে মূল্যই আরোপ করি না কেন, বাক্যটি বস্তুত সব ক্ষেত্রেই সত্য (বা সব ক্ষেত্রেই মিথ্যা)। এরকম যে কোনো বাক্যের বেলায় বলা হয় : বাক্যটি অবশ্যই সত্য (বা অবশ্যই মিথ্যা)। বলা হয় : বাক্যটি মিথ্যা হতে পারে না (বা সত্য হতে পারে না)। আবার, এও দেখি—কোনো কোনো বাক্য বিশেষ সত্যসর্তে সত্য, অন্য সত্যসর্তে মিথ্যা। এরকম যে কোনো বাক্যের বেলায় বলা হয় : বাক্যটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। কাজেই এখন আমরা "অবশ্যই সত্য", "অবশ্যই মিথ্যা", "—হতে পারে", "—হতে পারে না" এ জাতীয় কথার মানে আরও পরিষ্কার করে বলতে পারি।

" 'ব' বাক্যটি অবশ্যই* সত্য" মানে : 'ব'-এর আণবিক অঙ্গে যে মূল্যই আরোপ করা হোক না কেন, দেখা যাবে, 'ব' সত্য।

" 'ব' বাক্যটি অবশ্যই মিথ্যা" মানে : 'ব'-এর আণবিক অঙ্গে যে মূল্যই আরোপ করা হোক না কেন, দেখা যাবে, 'ব' মিথ্যা।

" 'ব' সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে" মানে : 'ব'-এতে বা 'ব'-এর আণবিক অঙ্গে কোনো (কোনো) মূল্য আরোপ করলে দেখা যাবে, 'ব' সত্য, আর অন্য কোনো (কোনো) মূল্য আরোপ করলে দেখা যাবে, 'ব' মিথ্যা।

তাহলে আলোচ্য তিন প্রকারের সত্যাপেক্ষ বাক্যের লক্ষণ এভাবে দিতে পারি—

স্বতসত্য : যে সত্যাপেক্ষ বাক্য এমন যে এর আণবিক অঙ্গে যে মূল্যই আরোপ করা হোক না কেন, দেখা যায়, বাক্যটি সর্বক্ষেত্রেই সত্য, তাকে বলে স্বতসত্য (বাক্য)।

এরূপ বাক্য বৈধ বাক্য বলে অভিহিত হয়।

স্বতমিথ্যা : যে সত্যাপেক্ষ বাক্য এমন যে, এর আণবিক অঙ্গে যে মূল্যই আরোপ করা হোক না কেন, দেখা যায়, বাক্যটি সর্বক্ষেত্রেই মিথ্যা তাকে বলে স্বতমিথ্যা (বাক্য)। এরূপ বাক্য স্ববিরোধী বাক্য বলেও অভিহিত হয়। স্পষ্টতই এরূপ বাক্য অবৈধ বলে গণ্য।

পরতসাধ্য : যে সত্যাপেক্ষ বাক্য এমন যে বাক্যটিতে বা বাক্যটির আণবিক অঙ্গেতে কোনো (কোনো) মূল্য আরোপ করলে, দেখা যায়, বাক্যটি সত্য, অন্য কোনো মূল্য আরোপ করলে, দেখা যায়, বাক্যটি মিথ্যা সে বাক্যকে বলে পরতসাধ্য। স্পষ্টতই এরূপ বাক্য অবৈধ বলে গণ্য।

* বা আবশ্যিকভাবে বা অনিবার্যভাবে

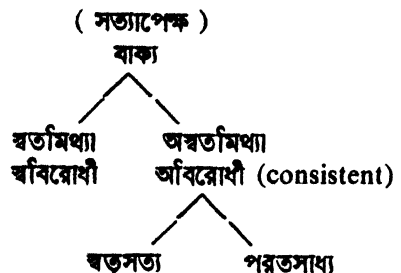
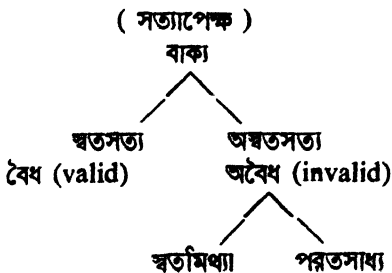
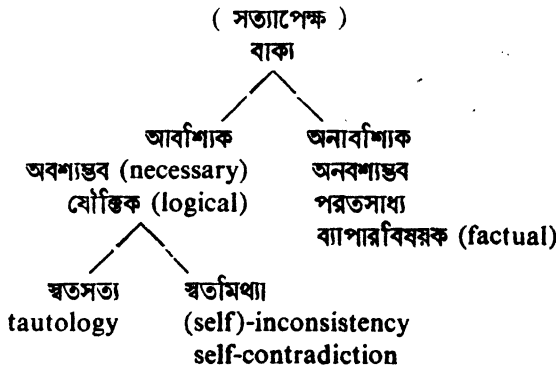
বিশেষভাবে লক্ষণীয় যে

"অবৈধ" বলতে স্বতমিথ্যা বোঝায় না। "অবৈধ" মানে ঃ বৈধ (বা স্বতসত্য) নয়। কাজেই স্বতমিথ্যা বাক্য যেমন অবৈধ, পরতসাধ্য বাক্যও ঠিক তেমনই অবৈধ বলে গণ্য।

সত্যসারণী গঠন না করেও অন্যভাবে বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা যায়। কিন্তু যদি কেবল সত্যসারণী দিয়ে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করব বলে স্থির করি তাহলে বলতে পারি ঃ

যে বাক্যের সত্যসারণীর মুখ্য স্তম্ভে—

কেবল 1 থাকে সে বাক্য স্বতসত্য (বৈধ)
কেবল 0 থাকে সে বাক্য স্বতমিথ্যা (সুতরাং অবৈধ)।
1-ও থাকে 0-ও থাকে সে বাক্য পরতসাধ্য (সুতরাং অবৈধ)।

উক্ত তিন প্রকারের বাক্য অন্য নামেও চিহ্নিত হয়। নিচে অন্যান্য নাম প্রয়োগ করে, এবং দ্বিকোটিক বিভাজন করে, বাক্যগুলির এবং এদের বিকল্প নামের সম্পর্ক দেখানো হল।

অনুশীলনী

১. সত্যসারণী গঠন না করে বল নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোনগুলি স্বতসত্য :

$A \equiv A$

$A \equiv B$

$\sim A \supset \sim A$

$A \equiv A \vee A$

$(A \equiv A) \equiv A$

$B \supset (B \supset B)$

$\sim B \vee A \vee \sim A$

$(A \supset B) \equiv (B \supset A)$

$(A \supset B) \equiv (\sim A \supset \sim B)$

২. 'ব' ও 'ভ'-তে এমন বাক্য বসাও যাতে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি স্বতসত্য বলে গণ্য হতে পারে :

ব · ভ	ব · ~ভ
ব ⊃ (ব · ~ভ)	ব ⊃ ~ব
ব ∨ (ব · ~ভ)	~ব ⊃ ব

৩. সত্যসারণী গঠন করে বল নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোনগুলি স্বতসত্য, কোনগুলি স্বতমিথ্যা, কোনগুলি পরতসাধ্য ?

(i) $\sim A \supset [B \equiv (A \vee B)$

(ii) $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset C]$

(iii) $(A \cdot B) \supset (A \vee B)$

(iv) $(A \vee B) \supset (A \cdot B)$

(v) $[(A \supset B) \cdot (C \vee D) \cdot (A \vee C)] \supset (B \vee D)$

(vi) $[(A \vee B) \cdot (C \vee D) \cdot (\sim A \vee \sim C)] \supset (\sim B \vee \sim D)$

(vii) $A \cdot \sim C \cdot (A \supset B) \cdot (B \supset C)$

(viii) $[(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)] \supset (A \equiv B)$

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈধতা নির্ণয় কর :

(i) $\sim A \equiv (A \downarrow A)$

(ii) $(A \cdot B) \equiv (\sim A \downarrow \sim B)$

(iii) $(A \vee B) \equiv \sim (A \downarrow B)$

(iv) $A \equiv (\sim A \mid \sim A)$

(v) $(\sim A \cdot B) \equiv \sim (\sim A \mid B)$

(vi) $(A \vee \sim B) \equiv (\sim A \mid B)$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যসারণী গঠন কর :

Neither *A* nor *B*
It is not the case that *A* unless *B*
Not *B* provided that if *A* then *B*
Neither *B* nor *A* only if *B* and *A*
A and *B* are together sufficient and necessary for *C*
A and *B* are jointly sufficient and *A* is necessary for *C*
On the condition that *A*, not *B* only if *B* then *A*.

৬. সত্যসারণী গঠন করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সত্যতা প্রমাণ কর :

$\sim(p \cdot q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \cdot \sim q$
$(p \cdot q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$
$(p \cdot q) \equiv \sim(\sim p \cdot \sim q)$

১২

বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়

১. সমার্থতা (Equivalence)

আমরা "সমার্থক", "সমার্থতা" এ কথাগুলি বহুবার প্রয়োগ করেছি ; " 'ব' সমার্থক 'ভ' ", " 'P' সম 'Q' "—এ আকারের বহু সূত্র, সমার্থতা সূত্র বা সমার্থতা বাক্য, উল্লেখ করেছি। এখন বৈধতা, স্বতসত্যতা, পরতসাধ্যতা সম্বন্ধে যা শিখেছি তা প্রয়োগ করে, "সমার্থক", "সমার্থতা"—এ কথাগুলির অর্থ পরিষ্কার করে বলতে পারি, এদের সংজ্ঞা দিতে পারি।

'ব' ও 'ভ' সমার্থক

এ কথার মানে :

(১) যদি 'ব' সত্য হয় তাহলে 'ভ' মিথ্যা হতে পারে না (অবশ্যই সত্য), এবং
(২) যদি 'ভ' সত্য হয় তাহলে 'ব' মিথ্যা হতে পারে না (অবশ্যই সত্য)।

আমরা "—হতে পারে না", "অবশ্যই সত্য" ইত্যাদির যে অর্থ করেছি সে অর্থ অনুসারে—

যদি 'ব' সত্য হয় তাহলে 'ভ' মিথ্যা হতে পারে না

এ কথার মানে : এমন কোনো সত্যমূল্যবিন্যাস নেই যাতে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা,

মানে : "ব ⊃ ভ" বৈধ।

যদি 'ভ' সত্য হয় তাহলে 'ব' মিথ্যা হতে পারে না

এ কথার মানে : এমন কোনো সত্যমূল্য-বিন্যাস নেই যাতে 'ভ' সত্য ও 'ব' মিথ্যা,

মানে : "ভ ⊃ ব" বৈধ ॥

তাহলে

" 'ব' ও 'ভ' সমার্থক"-এ কথার মানে : "(ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব)" বৈধ
এখন "(ব ⊃ ভ) · ভ (⊃ ব)"-এর পরিবর্তে লিখতে পারি : ব ≡ ভ
কাজেই, " 'ব' ও 'ভ' সমার্থক " মানে : "ব ≡ ভ" বৈধ।

যদি 'ব', 'ভ'-এর সমার্থক হয় তাহলে বলা হয়, 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে সমার্থতার সম্বন্ধ আছে ; এবং " 'ব' ও 'ভ' সমার্থক"—এ আকারের বাক্য সমার্থতা বাক্য বলে অভিহিত হয়।

* (১) ও (২) এভাবেও ব্যক্ত করা যেত :

যদি 'ব' মিথ্যা হয় তাহলে 'ভ' সত্য হতে পারে না, এবং
যদি 'ভ' মিথ্যা হয় তাহলে 'ব' সত্য হতে পারে না।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় যে—

সমার্থতা হল দ্বিপ্রাকল্পিকের বৈধতা।

" 'ব' ও 'ভ' সমার্থক" equiv " 'ব ≡ ভ' বৈধ" ॥*

২. সমার্থতা পরীক্ষা

কোনো প্রদত্ত বাক্য 'ব' অন্য প্রদত্ত বাক্য 'ভ'-এর সমার্থক কিনা তা নির্ণয় করতে হলে : 'ব' ও 'ভ' নিয়ে একটি দ্বিপ্রাকল্পিক গঠন কর, এবং (সত্যসারণী গঠন করে) বাক্যটির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ কর। যদি দেখ, দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যটি বৈধ তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক, নতুবা নয় ॥

উদাহরণ

(১) "$p \vee q$" আর "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" সমার্থক কিনা

(২) "$p \supset q$" আর "$q \supset p$" সমার্থক কিনা

তা নির্ণয় করা হল—

(১)

** $(p \vee q)$	$\equiv$	$\sim$	$(\sim p$	$\cdot$	$\sim q)$
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

দ্বিপ্রাকল্পিকটি বৈধ,

$\therefore$ "$p \vee q$" সম "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"

(২)

** $(p \supset q)$	$\equiv$	$(q \supset p)$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
1	1	1

দ্বিপ্রাকল্পিকটি বৈধ নয়,

$\therefore$ "$p \supset q$" আর "$q \supset p$" সমার্থক নয়।

সমার্থতা পরীক্ষা করতে হলে প্রদত্ত বাক্য দুটিকে '≡' দিয়ে যুক্ত করবারও দরকার নেই। বাক্য দুটির সত্যমূল্য পৃথকভাবে বিশ্লেষণ করে, ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করলেই বুঝতে পারবে এরা সমার্থক কিনা। যদি ফলস্তম্ভ দুটির প্রত্যেক সারিতে অভিন্ন সত্যমূল্য থাকে তাহলে বাক্য দুটি সমার্থক, নতুবা নয়। বলা বাহুল্য, এভাবে সমার্থতা পরীক্ষা করতে হলেও আসলে প্রচ্ছন্ন দ্বিপ্রাকল্পিকটিরই ('ব ≡ ভ'-এরই) বৈধতা পরীক্ষা করতে হয়।

উদাহরণ

"$p \cdot (p \vee q)$" আর "$p \vee (p \cdot q)$"

এ বাক্য দুটি সমার্থক কিনা তা নির্ণয় করা হল।

---

* পরবর্তী বিভাগ পড়ার পর বুঝতে পারবে : সমার্থতা হল পারস্পরিক প্রতিপত্তি। বুঝতে পারবে : " 'ব' ও 'ভ' সমার্থক" মানে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক এবং 'ভ' 'ব'-এর প্রতিপাদক।

** আকরস্তম্ভ দুটি অনুক্ত থাকল।

ব			ভ		
p	$\cdot$	$(p \vee q)$	p	$\vee$	$(p \cdot q)$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

যেহেতু ফলস্তম্ভ দুটির প্রত্যেক সারিতে একই সত্যমূল্য, সেহেতু প্রদত্ত বাক্য দুটি সমার্থক।

৩. সমার্থতা সম্বন্ধে কয়েকটি নিয়ম

সমার্থতা বলতে কী বোঝায় এবং কি করে সমার্থতা নির্ণয় করতে হয় তা যদি বুঝে থাক তাহলে একথাও বোঝা যাবে যে সমার্থতা সম্বন্ধে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি খাটে।

১. কোনো বাক্য 'ব' অন্য কোনো বাক্য 'ভ'-এর সমার্থক হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'ব $\equiv$ ভ' বৈধ হয়।

২. প্রত্যেক বাক্য তার নিজের সমার্থক ; মানে 'ব $\equiv$ ব' বৈধ।

৩. যদি 'ব' 'ভ'-এর সমার্থক হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে 'ভ' 'ব'-এর সমার্থক।

৪. যদি 'ব' 'ভ'-এর সমার্থক হয়, আর 'ভ' 'ম'-এর সমার্থক হয় তাহলে 'ব' 'ম'-এর সমার্থক।

৫. যে কোনো দুটি স্বতসত্য বাক্য পরস্পর সমার্থক* ; এবং স্বতসত্য বাক্য অন্যরূপ বাক্যের সমার্থক হতে পারে না।

৬. যে কোনো দুটি স্বতমিথ্যা বাক্য পরস্পর সমার্থক†, এবং স্বতমিথ্যা বাক্য অন্যরূপ বাক্যের সমার্থক হতে পারে না।

৭. যদি 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হয় তাহলে যেকোনো বাক্যে 'ব'-এর পরিবর্তে 'ভ', বা 'ভ'-এর পরিবর্তে 'ব' ব্যবহার করে যে বাক্য পাওয়া যাবে তা মূল বাক্যের সমার্থক। মানে—
সমার্থক বিনিময় করে যদি 'ব' বাক্যকে 'ভ'-তে রূপান্তরিত করা যায় তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক।

৪. প্রতিপত্তি (Implication)

আমরা দেখেছি কোনো কোনো বাক্যের মধ্যে সমার্থতার সম্বন্ধ খাটে। আর একটি প্রধান বাক্যসম্বন্ধ হল প্রতিপত্তি সম্বন্ধ। যুক্তিবিজ্ঞানে এ সম্বন্ধটির গুরুত্ব অসীম। কেন, তা বলছি।

যুক্তিবিজ্ঞানের প্রধান কাজ হল যুক্তির বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়, বৈধতা অবৈধতা প্রমাণ, করার পদ্ধতি উদ্ভাবন। কোনো বাক্য 'ভ' অন্য বাক্য 'ব' থেকে বৈধভাবে নিঃসৃত হয়

---

* যথা '$A \vee \sim A$' আর '$B \vee \sim B$' সমার্থক।

† যথা '$A \cdot \sim A$' আর '$B \cdot \sim B$' সমার্থক।

কিনা তা নির্ণয় করার জন্য যুক্তিবিজ্ঞান নানান পদ্ধতি উদ্ভাবন করার চেষ্টা করে। এখন, কোনো যুক্তি "ব ∴ ভ" বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে প্রতিপত্তির সম্বন্ধ থাকে, বা 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে। যদি জানতে পারি, 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে তাহলে একথাও জানা হয়ে গেল যে "ব ∴ ভ" বৈধ। কাজেই, 'যুক্তিবিজ্ঞানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ কাজ হল যুক্তির বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতি উদ্ভাবন'—এ কথার বদলে বলতে পারি : প্রতিপত্তি নির্ণয় পদ্ধতিই যুক্তিবিজ্ঞানের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পরে দেখব, এটা অত্যুক্তি নয় ; দেখব, যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতি হল প্রধানত প্রতিপত্তি নির্ণয় ও প্রতিপত্তি প্রমাণ পদ্ধতি। এখন,

'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে

এ কথার মানে : এমন হতে পারে না যে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা।
যদি 'ব' সত্য হয় তাহলে 'ভ' অবশ্যই সত্য ॥

আমরা "হতে পারে না", "অবশ্যই সত্য" প্রভৃতির যে অর্থ করেছি সে অর্থ অনুসারে
"এমন হতে পারে না যে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা"

এ কথার মানে : এমন কোনো সত্যমূল্যবিন্যাস নেই যাতে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা
মানে : 'ব' ⊃ 'ভ' স্বতসত্য।

তাহলে " 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে" মানে : "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য বা বৈধ।

এখন, যদি এমন হয় যে 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে তাহলে বলা হয় : 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে প্রতিপত্তির সম্বন্ধ আছে, বলা হয় : 'ব' হল 'ভ'-এর প্রতিপাদক (implicant) আর 'ভ' হল 'ব'-এর প্রতিপাদ্য (implicate)।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায় যে
প্রতিপত্তি হল প্রাকল্পিক বাক্যের বৈধতা।
" 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক" equiv " 'ব ⊃ ভ' বৈধ" ॥

বোঝা যায় যে—যদি কোনো প্রাকল্পিক বাক্য "ব ⊃ ভ" বৈধ হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে বলা যায় : 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে।

প্রতিপত্তি একমুখী সম্বন্ধ : আমরা এরকম উক্তি করেছি—'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে প্রতিপত্তি সম্বন্ধ আছে। কিন্তু এরকম উক্তি অস্পষ্ট ; স্পষ্টভাবে বলার দরকার—সম্বন্ধটি কোন্ দিক থেকে কোন্ দিকে যায়, 'ব' 'ভ'-কে, না 'ভ' 'ব'-কে প্রতিপাদন করে। কেননা প্রতিপত্তি একমুখী সম্বন্ধ। মানে, যেমন

"ব ⊃ ভ" অসম "ভ ⊃ ব"

সেরূপ

" 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে" অসম " 'ভ' 'ব'-কে প্রতিপাদন করে"

৫. প্রতিপত্তি পরীক্ষা

কোনো প্রদত্ত বাক্য 'ব' অন্য একটি প্রদত্ত বাক্য 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা সহজেই নির্ণয় করা যায়, এবং নির্ণয় করা যায় নানানভাবে। তবে সব ক্ষেত্রেই সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হয়।

প্রথম বিধান

'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে 'ব'-কে পূর্বকল্প ও 'ভ'-কে অনুকল্প করে, একটি প্রাকল্পিক বাক্য গঠন কর। যদি প্রাকল্পিক বাক্যটি স্বতসত্য হয় তাহলে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক, নতুবা নয়।

উদাহরণ 1

"$(p \vee q) \cdot \sim p$" এ বাক্যটি "$q \vee r$"-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা এভাবে নির্ণয় করব। প্রথম বাক্যটিকে পূর্বকল্প আর দ্বিতীয়টিকে অনুকল্প করে একটি প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করব। এ প্রাকল্পিকটি স্পষ্টতই

$$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset (q \vee r)$$

এখন এ বাক্যটির সত্যসারণী গঠন করে দেখা যায় (কষে দেখ): সারণীটির মুখ্যস্তম্ভে কেবল 1, অর্থাৎ প্রাকল্পিকটি বৈধ। সুতরাং "$(p \vee q) \cdot \sim p$" হল "$q \vee r$"-এর প্রতিপাদক।

দ্বিতীয় বিধান

প্রতিপত্তি পরীক্ষা করতে হলে প্রদত্ত বাক্য দুটিকে '$\supset$' দিয়ে যুক্ত না করলেও চলে। বাক্য দুটির সত্যমূল্য পৃথকভাবে বিশ্লেষণ করে, ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করলেই বুঝতে পারবে—প্রদত্ত 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা। স্তম্ভ দুটি তুলনা করলে যদি দেখা যায় যে, এমন কোনো সারি নেই যাতে 'ব'-এর স্তম্ভে 1 ও 'ভ'-এর স্তম্ভে 0 তাহলে বুঝতে হবে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক। বলা বাহুল্য, এভাবে প্রতিপত্তি পরীক্ষা করতে হলেও প্রচ্ছন্ন প্রাকল্পিকটিরই ("ব $\supset$ ভ"-এরই) বৈধতা পরীক্ষা করতে হয়।

উদাহরণ 2

"q" বাক্যটি "$p \equiv (p \cdot q)$"-এর প্রতিপাদক কিনা তা উক্ত বিধান অনুসারে নির্ণয় করা হল।

ব	ভ		
q	p	$\equiv$	$(p \cdot q)$
1	1	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
0	0	1	0
২	১	৪	৩

দেখা গেল, এমন কোনো সারি নেই যাতে 'ব'-এর স্তম্ভে 1 আর 'ভ'-এর (ফল)স্তম্ভে 0 ; ∴ প্রদত্ত 'ব' প্রদত্ত 'ভ'-এর প্রতিপাদক।

তৃতীয় বিধান

'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে সব সময় "ব ⊃ ভ"-এর, বা 'ব' ও 'ভ'-এর পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণী গঠন করার দরকার হয় না। যদি সত্যসারণী গঠন করতে গিয়ে দেখা যায়—কোনো সারিতে "ব ⊃ ভ"-এর ফলস্তম্ভে 0 বা 'ব'-এর ফলস্তম্ভে 1, 'ভ'-এর ফলস্তম্ভে 0, তাহলে আর অগ্রসর হবার দরকার নেই। এরকম ক্ষেত্রে অসম্পূর্ণ সারণীর ভিত্তিতে ঘোষণা করতে পার যে, 'ব' 'ভ-'এর প্রতিপাদক নয়।

উদাহরণ 3

(১) "$p \cdot \sim q$" বাক্যটি "$\sim p \vee q$"-কে

(২) "$(p \vee \sim q) \cdot r$ বাক্যটি "$(p \vee r) \cdot \sim q$"-কে

প্রতিপাদন করে কিনা তা এভাবে নির্ণয় করা যায়।

১

		ব		ভ
p	q	$(p \cdot \sim q)$	⊃	$(\sim p \vee q)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0

এখানে ফলস্তম্ভের দ্বিতীয় সারি দেখলেই বোঝা যায় 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে না ; কাজেই সত্যসারণীটি সম্পূর্ণ করার দরকার হল না।

২

			ব		ভ		
p	q	r	$(p \vee \sim q)$	$\cdot\ r$	$(p \vee r)$	$\cdot$	$\sim q$
1	1	1	1	1 1	1	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…

'ব', 'ভ'-এর সত্যসারণীতে ৮টি সারি থাকবার কথা। কিন্তু এখানে অসম্পূর্ণ ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করলে প্রথম সারিতেই দেখছি 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা, সুতরাং ঘোষণা করতে পারি 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক নয়।

৬. আর একটি নির্ণয় পদ্ধতি ঃ
পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি

আমরা দেখেছি যে কোনো কোনো ক্ষেত্রে (যদি এমন হয় 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক নয়) অসম্পূর্ণ সত্যসারণী গঠন করেও প্রতিপত্তি নির্ণয় করা যায়। এখন যে পদ্ধতির কথা বলতে যাচ্ছি সে পদ্ধতি অনুসারে, কেবল একটি সত্যসারণীসারি গঠন করে সকল ক্ষেত্রে প্রতিপত্তি নির্ণয় করা যায়। এ পদ্ধতিকে বলে পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি বা তর্কভিত্তিক সত্যসারণী পদ্ধতি। এ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে বাক্যের তর্কিত (তর্কের-খাতিরে-গৃহীত) বা কল্পিত সত্যমূল্যের ভিত্তিতে বিপরীত ক্রমে সত্যসারণী সারি গঠন করতে হয়। কোনো বাক্য (স্বত)সত্য, (স্বত)মিথ্যা, বৈধ বা অবৈধ এরূপ কোনো বিশ্বাসের বা কল্পনার ভিত্তিতে কি করে বিপরীত ক্রমে সত্যসারণীসারি গঠন করা সম্ভব আগে তাই দেখা যাক, পরে পদ্ধতিটি ও এর তাৎপর্য বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা যাবে।

ধরা যাক, আমরা মনে করছি

$$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$$

অবৈধ বা মিথ্যা। এ বাক্যটি অবৈধ—এ কথার মানে ঃ এ বাক্যের সত্যসারণীর কোনো সারিতে মুখ্য যোজকের নিচে 0 থাকবে। উক্ত বাক্যের মুখ্য যোজকের নিচে 0 বসিয়ে পাই

$$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$$

0

এখানে কেবল-0-দিয়ে-চিহ্নিত দ্বিতীয় ছত্রটি হল গঠনীয় সারণীসারির কাঠামো ; এর শূন্য-স্থানগুলি পূর্ণ করলে একটি সারণীসারি পাওয়া যাবে। এখন কোনো প্রাকল্পিক বাক্য মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এর পূর্বকল্প 1 আর অনুকল্প 0 হয়। পূর্বকল্প ও অনু-কল্পের নিচে যথাক্রমে 1 আর 0 বসিয়ে পাই

$[(p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$q]$	$\supset$	p
			1		0	0
			১			২

লক্ষণীয়, পূর্বকল্প "$(p \supset q) \cdot q$" একটি সংযৌগিক বাক্য। এ বাক্য সত্য—এ কথা বোঝাতে হলে এ বাক্যাংশের মুখ্য যোজকের, " · "-এর, নিচেই 1 স্থাপন করার দরকার। এখন, উক্ত সংযৌগিক সত্য হতে পারে যদি এর সংযোগী দুটি সত্য হয়। কাজেই এর সংযোগী দুটির, "$p \supset q$" আর "q"-এর নিচে সত্যমূল্য 1 বসাতে হবে। এ মূল্য বসিয়ে পাই

$[(p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$q]$	$\supset$	p
	1		1	1	0	0
	৩		১	৪		২

এবার "$p \supset q$"-এর অঙ্গ দুটির নিচে সত্যমূল্য বসাতে হবে। 'p', 'q'-তে কী মূল্য আরোপ করব ? "$p \supset q$" সত্য—এর থেকে সুনির্দিষ্টভাবে বলা যায় না, অমুক অঙ্গ সত্য, তমুক অঙ্গ মিথ্যা ; কেননা তিনটি বিভিন্ন সত্যসর্তে (11, 01, 00-এতে) বাক্যটি সত্য হতে পারে। তবে 'p', 'q'-এর সত্যমূল্য আগেই পেয়ে গেছি ঃ (২) অনুসারে $p=0$, (৪) অনুসারে $q=1$ —এ পূর্বেই-গৃহীত সত্যমূল্য দিয়ে শূন্যস্থান পূর্ণ করে পাই

$[(p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$q]$	$\supset$	p
0	1	1	1	1	0	0
↑	৩	↑	১	৪		২

(↑ q: ৪ দ্রষ্টব্য ; ↑ p: ২ দ্রষ্টব্য)

দ্বিতীয় ছত্রটি একটি সত্যসারণীসারি। লক্ষণীয়, সারিটি নিম্নোক্ত পূর্ণাঙ্গ সারণীর তৃতীয় সারি।

p	q	$[(p$	$\supset$	$q)$	$\cdot$	$q]$	$\supset$	p
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0

পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণী গঠন ও বিপরীতক্রমে সত্যসারণী গঠন পদ্ধতির পার্থক্য লক্ষ কর।

পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণী গঠন করতে হলে—আণবিক অঙ্গের ও ক্ষুদ্রতম যোজকের মূল্য থেকে আরম্ভ করে ক্রমশ বৃহত্তর যোজকের মূল্য নির্ধারণ করতে করতে এগিয়ে গিয়ে সবশেষে বৃহত্তম (মুখ্য) যোজকটির মূল্য নিরূপন করতে হয়।

অপরপক্ষে,

উক্তরূপে সত্যসারণীসারি গঠন করতে হলে বিপরীতক্রমে অগ্রসর হতে হয়। মানে বৃহত্তম যোজকের (কল্পিত) মূল্য থেকে আরম্ভ করে ক্রমশ ক্ষুদ্রতর যোজকের মূল্য উদ্ধার করতে করতে এগিয়ে গিয়ে সব শেষে কোনো আণবিক অঙ্গের মূল্য উদ্ধার করতে হয়।

৭. পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি ও প্রতিপত্তি নির্ণয়

আমরা জানি, 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করতে পারে যদি এবং কেবল যদি "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য হয়। এখন "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য কিনা, 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা—পরোক্ষ পদ্ধতি প্রয়োগ করে তা নির্ণয় করতে হলে : প্রথমে তর্কের খাতিরে ধরে নিতে হবে যে "ব ⊃ ভ" মিথ্যা ; তার মানে, গঠনীয় সারণীসারিতে মুখ্য যোজকের নিচে 0 স্থাপন করতে হবে। এবং এ তর্কিত সত্যমূল্যের ভিত্তিতে বিপরীতক্রমে অগ্রসর হয়ে একটি সারণীসারি গঠন করতে হবে ॥ এখন

> "ব ⊃ ভ" মিথ্যা—এ কথা ধরে নিয়ে অগ্রসর হয়ে যদি নির্ভুলভাবে, অবাধে, একটি সারি গঠন করা যায় তাহলে বুঝতে হবে প্রদত্ত বাক্য ("ব ⊃ ভ") অবৈধ,

অবৈধ, কেননা—এরকম ক্ষেত্রে বাক্যটির পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণী গঠন করলে যে সারিগুলি পাওয়া যেত তার একটিতে সম্পূর্ণ যৌগিক বাক্যটির মূল্য 0 (অর্থাৎ, মুখ্য যোজকের নিচেকার মূল্য 0), আর কোনো বাক্যের সত্যসারণীর ফলস্তম্ভে কোথাও 0 থাকলে, বাক্যটি অবশ্যই অ-স্বতসত্য বা অবৈধ* । অপরপক্ষে,

> "ব ⊃ ভ" মিথ্যা—এ কথা ধরে নিয়ে অগ্রসর হয়ে যদি নির্ভুলভাবে বা অবাধে, সত্যসারণীসারি গঠন করা সম্ভব না হয়, মানে—যদি সত্যসারণী গঠনের কোনো নিয়ম, যোজকের নামতা বা সংজ্ঞা, লঙ্ঘন না করে সারি গঠন সম্ভব না হয়, মানে —যদি সারণীসারি গঠন করতে গিয়ে স্বাবিরোধিতার সম্মুখীন হতে হয়, স্বাবিরোধী কল্পনা করতে হয়, তাহলে বুঝতে হবে প্রদত্ত বাক্য ('ব ⊃ ভ') বৈধ,

বৈধ, কেননা—এরকম ক্ষেত্র থেকে বোঝা যায় : বাক্যটির সত্যসারণীতে এমন কোনো সারি থাকতে পারে না যেখানে ফলস্তম্ভে 0 । ফলস্তম্ভে 0 কল্পনা করলে, 'ব ⊃ ভ' মিথ্যা—এ কল্পনা করলে, যদি স্বাবিরোধিতার সম্মুখীন হতে হয় তাহলে বুঝতে হবে : ফলস্তম্ভে কোথাও 0 থাকতে পারে না, মানে মূল বাক্যটি বৈধ। আর "ব ⊃ ভ" যদি বৈধ হয় তাহলে অবশ্যই 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক।

* মানে, স্বতমিথ্যা বা পরতসাধ্য।

উদাহরণ

"$[(p \supset q) \cdot \sim p] \supset \sim q$"—এ বাক্য বৈধ কিনা
"$(p \supset q) \cdot \sim p$" বাক্যটি "$\sim q$"-কে প্রতিপাদন করে কিনা

তা আলোচ্য পদ্ধতিতে এভাবে নির্ণয় করতে পারি। ধরা যাক, প্রাকল্পিকটি মিথ্যা। এর মুখ্য যোজকের নিচে 0 বসিয়ে এবং এ তর্কিত মূল্য অনুসারে বিপরীতক্রমে সারি গঠন করে পাই

$$[(p \supset q) \cdot \sim p] \supset \sim q$$
0 1 1 1 1 0 0 0 1
↑ ৪ ↑ ১ ৫ ৬ ২ ৩ —— ৩ দ্রষ্টব্য
—— ৬ দ্রষ্টব্য

এ সারিটি গঠন করতে কোনো বাধার, অসঙ্গতি বা স্ববিরোধিতার, সম্মুখীন হতে হল না। সুতরাং বোঝা যায় বাক্যটির পূর্ণ সত্যসারণীর ফলস্তম্ভে অন্তত একটি জায়গায় 0 আছে। সুতরাং বাক্যটি অবৈধ। সুতরাং এর পূর্বকল্প "$(p \supset q) \cdot \sim p$" অনুকল্প "$\sim q$"-কে প্রতিপাদন করে না।

উদাহরণ

"$(p \supset q) \cdot p$" বাক্যটি "$q \vee r$"-কে প্রতিপাদন করে কিনা

এভাবে তা নির্ণয় করতে পারি। প্রথম বাক্যটিকে পূর্বকল্প আর দ্বিতীয়টিকে অনুকল্প করে পাই

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset (q \vee r)$$

ধরা যাক, বাক্যটি মিথ্যা। এ কল্পনা অনুসারে বিপরীত ক্রমে সারি গঠন করতে গিয়ে পাই

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset (q \vee r)$$
1 1 1 0 0 0 0
৫ ১ ৬ ৩ ২ ৪

এখন "$p \supset q$"-এর অঙ্গগুলির নিচে কী মূল্য বসাব? 'p', 'q' যে মূল্য গ্রহণ করুক না কেন, এটা অনস্বীকার্য যে $p=1$, $q=0$ হতে পারে না, কেননা "$p \supset q$" সত্য বলে স্বীকৃত হয়েছে (৫ পর্ব দ্রষ্টব্য)। অথচ $p=1$ (৬ অনুসারে) আর $q=0$ (৩ অনুসারে) বলে আগেই মেনে নিয়েছি, কাজেই এ মূল্যগুলি না বসিয়েও উপায় নেই। এ মূল্যগুলি যথাক্রমে 'p', 'q'-এর নিচে বসিয়ে পাই

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset (q \vee r)$$
1 1 0 1 1 0 0 0 0

উক্ত সারণীসারির

$$p \supset q$$
1 1 0

এ অংশটি বিশেষভাবে লক্ষণীয়। এতে যে অসঙ্গতি বা স্ববিরোধিতা আছে তা সহজেই

বোঝা যায়। 'p' সত্য, 'q' মিথ্যা হলে "$p \supset q$" সত্য হতে পারে না, আবার "$p \supset q$" সত্য হলে 'p' সত্য, 'q' মিথ্যা হতে পারে না। স্ববিরোধিতা কোথায়, লক্ষ কর।

$\left.\begin{matrix} p \supset q \\ \ \ 1 \ \ \end{matrix}\right\}$: লিখে বলা হয়েছে "$p \supset q$" সত্য

$\left.\begin{matrix} p \supset q \\ 1 \quad\ 0 \end{matrix}\right\}$: লিখে বলা হয়েছে "$p \supset q$" মিথ্যা, তাহলে

$\left.\begin{matrix} p \supset q \\ 1\ 1\ 0 \end{matrix}\right\}$: লিখলে বলা হয় যে "$p \supset q$" সত্য এবং "$p \supset q$" মিথ্যা।

এ স্ববিরোধিতা থেকে বোঝা যায় যে, প্রাকল্পিক বাক্যটি মিথ্যা—এ কল্পনা করে নির্ভুলভাবে, অবাধিতরূপে, সারণীসারি গঠন করা গেল না। এ ব্যাপারের তাৎপর্য হল এই ঃ আলোচ্য বাক্যের সত্যসারণীতে ফলস্তম্ভে কোথাও 0 থাকতে পারে না, মানে—বাক্যটি বৈধ। সুতরাং এর পূর্বকল্প অনুকল্পের প্রতিপাদক। বলা বাহুল্য

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset (q \vee r)$$
$$1\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ \ 0\ \ 0\ 0\ 0$$

-এর দ্বিতীয় ছত্রটি প্রকৃতপক্ষে কোনো সারণীসারিই নয়, মানে—প্রাকল্পিক বাক্যটির পূর্ণাঙ্গ সারণীতে এ রকম কোনো ছত্র নেই, এবং থাকতেও পারে না।

উদাহরণ

"$(p \supset q) \cdot (q \supset r)$" এ বাক্যটি "$p \supset r$"-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে এভাবে নির্ণয় করতে পারি। অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করে, বাক্যটি মিথ্যা—এ কল্পনা করে, এবং এ কল্পনা অনুসারে (বিপরীতক্রমে) সারণীসারি গঠন করে পাই

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$
$$\mathbf{1}\ \mathbf{1}\ \mathbf{0}\ 1\ 0\ 1\ 0\quad 0\ 1\ 0\ 0$$

↑ ৫ ↑ ১ ৮ ৬ ৭ ৩ ২ ৪

↑ —— ৪ দ্রষ্টব্য

—— ৮ দ্রষ্টব্য

—— ৩ দ্রষ্টব্য

মোটা-হরফে-লেখা অংশটি স্ববিরোধী। সুতরাং প্রাকল্পিক বাক্যটি বৈধ। সুতরাং "$(p \supset q) \cdot (q \supset r)$" হল "$p \supset q$"-এর প্রতিপাদক।

৮. পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি ও বাক্যের বৈধতা নির্ণয়

আমরা পরোক্ষ পদ্ধতি প্রয়োগ করেছি প্রতিপত্তি-পরীক্ষা পদ্ধতি, বা প্রাকল্পিকের বৈধতা পরীক্ষা পদ্ধতি, হিসাবে। কিন্তু সাধারণভাবে যে কোনো বাক্যের বৈধতা পরীক্ষার জন্যও এ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যেতে পারে।

উদাহরণ

$$(p \cdot \sim q) \vee (r \cdot \sim s) \vee \sim (p \vee r) \vee (\sim q \supset s)$$

এ বাক্য বৈধ না অবৈধ তা এভাবে নির্ণয় করতে পারি। বাক্যটি মিথ্যা ধরে নিয়ে সত্যসারণীসারি গঠন করতে গিয়ে প্রথমেই পাই

$$\begin{array}{c}(p \cdot \sim q) \vee (r \cdot \sim s) \vee \sim(p \vee r) \vee (\sim q \supset s)\\ 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\qquad 0\end{array}$$

লক্ষণীয়, প্রদত্ত বাক্যটি বৈকল্পিক, এবং বৈকল্পিক বাক্য মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি সব বিকল্পই মিথ্যা হয়। আরও একটা কথা। বৈকল্পিক বাক্যটির প্রত্যেকটি বন্ধনী-বহির্ভূত "v" সমপর্যায়ের ; এজন্য কোনো একটি "v"-কে মুখ্য বলে গণ্য করা হল না, এবং সরাসরি বিকল্পগুলির নিচে 0 স্থাপন করা হল। এবার শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ করে পাই ঃ

সব চেয়ে বামধারের বিকল্পটির নিচেকার বিন্যাসটির, মানে

$$\begin{array}{c}p \cdot \sim q\\ 1\,0\,1\,0\end{array}$$

-এর, দ্বিতীয় ছত্রটি স্ববিরোধী (দুটি সংযোগীই সত্য, অথচ সংযৌগিকটি মিথ্যা—এ কেমন কথা ?) সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি বৈধ।

যে বাক্য একটি অনন্য সত্যমূল্যসর্তে মিথ্যা—যথা "ব ⊃ ভ", "ব v ভ" ("ব / ভ") এসব আকারের বাক্য, সেসব বাক্য মিথ্যা—এ কল্পনা করে সারণীসারি গঠনের কাজে এগিয়ে যাওয়া যায়। কিন্তু যে বাক্য একাধিক সত্যমূল্যসর্তে মিথ্যা হতে পারে, যথা "ব · ভ" ("ব ↓ ভ") আকারের বাক্য, সে বাক্য মিথ্যা—এ কল্পনা করে একক সারি গঠনে এগিয়ে যাওয়া চলে না ; কেননা এরূপ বাক্য মিথ্যা হলে এদের অঙ্গগুলি কী সত্যমূল্য গ্রহণ করবে তা নির্দিষ্টভাবে বলা যায় না। যথা

$$\sim[\sim(p \supset q) \vee \sim p] \cdot \sim q$$

এ বাক্য মিথ্যা এ কল্পনা করে মুখ্য যোজক " · "-এর নিচে তর্কিত মূল্য 0 বসিয়ে পাই

$$\begin{array}{c}\sim[\sim(p \supset q) \vee \sim p] \cdot \sim q\\ \qquad\qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

এখন দ্বিতীয় ছত্রের শূন্যস্থান কি দিয়ে পূর্ণ করব ? এখানে যে কোনো একটি সংযোগী মিথ্যা হতে পারে, বা দুটি সংযোগীই মিথ্যা হতে পারে, মানে—তিনটি বিভিন্ন বিন্যাসে প্রদত্ত

বাক্যটি মিথ্যা হতে পারে। এ বিন্যাস তিনটি অনুসারে (তিনটি সারি গঠন করে পাই ঃ

$$\sim[\ \sim(p \supset q) \vee \sim p\ ] \cdot \sim q$$

$\sim[\ \sim(p \supset q) \vee \sim p\ ]$	$\cdot \sim q$
1	0 0
0	0 1
0	0 0

এখন, উক্তরূপ বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করতে হলে এরকম তিনটি সারিই যদি গঠন করতে হয় তাহলে সত্যসারণী সংক্ষেপকরণ হল কোথায় ?

এ রকম ক্ষেত্রে দেখতে হবে—প্রদত্ত বাক্য একটি অনন্য সত্যসর্তে সত্য কিনা। যদি এমন হয় যে, প্রদত্ত বাক্য কেবল একটি মাত্র সত্যসর্তে সত্য হতে পারে (যথা, "$p \cdot q$", "$p \downarrow q$" একটি সত্যসর্তেই সত্য) তাহলে বাক্যটি সত্য—এ কল্পনা করে অগ্রসর হওয়া সুবিধাজনক। উদাহরণ হিসাবে উপরোক্ত বাক্যটিই আবার নেওয়া যাক। ধরা যাক, বাক্যটি সত্য। এ তর্কিত মূল্য, 1, বসিয়ে সারণীসারি গঠন করে পাই ঃ

$$\sim[\ \sim(p \supset q) \vee \sim p\ ] \cdot \sim q$$

```
~[ ~(p ⊃ q) v ~p ] · ~q
1  0  1 1 0  0 0 1  1 1 0
১  ৫  ↑ ৮ ↑  ৪ ৬ ৭  ২ ৩
         └──────────────── ৩ দ্রষ্টব্য
      └─────────────────── ৭ দ্রষ্টব্য
```

উক্ত সারির মোটা-হরফে-লেখা অংশটি স্ববিরোধী। এর থেকে বোঝা যায়—উক্ত বাক্যের সত্যসারণী গঠন করলে এমন কোনো সারি পাওয়া যেত না যাতে ফলস্তম্ভে কোথাও 1 আছে। এ কথার অর্থ আলোচ্য বাক্যটি স্বতমিথ্যা (কাজেই অবৈধ)।

পরোক্ষ পদ্ধতি সম্পর্কে যা বলা হয়েছে তা বুঝে থাকলে এ কথাও বুঝতে পারবে যে ঃ কোনো বাক্য সত্য—এ কথা ধরে নিয়ে

যদি নির্ভুল ভাবে সারি গঠন করা সম্ভব না হয় তাহলে বাক্যটি স্বতমিথ্যা।

আর যদি নির্ভুল ভাবে সারি গঠন করা সম্ভব হয় তাহলে বাক্যটি স্বতমিথ্যা নয়॥

৯. প্রতিপত্তি সম্বন্ধে কয়েকটি নিয়ম

প্রতিপত্তি কী এবং কি করে প্রতিপত্তি নির্ণয় করতে হয় তা বুঝে থাকলে এ কথাও বোঝা যাবে যে প্রতিপত্তি সম্বন্ধে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি খাটে।

১. কোনো বাক্য 'ব' কোনো বাক্য 'ভ'-কে প্রতিপাদন করতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'ব ⊃ ভ' স্বতসত্য হয় (বা 'ব · ~ ভ' স্বতমিথ্যা হয়)।

২. প্রত্যেক বাক্য নিজেকে নিজে প্রতিপাদন করে (মানে "ব ⊃ ব" স্বতসত্য)

৩. যে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য যে কোনো বাক্যকে প্রতিপাদন করে।

৪. স্বতমিথ্যা বাক্য কেবল স্বতমিথ্যা বাক্যের দ্বারাই প্রতিপন্ন হতে পারে॥

৫. যে কোনো স্বতসত্য বাক্য যে কোনো বাক্যের দ্বারা প্রতিপন্ন হয়।

৬. স্বতসত্য বাক্য কেবল স্বতসত্য বাক্যকেই প্রতিপাদন করতে পারে ॥

উক্ত সূত্রগুলি থেকে আরও নিঃসৃত হয় যে

৭. যদি 'ব' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) 'ব' ভ-কেও, 'ভ'-এর নিষেধকেও প্রতিপাদন করতে পারে ।

৮. যদি 'ব' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) 'ব' তার স্বনিষেধকেই ('~ব'-কেই) প্রতিপাদন করতে পারে ॥

৯. যদি 'ভ' স্বতসত্য হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) 'ভ' ব-এর দ্বারা ও 'ব'-এর নিষেধের দ্বারাও প্রতিপন্ন হয় ।

১০. যদি 'ভ' স্বতসত্য হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) 'ভ' তার স্বনিষেধের '~ভ'-এর, দ্বারা প্রতিপন্ন হতে পারে ॥

আরো কয়েকটি নিয়ম

১১. যদি 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে, এবং 'ভ' 'ম'-কে প্রতিপাদন করে তাহলে 'ব' 'ম'-কে প্রতিপাদন করবে ।

১২. যে কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অনুকল্প, এবং পূর্বকল্পের নিষেধ, প্রাকল্পিক বাক্যটিকে প্রতিপাদন করে ।

তার মানে—

'q' প্রতিপা→ "$p \supset q$" '$\sim p$' প্রতিপা→ "$p \supset q$"

'q' প্রতিপা→ "$\sim p \supset q$" '$\sim p$' প্রতিপা→ "$p \supset \sim q$"

['প্রতিপাদন করে "——"-কে'-এর সংক্ষেপক হিসাবে "প্রতিপা→" ব্যবহৃত হল]

১৩. কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের প্রত্যেকটি অঙ্গের সঙ্গে একটি অভিন্ন বাক্য সংযোগী হিসাবে, বিকল্প হিসাবে বা পূর্বকল্প হিসাবে যুক্ত করে যে বাক্য পাওয়া যায় তা মূল প্রাকল্পিকটির দ্বারা প্রতিপন্ন হয় ।

তার মানে—

"$p \supset q$" প্রতিপা→ "$(p \cdot r) \supset (q \cdot r)$"

"$p \supset q$" ,, "$(p \vee r) \supset (q \vee r)$"

"$p \supset q$" ,, "$(r \supset p) \supset (r \supset q)$"

এবং

১৩ক. কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অঙ্গগুলির ক্রম পরিবর্তন করে প্রত্যেকটি অঙ্গের সঙ্গে কোনো অভিন্ন বাক্য অনুকল্প হিসাবে যুক্ত করে যে বাক্য পাওয়া যায় তা মূল বাক্যটির দ্বারা প্রতিপন্ন হয় ।

তার মানে—

'$p \supset q$' প্রতিপা→'$(q \supset r) \supset (p \supset r)$'

১৪. কোনো দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের প্রত্যেক অঙ্গের সঙ্গে একটি অভিন্ন বাক্য সংযোগী হিসাবে, বিকল্প হিসাবে, বা অনুকল্প হিসাবে, অথবা সমকল্প হিসাবে যুক্ত করে যে বাক্য পাওয়া যায় তা মূল বাক্যটির দ্বারা প্রতিপন্ন হয়।

তার মানে—

"$p \equiv q$" প্রতিপা→ "$(p \cdot r) \equiv (q \cdot r)$"
"$p \equiv q$" ,, "$(p \vee r) \equiv (q \vee r)$"
"$p \equiv q$" ,, "$(r \supset p) \equiv (r \supset q)$"
"$p \equiv q$" ,, "$(p \supset r) \equiv (q \supset r)$"
"$p \equiv q$" ,, "$(p \equiv r) \equiv (q \equiv r)$"

১৫. যদি "ব · ক" 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে তাহলে এবং কেবল তাহলে 'ব' "ক ⊃ ভ"-কে প্রতিপাদন করতে পারে।

যথা

"$(A \vee B) \cdot \sim A$" প্রতিপা→"B"
(ব · ক) (ভ)

কাজেই

"$A \vee B$" প্রতিপা→"$\sim A \supset B$"
(ব) (ক ⊃ ভ)

১০. প্রতিপত্তি ও যুক্তির বৈধতা

"বৈধ", "অবৈধ"—এ কথাগুলি আমরা বাক্য সম্বন্ধে প্রয়োগ করে আসছি। কিন্তু এ কথাগুলি যুক্তি প্রসঙ্গেই সাধারণত ব্যবহৃত হয়। আমরা এ বিশেষণগুলি যুক্তি সম্পর্কেও প্রয়োগ করেছি, বাক্য সম্পর্কেও প্রয়োগ করেছি: নির্ভুল যুক্তি আর স্বতসত্য বাক্য সম্বন্ধে একই বিশেষণ (বৈধ), আর ভুল যুক্তি ও অ-স্বতসত্য বাক্য সম্বন্ধেও একই বিশেষণ (অবৈধ), প্রয়োগ করেছি। কেননা, দেখা যাবে, নির্ভুল যুক্তি আর স্বতসত্য প্রাকল্পিক বাক্যের মধ্যে, আর ভুল যুক্তি ও অ-স্বতসত্য প্রাকল্পিক বাক্যের মধ্যে নিবিড় সম্বন্ধ (সাদৃশ্য ও অনুষঙ্গ) বর্তমান।

আপাতত, যুক্তির বৈধতা অবৈধতা বলতে কী বোঝায়—এ প্রশ্নটি উত্থাপন করা যাক। অমুক যুক্তিটি বৈধ, তমুক যুক্তিটি অবৈধ—এরকম উক্তির মানে কী? উত্তরে বলতে পারি—

> যদি কোনো যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের সম্বন্ধ এমন হয় যে: হেতুবাক্য ('ব') সত্য হলে সিদ্ধান্ত ('ভ') মিথ্যা হতে পারে না তাহলে, এবং কেবল তাহলে, সে যুক্তি বৈধ।

এ কথাটা এভাবেও বলতে পারতাম—

> যদি কোনো যুক্তির হেতুবাক্য ('ব') সিদ্ধান্তকে ('ভ'-কে) প্রতিপাদন করে তাহলে এবং কেবল তাহলে যুক্তিটি বৈধ।

এ কথার মানে—

"ব ⊃ ভ" যদি স্বতসত্য হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ।

অপরপক্ষে, যদি এমন হয় যে—

'ব' সত্য হলেও 'ভ' মিথ্যা হতে পারে, 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে না, বা "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য নয়,

তাহলে "ব ∴ ভ" অবৈধ।

একটা উদাহরণ :

$$\left.\begin{array}{l} p \supset q \\ p \end{array}\right\} \text{ব}$$

$$\therefore\ q \qquad (\text{ভ})$$

এ আকারের যুক্তি বৈধ—এ কথার মানে : "$(p \supset q) \cdot p$" হল 'q'-এর প্রতিপাদক অর্থাৎ "$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$"—এ বাক্যটি স্বতসত্য বা বৈধ। অপরপক্ষে

$$\left.\begin{array}{l} p \supset q \\ q \end{array}\right\} \text{ব}$$

$$\therefore\ p \qquad (\text{ভ})$$

এ যুক্তি-আকার অবৈধ, কেননা হেতুবাক্য "$(p \supset q) \cdot q$" সিদ্ধান্ত 'p'-কে প্রতিপাদন করে না। অর্থাৎ "$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$"—এ বাক্য স্বতসত্য নয়। সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করলেই দেখতে পাবে বাক্যটি অ-স্বতসত্য, অবৈধ।

স্বতসত্য প্রাকল্পিক (প্রতিপত্তি) ও বৈধ যুক্তির, আবার অ-স্বতসত্য প্রাকল্পিক ও অবৈধ যুক্তির, সাদৃশ্য বোঝা গেল* ; বোঝা গেল যে—

"ব ∴ ভ" বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "ব ⊃ ভ" বৈধ (স্বতসত্য) হয়,

"ব ∴ ভ" অবৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "ব ⊃ ভ" বৈধ না হয়।

কিন্তু এদের পার্থক্য অগ্রাহ্য করা চলে না। কেন চলে না, বুঝে নাও। সাধারণত যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত পৃথক পৃথক ছত্রে লিখিত হয় এবং হেতুবাক্যগুলির মধ্যবর্তী যোজক " · " অনুক্ত থাকে। এ যোজকটি স্পষ্টভাবে ব্যবহার করে এবং হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত একই ছত্রে লিখে উক্ত প্রথম উদাহরণটি এভাবে বিন্যস্ত করতে পারি—

$$(p \supset q) \cdot p \ \therefore\ q \qquad (১)$$

আর অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্য এভাবে—

$$((p \supset q) \cdot p) \supset q \qquad (২)$$

* কিন্তু "বৈধ" ও "স্বতসত্য" সমার্থক নয়, আর "অবৈধ" ও "অ-স্বতসত্য"ও সমার্থক নয়। লক্ষণীয়, যুক্তিপ্রসঙ্গে "বৈধ"-এর পরিবর্তে "স্বতসত্য", বা "অবৈধ"-এর পরিবর্তে "অ-স্বতসত্য" প্রয়োগ করা যায় না। কেননা, যুক্তি সত্য বা মিথ্যা হতে পারে না—'সত্য', 'মিথ্যা' এ বিশেষণগুলি যুক্তি প্রসঙ্গে খাটে না।

লক্ষণীয়, এখানে (১) হল যুক্তি-আকার, বাক্যাকার নয় ; কেননা " ∴ " সত্যাপেক্ষ বাক্য-যোজক নয়। সুতরাং এ আকারের দৃষ্টান্ত সম্পর্কে সত্য মিথ্যার প্রশ্ন ওঠে না ; সুতরাং (১)-এর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা যায় না, সত্যসারণী গঠন করা যায় না। কিন্তু (২) হল বাক্যাকার, এ আকারের বাক্য সত্য বা মিথ্যা (বস্তুত উক্ত বাক্যটি স্বতসত্য, সুতরাং এটি একটি প্রতিপত্তি বাক্য)। কাজেই সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করে এর বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করা যায়।

আরও একটা কথা। প্রতিপত্তি বাক্য ও বৈধ যুক্তি ঠিক এক পদার্থ নয়। যদি প্রতিপত্তি বাক্যের প্রতিপাদকের সত্যতা দাবী করা হয় এবং প্রতিপত্তি বাক্যটির জোরে এ দাবীও করা হয় যে ঃ সুতরাং প্রতিপাদ্যটি সত্য তাহলেই প্রতিপত্তি বৈধ যুক্তিতে পরিণত হয়। অর্থাৎ যদি ' ব ⊃ ভ" বৈধ—এ বাক্যের 'ব'-এর সত্যতা দাবী করা হয় এবং "ব ⊃ ভ"-এর স্বতসত্যতার জোরে আরও দাবী করা হয় যে 'ভ'-ও সত্য, তাহলেই

'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে

এ প্রতিপত্তি বাক্য থেকে

ব ∴ ভ

এ বৈধ যুক্তি পাওয়া যায়। নিম্নোক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষ কর।

(রাম মানুষ ⊃ রাম মরণশীল) · রাম মানুষ ∴ রাম মরণশীল (1)

((রাম মানুষ ⊃ রাম মরণশীল) · রাম মানুষ) ⊃ রাম মরণশীল (2)

(1) হল (১)-এর দৃষ্টান্ত আর (2) হল (২)-এর। (1) হল একটি বৈধ যুক্তি আর (2) স্বতসত্য বচন। (1)-এতে (2)-এর পূর্বকল্পের ("রাম মানুষ ··· মানুষ"-এর) সত্যতা দাবী করে বাক্যটির স্বতসত্যতার জোরে আরও দাবী করা হয়েছে অনুকল্পটিও সত্য। (2)-এর ভিত্তিতে (1) যুক্তিটি গঠন করা হয়েছে। কিন্তু (2)-এতে পূর্বকল্প বা অনুকল্পের সত্যতা দাবী করা হয় নি, কেবল বলা হয়েছে ঃ এমন নয় যে পূর্বকল্পটি-সত্য-আর -অনুকল্পটি-মিথ্যা।

যুক্তির বৈধতা আর প্রাকল্পিক বাক্যের বৈধতা, যুক্তির অবৈধতা আর প্রাকল্পিক বাক্যের অবৈধতা, সম্বন্ধে উপরে যা বলা হল তা এভাবে পুনরুক্তি করা যায়।

> আমরা সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন (অবরোহন) করি কোনো হেতুবাক্য **থেকে**, কিন্তু কোনো স্বতসত্য-বলে-গৃহীত নীতি **অনুসারে**।

যথা $(R \supset S) \cdot R \quad \therefore \quad S$

এ যুক্তির সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয়েছে "$(R \supset S) \cdot K$" থেকে, কিন্তু অনুমান করা হয়েছে নিম্নোক্ত নীতি অনুসারে ঃ

যদি "$(R \supset S) \cdot K$" সত্য হয় তাহলে 'S' অবশ্যই সত্য হবে,

বা "$[(R \supset S) \cdot R\,] \supset S$"—এ বাক্যটি স্বতসত্য।

এখন, কোন্ গৃহীত নীতি অনুসারে অনুমান করা হয়েছে তা উদ্ধার করা অতীব সহজ। যুক্তিটির হেতুবাক্যকে পূর্বকল্প করে এবং সিদ্ধান্তকে অনুকল্প করে যে প্রাকল্পিক

বাক্য পাওয়া যাবে তাই সে গৃহীত নীতি—যে নীতি অনুসারে অনুমাতা অনুমান করেছে। বলা বাহুল্য,

> সত্য-বলে-গৃহীত নীতিটি যদি প্রকৃতই স্বতসত্য হয় তাহলে যুক্তিটি বৈধ, অন্যথা অবৈধ।

১১. যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা

উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে, যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা অত্যন্ত সহজ কাজ। যে যে পদ্ধতিতে প্রাকল্পিক বাক্যের বৈধতা বা প্রতিপত্তি নির্ণয় করা যায়, ঠিক সে সে পদ্ধতিতে যুক্তির বৈধতাও নির্ণয় করা যাবে। যদিও প্রতিপত্তি বাক্য ও যুক্তির মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে তবু যুক্তির-বৈধতা-নির্ণয় ও প্রতিপত্তি নির্ণয় পদ্ধতির মধ্যে কোনো ব্যবহারিক পার্থক্য নেই। কেবল প্রদত্ত যুক্তিকে প্রথমে প্রাকল্পিক বাক্যে রূপান্তরিত করে নিতে হবে। আর রূপান্তর করতে হবে এভাবে।

> হেতুবাক্যগুলিকে একটি সংযৌগিক বাক্যের আকারে একত্রিত করতে হবে এবং তারপর প্রদত্ত যুক্তির " $\therefore$ "-এর স্থলে " $\supset$ " ব্যবহার করতে হবে।

আরও একটা প্রাথমিক কাজ। প্রদত্ত যুক্তির বচনগুলির পরিবর্তে সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করে বচনগুলিকে সংকেতায়িত করে নিতে হবে।

সংক্ষেপক প্রতীক নির্বাচন করবার সময় একটা কথা মনে রাখবে। যে (আণবিক) বাক্যকে সংকেতায়িত করছ সে বাক্যের কোনো বিশেষ্য বা বিশেষণ শব্দের আদ্যক্ষর নেওয়াই সুবিধাজনক। তাহলে কোন্ আণবিক বচনের পরিবর্তে কোন্ সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করা হল তা সহজে মনে পড়বে।

উদাহরণ ১ঃ প্রথম বিধান অনুসারে (১৯৯ পৃঃ দ্রষ্টব্য)—

রাম আসবে যদি এবং কেবল যদি শ্যামা আসে

$\therefore$ যদি শ্যামা না আসে তাহলে রাম আসবে না।

যুক্তিটির অন্তর্গত বচনগুলির পরিবর্তে সংক্ষেপক ব্যবহার করে এবং যোজকগুলিকে সংকেত-লিপিতে ব্যক্ত করে পাই

$$R \equiv S$$
$$\therefore \quad \sim S \supset \sim R$$

একে আবার প্রাকল্পিকে রূপান্তর করে পাওয়া গেল

$$(R \equiv S) \supset (\sim S \supset \sim R)$$

এখন, এ বাক্যের সত্যসারণীতে ফলস্তম্ভে কেবল 1 (কষে দেখাও), সুতরাং বাক্যটি স্বতসত্য, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

উদাহরণ ২ : দ্বিতীয় বিধান অনুসারে (১৯৯ পৃঃ দ্রষ্টব্য)—
উক্ত যুক্তির বৈধতা এভাবে নির্ণয় করতে পারতাম।

		হেতুবাক্য	সিদ্ধান্ত		
R	S	$R \equiv S$	$\sim S$	$\supset$	$\sim R$
1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1

সত্যসারণী দুটি তুলনা করলে দেখতে পাই : এমন কোনো সারি নেই যাতে হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি বৈধ।

উদাহরণ ৩—তৃতীয় বিধান অনুসারে (২০০ পৃঃ দ্রষ্টব্য)—
যদি রমা আসে তাহলে শ্যামা আসবে, এবং যদি তৃপ্তি আসে তাহলে উষাও আসবে
রমা আসে নি অথবা উষা আসে নি
∴ শ্যামা আসে নি অথবা উষা আসে নি

সংকেতলিপিতে এ যুক্তিকে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :

$$(R \supset S) \cdot (T \supset U)$$
$$\sim R \vee \sim T$$
$$\therefore \quad \sim S \vee \sim U$$

বলা বাহুল্য অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি হল

$$[(R \supset S) \cdot (T \supset U) \cdot (\sim R \vee \sim T)] \supset (\sim S \vee \sim U)$$

এখন এ বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করতে পারি এভাবে (এর সত্যসারণীতে ১৬টি সারি থাকবার কথা)—

R	S	T	U	$[(R \supset S)$	$\cdot (T \supset U)$	$\cdot (\sim R \vee \sim T)]$	$\supset$	$(\sim S \vee \sim U)$
1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0					
…	…	…	…	…	…	…	…	…

সত্যসারণীটি অসম্পূর্ণ। কিন্তু এ কয়টি সারির মধ্যেই ফলস্তম্ভে 0 দেখতে পাচ্ছি। সুতরাং বোঝা গেল প্রাকল্পিকটি অবৈধ। সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।

উদাহরণ ৪ ও ৫ : সত্যসারণীসারি গঠন করে বৈধতা নির্ণয়
মনে করা যাক

$$[(R \supset S) \cdot (T \supset U) \cdot (\sim R \vee \sim T)] \supset (\sim S \vee \sim U)$$

এ বাক্যটি মিথ্যা—এ কল্পনা অনুসারে নিম্নোক্ত সারণীসারিটি পাই :

$$[(R \supset S) \cdot (T \supset U) \cdot (\sim R \vee \sim T)] \supset (\sim S \vee \sim U)$$

0 1 1   0 1 1   1 0 1 1 0   0 0 1 0 0 1

এ সারণীতে কোনো স্ববিরোধিতা নেই। কাজেই বাক্যটি অ-স্বতসত্য। কাজেই

$$R \supset S,\ T \supset U,\ \sim R \vee \sim T \quad \therefore\ \sim S \vee \sim U$$

—এ যুক্তিটি অবৈধ।

আর একটি উদাহরণ।

যদি কন্যাকুমারীতে অধিবেশন হয় তাহলে ললিতবাবু সভাপতিত্ব করবেন
এবং যদি মাদ্রাজে অধিবেশন হয় তাহলে নন্দনকুমার সভাপতিত্ব করবেন,
অধিবেশন হবে কন্যাকুমারীতে বা মাদ্রাজে
∴ হয় ললিতবাবু নয়ত নন্দনকুমার সভাপতিত্ব করবেন।

সংকেতলিপিতে যুক্তিটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি—

$$(K \supset L) \cdot (M \supset N)$$
$$K \vee M$$
$$\therefore\ L \vee N$$

এখন অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি মিথ্যা—এ কল্পনা করে নিম্নোক্ত সারিটি পাই ঃ

$$[(K \supset L) \cdot (M \supset N) \cdot (K \vee M)] \supset (L \vee N)$$

1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0

↑ ১ ↑ ১০ ২ ৯ ৮ ৩ ৭ ৫ ৪ ৬

(L-এর নিচের তীর) ——— ৫ দ্রষ্টব্য

(K-এর নিচের তীর) ——— ৮ দ্রষ্টব্য

এ সারির মোটা-হরফে-লেখা অংশটি স্ববিরোধী। সুতরাং প্রাকল্পিক বাক্যটি স্বতসত্য। সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

১২. সত্যমূল্য আরোপ ও অবৈধতা প্রমাণ

যে যুক্তির হেতুবাক্য-সত্য-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা সে যুক্তি অবৈধ। কাজেই যদি দেখানো যায় যে অমুক অমুক সত্যমূল্য বসালে কোনো যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয় তাহলে প্রমাণিত হল যে যুক্তিটি অবৈধ। এভাবে যুক্তি-আকারেরও অবৈধতা প্রমাণ করা যায়। এখন কোন্ সত্যমূল্যবিন্যাসে কোনো যুক্তির বা যুক্তি-আকারের হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয়, পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে তা সহজে নির্ণয় করা যায়। এভাবে অবৈধতা প্রমাণ করাকে বলে সত্যমূল্য আরোপ করে অবৈধতা প্রমাণ করা*।

উদাহরণ ঃ মনে করা যাক,

$$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (\sim A \vee \sim C)$$
$$\therefore\ \sim B \vee \sim D$$

* proving invalidity by assigning truth-values

এ যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে হবে। অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যটি নিয়ে এবং বাক্যটি মিথ্যা কল্পনা করে, এবং এ কল্পনা অনুসারে সত্যসারণীসারি গঠন করে পাই

$$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (\sim A \vee \sim C)] \supset (\sim B \vee \sim D)$$

0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1

১০ ১ ৮ ১১ ২ ৯ ১২ ৩ ১৩ ৫ ৭ ৪ ৬ ৮

দেখা গেল 'A', 'B', 'C', 'D'-এতে যথাক্রমে

0, 1, 1, 1

সত্যমূল্য আরোপ করলে আলোচ্য প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প সত্য ও অনুকল্প মিথ্যা হয়। কাজেই প্রাকল্পিকটি অ-স্বতসত্য। আর সেহেতু অনুষঙ্গী যুক্তিটি অবৈধ। এখন এ যুক্তির অঙ্গবাক্যগুলি যে যে সত্যমূল্য গ্রহণ করলে প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয় সে সব সত্যমূল্য উল্লেখ করে অবৈধতা প্রমাণটি নিম্নোক্তরূপে বিন্যাস্ত করা সুবিধাজনক।

A	B	C	D	হেতুবাক্য $(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (\sim A \vee \sim C)$	সিদ্ধান্ত $\sim B \vee \sim D$
0	1	1	1	1	0

নিচে একটি যুক্তি-আকারের অবৈধতার প্রমাণ দেওয়া হল।

p	q	r	s	হেতুবাক্য $(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (q \vee s)$	সিদ্ধান্ত $p \vee r$
0	0	0	1	1	0

কি করে উক্ত সত্যমূল্যগুলি পেলাম তা আশা করি বুঝতে পেরেছ। এখন অন্য সত্যমূল্য বসিয়ে এ আকারটির অবৈধতা প্রমাণ কর।

১৩. বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতি ও বৈধতা প্রমাণ

পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতিতে 'ব ⊃ ভ'-এর এবং "ব ∴ ভ"-এর বৈধতা নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা এ কল্পনা করে অগ্রসর হই যে ঃ 'ব ⊃ ভ' মিথ্যা। এখন, " 'ব ⊃ ভ' মিথ্যা" এ কথার মানে ঃ 'ব · ∼ভ' সত্য (স্মরণীয় যে 'ব ⊃ ভ' আর 'ব · ∼ভ' পরস্পর বিরুদ্ধ)। কাজেই 'ব ⊃ ভ' মিথ্যা—এ কল্পনা না করে, এ কল্পনাও করতে পারতাম যে 'ব ⊃ ভ'-এর বিরুদ্ধ 'ব · ∼ভ' সত্য। যথা '$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$' এ বাক্যের বৈধতা এ ভাবে দেখানো যেত।

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q \qquad (১)$$

-এর বিরুদ্ধ হল $\quad (p \supset q) \cdot p \cdot \sim q \qquad$ (২)

এখন (২) সত্য এ কল্পনা অনুসারে পরোক্ষভাবে সত্যসারণীসারি গঠন করে পাই

$$(p \supset q) \cdot p \cdot \sim q$$

1 1 0 1 1 0

৬ ১ ৫ ২ ৩ ৪

↑ (৫) ———— ৪ দ্রষ্টব্য

↑ (৬) ———— ২ দ্রষ্টব্য

মোটা-হরফে-লেখা অংশটি অসঙ্গত, স্ববিরোধী। সুতরাং "$(p \supset q) \cdot p \cdot \sim q$" **স্বতমিথ্যা,** সুতরাং মূল বাক্য (১) বৈধ।

এখন যে পদ্ধতির কথা বলতে যাচ্ছি তাতে 'ব ⊃ ভ' এবং 'ব ∴ ভ'-এর বৈধতা দেখাতে হলে প্রথমে ধরে নিতে হয় যে: 'ব · ~ভ' সত্য। এবং তারপর দেখানো হয় যে 'ব · ~ভ' সত্য হতে পারে না, এটা স্বতমিথ্যা।

আমরা জানি

	'ব ⊃ ভ'-এর বিরুদ্ধ হল 'ব · ~ভ'
কাজেই	" 'ব ⊃ ভ' সত্য " equiv " 'ব · ~ভ' মিথ্যা"।
আবার	স্বতসত্য বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্যমাত্রই স্বতমিথ্যা
সুতরাং	" 'ব ⊃ ভ' স্বতসত্য" equiv " 'ব · ~ভ' স্বতমিথ্যা"।
সুতরাং	যদি 'ব ·.~ভ' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে 'ব ⊃ ভ' স্বতসত্য (বা বৈধ)।
আর	যদি 'ব ⊃ ভ' স্বতসত্য হয় তাহলে 'ব ∴ ভ' বৈধ ॥

সাধারণভাবে বলতে পারি

যদি কোনো বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্য অসিদ্ধ* (স্বতমিথ্যা বা স্ববিরোধী) হয় তাহলে বাক্যটি বৈধ।

যদি কোনো যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্যটি স্ববিরোধী হয় তাহলে যুক্তিটি বৈধ ॥

কাজেই যদি দেখানো যায় যে কোনো প্রদত্ত বাক্যের ("ব ⊃ ভ"-এর), বা কোনো যুক্তির ("ব ∴ ভ"-এর) অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের ("ব ⊃ ভ"-এর), বিরুদ্ধ স্ববিরোধী তাহলে মূল বাক্যের বা যুক্তির বৈধতা প্রদর্শিত হয়। এভাবে বৈধতা প্রদর্শন পদ্ধতিকে বলে বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতি।

"ব ⊃ ভ'-এর বিরুদ্ধের, বা 'ব ∴ ভ'-এর বাধকের, মানে 'ব · ~ভ'-এর, অসিদ্ধি (স্ববিরোধিতা) দেখানো যায়

(১) "ব · ~"ভ-কে স্ববিরোধী বাক্যে রূপান্তরিত করে, বা

(২) "ব · ~ভ" থেকে কোনো স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন (অবরোহন) করে।

বলা বাহুল্য, স্ববিরোধী বাক্য বলতে বোঝায় দুটি বিরুদ্ধ বাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বাক্য। যথা

$$(p \supset q) \cdot (p \cdot \sim q)$$
$$(p \vee q) \cdot (\sim p \cdot \sim q)$$

স্ববিরোধিতার আদর্শ আকার কিন্তু

$$S \cdot \sim S$$

* এ বিভাগে 'অসিদ্ধ' বলতে কেবল 'সিদ্ধ-নয়' বলতে যা বোঝায় তা বুঝছি না। এখানে "অসিদ্ধ" মানে: স্বতমিথ্যা, (স্বত)মিথ্যা হিসাবে সিদ্ধ।

আকারের বাক্য* (যেখানে 'S' কোনো বাক্য)। যথা

$$(p \supset q) \cdot \sim(p \supset q)$$
$$(p \vee q) \cdot \sim(p \vee q)$$

উদাহরণ 1. "$(p \cdot q) \supset p$"-এর বৈধতা প্রদর্শন

$(p \cdot q) \supset p$ (1)

$(p \cdot q) \cdot \sim p$ (2) [(1)-এর বিরুদ্ধ]

$\sim p \cdot (p \cdot q)$ (3) [(2) ক্রমান্তর]

$\sim p \cdot p \cdot q$ (4) [(3) বিযূথীকরণ]

$p \cdot \sim p \cdot q$ (5) [(4) ক্রমান্তর]

উদাহরণ 2. "$p \supset (p \vee q)$"-এর বৈধতা প্রদর্শন

$p \supset (p \vee q)$ (1)

$p \cdot \sim(p \vee q)$ (2) [(1)-এর বিরুদ্ধ]

$p \cdot (\sim p \cdot \sim q)$ (3) [(2) DM]

$p \cdot \sim p \cdot \sim q$ (4) [(3) বিযূথীকরণ]

উদাহরণ 3. "$(p \supset q) \cdot p \therefore q$"—এ যুক্তি-আকারের বৈধতা প্রদর্শন

$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$ (1) [প্রদত্ত যুক্তি-আকারের অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক]

$[(p \supset q) \cdot p] \cdot \sim q$ (2) [(1)-এর বিরুদ্ধ]

$(p \supset q) \cdot (p \cdot \sim q)$ (3) [(2), Assoc]

আমরা জানি "$(p \supset q)$" আর "$(p \cdot \sim q)$" পরস্পর বিরুদ্ধ। কাজেই বলতে পারি: (3) স্ববিরোধী। (3)-এর স্ববিরোধিতা আরও প্রকটিত করা হল।

$(p \supset q) \cdot \sim(\sim p \vee \sim\sim q)$ (4) [(3) DM]

$(p \supset q) \cdot \sim(\sim p \vee q)$ (5) [(4) DN]

$(p \supset q) \cdot \sim(p \supset q)$ (6) [(5) Df $\supset$]

(6) স্ববিরোধী, সুতরাং (1) স্বতসত্য, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তি-আকারটি বৈধ।

---

* এ আকারের বাক্যের সঙ্গে যে কোনো বাক্য " $\cdot$ " দিয়ে সংযুক্ত করলে যা পাওয়া যায় তা স্ববিরোধী, যথা: $p \cdot \sim p \cdot q \cdot r$

উদাহরণ 4. "$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$"-এর বৈধতা প্রদর্শন

$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$ (1)

$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \cdot \sim(p \supset r)$ (2) [(1)-এর বিরুদ্ধ] [বিযূথীকরণ]

$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \cdot \sim(\sim p \vee r)$ (3) [(2) Df $\supset$]

$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \cdot (p \cdot \sim r)$ (4) [(3) DM, DN]

$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \cdot p \cdot \sim r$ (5) [(4) বিযূথীকরণ]

$[(p \supset q) \cdot p] \cdot [(q \supset r) \cdot \sim r]$ (6) [(5) ক্রমান্তরকরণ ও যূথীকরণ]

$q \cdot [(q \supset r) \cdot \sim r]$ (7) [(6) MP]

$q \cdot \sim q$ (8) [(7) MT]

উদাহরণ 5. $(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C) \therefore B \vee D$

—এ যুক্তির বৈধতা প্রদর্শন

$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C)] \supset (B \vee D)$ (1) [প্রদত্ত যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক]

$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C) \cdot \sim(B \vee D)$ (2) [(1)-এর বিরুদ্ধ] [বিযূথীকরণ]

$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C) \cdot \sim B \cdot \sim D$ (3) [(2) DM]

$[(A \supset B) \cdot \sim B] \cdot [(C \supset D) \cdot \sim D] \cdot (A \vee C)$ (4) [(3) ক্রমান্তরকরণ ও যূথীকরণ]

$\sim A \cdot [(C \supset D) \cdot \sim D] \cdot (A \vee C)$ (5) [(4) MT]

$\sim A \cdot \sim C \cdot (A \vee C)$ (6) [(5) MT]

$(A \vee C) \cdot \sim C \cdot \sim A$ (7) [(6) ক্রমান্তর]

$(C \vee A) \cdot \sim C \cdot \sim A$ (8) [(7) ঐ]

$[(C \vee A) \cdot \sim C] \cdot \sim A$ (9) [(8) যূথীকরণ]

$A \cdot \sim A$ (10) [(9) MTP]

(1)-এর বিরুদ্ধ থেকে স্ববিরোধী নিষ্কাশিত হয়েছে। সুতরাং (1) বৈধ। সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

একটা প্রশ্ন। 'ব ⊃ ভ'-এর বিরুদ্ধকে—'ব · ~ভ'-কে—যদি স্ববিরোধী বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় তাহলে 'ব · ~ভ' স্ববিরোধী (কেননা 'ব · ~ভ' ও একে-রূপান্তরিত-করে-পাওয়া-বাক্য সমার্থক) এবং ফলে 'ব ⊃ ভ' বৈধ—এ কথা বুঝলাম। প্রশ্ন হল :

"ব · ~ভ" থেকে কোনো স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করতে পারলেই "ব · ~ভ" স্ববিরোধী বলে গণ্য হবে কেন? উত্তর ঃ

ধরা যাক, কোনো বাক্য 'S'† থেকে '$p \cdot \sim p$' বৈধভাবে নিষ্কাশন করা গেল। তাহলে

$$S \supset (p \cdot \sim p)$$

এ বাক্য বৈধ বা স্বতসত্য। এখন

যদি "$S \supset (p \cdot \sim p)$" সত্য হয় আর '$p \cdot \sim p$' মিথ্যা হয় তাহলে
(প্রাকল্পিকের সংজ্ঞা অনুসারে) অবশ্যই 'S' মিথ্যা।

আরও জোরালো উক্তি করতে পারি ঃ

যদি "$S \supset (p \cdot \sim p)$" স্বতসত্য হয় আর '$p \cdot \sim p$' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে
অবশ্যই 'S' স্বতমিথ্যা বা স্ববিরোধী।

আর 'S' যদি স্বতমিথ্যা হয় তাহলে 'S'-এর বিরুদ্ধ বাক্য—মূল বাক্য (বা প্রদত্ত যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক) স্বতসত্য। উপরে যা বলা হল তা এভাবে সংক্ষেপে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

যদি "$S \supset (p \cdot \sim p)$" স্বতসত্য হয় তাহলে '$S$' স্ববিরোধী,

বা এভাবে যুক্তিবিধি হিসাবে ঃ

'S' থেকে কোনো স্ববিরোধিতা বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে,
∴ 'S' স্বতমিথ্যা।*

স্ববিরোধিতা ও বৈধতা

আমরা যুক্তি-বৈধতার তিনটি লক্ষণ দিয়েছি (৪১ পৃঃ দ্রষ্টব্য)। এখন আরও একটি লক্ষণ দিতে পারি। আমরা দেখেছি যে ঃ "ব · ~ভ" থেকে যদি কোনো স্ববিরোধিতা নিষ্কাশন করা যায় বা একে স্ববিরোধী বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ। আমরা 'ব' ব্যবহার করেছি হেতুবাক্য (বা পূর্বকল্প) বোঝাতে আর '~ভ' সিদ্ধান্তের-নিষেধ (বা অনুকল্পের-নিষেধ) বোঝাতে। কাজেই বলতে পারি

> যদি কোনো যুক্তি এমন হয় যে এর হেতুবাক্য-সত্য-এবং-সিদ্ধান্ত-মিথ্যা এ কল্পনা বা উক্তি** স্ববিরোধী হয়—মানে এ উক্তিকে স্ববিরোধী বাক্যে রূপান্তরিত করা যায়, বা এ উক্তি থেকে কোনো স্ববিরোধিতা নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে যুক্তিটি বৈধ।

এবং কোনো যুক্তি "ব ∴ ভ" বৈধ হলে, 'ব · ~ভ'-কে স্ববিরোধী বাক্যে রূপান্তরিত করা যাবে বা এর থেকে স্ববিরোধী নিষ্কাশন করা যাবে।

† মনে কর, 'S' প্রদত্ত-বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্যের, আমাদের 'ব · ~ভ'-এর, সংক্ষিপ্ত রূপ।
* পরে দেখব, এ সূত্র ও যুক্তিবিধিকে অসম্ভবতার নিয়ম, Rule of Absurdity, বলে।
** মানে, 'ব · ~ভ'

১৪. সাপেক্ষ যুক্তি : ভূমিকা

আমরা দেখেছি* যে গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে বাক্য বিভাগ প্রসঙ্গে "সাপেক্ষ" ("conditional") ও "অনপেক্ষ" ("categorical")—এ কথা দুটি ব্যবহৃত হয়। যে বাক্যের বক্তব্য "যদি– তাহলে–" আকারে ব্যক্ত হয় বা ব্যক্ত করা যায় গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে তাকে বলে সাপেক্ষ বাক্য। "যদি ক তাহলে খ" যেমন সাপেক্ষ বাক্য, সেরকম "ক অথবা খ"ও সাপেক্ষ বাক্য, কেননা এ বাক্যের বক্তব্য : যদি ~ক তাহলে খ। আবার, "এমন নয় যে ক-এবং-খ"—এ বাক্যও সাপেক্ষ, কেননা এর বক্তব্য : যদি ক তাহলে ~খ। দেখা গেল, প্রাকল্পিক, বৈকল্পিক ও প্রাতিকল্পিক বাক্য গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে সাপেক্ষ বাক্য বলে অভিহিত হয়।

আর আমরা যেসব বাক্যকে আণবিক বাক্য বলে এসেছি সে সব বাক্য (যথা, 'p, q', 'রাম বুদ্ধিমান' ইত্যাদি) ও এদের নিষেধ (যথা, '$\sim p$', 'রাম বুদ্ধিমান নয়' ইত্যাদি) গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে অনপেক্ষ বাক্য বলে চিহ্নিত হয়। এ বিভাগে আমরা "সাপেক্ষ", "অনপেক্ষ"—এ কথাগুলি ব্যবহার করব।

অধ্যায় ১০-এতে আমরা কয়েকটি বৈধ যুক্তি-আকার উল্লেখ করেছি—অমাধ্যম-যুক্তি-আকার ও কয়েকটি মাধ্যম-যুক্তি-আকার। উক্ত আকারের যুক্তির বৈশিষ্ট হল এই : এসব যুক্তিতে একটি হেতুবাক্য অনপেক্ষ। এখন আমরা আরও কয়টি মাধ্যম-যুক্তি-আকার উল্লেখ করতে যাচ্ছি। এসব আকারের যুক্তির বৈশিষ্ট্য হল এই যে এদের প্রত্যেকটি হেতুবাক্য সাপেক্ষ বাক্য। কেবল সাপেক্ষ হেতুবাক্য দিয়ে গঠিত বলে এ জাতীয় যুক্তিকে (বা যুক্তি-আকারকে) সাপেক্ষ যুক্তি (বা সাপেক্ষ যুক্তি-আকার) বলে উল্লেখ করব।

১৫. প্রাকল্পিক যুক্তি ও দ্বিকল্প যুক্তি

প্রাকল্পিক যুক্তি (HS)

সাপেক্ষ বাক্য বিভিন্নভাবে সংযুক্ত করে নানান আকারের বৈধ যুক্তি পাওয়া যায়। এরূপ যুক্তি-আকারের মধ্যে নিম্নোক্ত আকারের যুক্তি বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এ যুক্তি-আকার বা এ আকারের যুক্তির নাম প্রাকল্পিক যুক্তি—Hypothetical Syllogism, সংক্ষেপে HS।

প্রাকল্পিক যুক্তি (HS)

$$p \supset q$$
$$q \supset r$$
$$\therefore\ p \supset r$$

এখানে দুটি হেতুবাক্য। যে যুক্তিতে এ জাতীয় আরও হেতুবাক্য থাকে তা আসলে HS দিয়ে গঠিত যুক্তিশৃঙ্খল। যথা

$$A \supset B,\ B \supset C,\ C \supset D \quad \therefore\ A \supset D$$

* অধ্যায় ৬ বিভাগ ১২ দ্রষ্টব্য।

এ যুক্তিতে HS যুক্তিবিধি দুবার প্রয়োগ করা হয়েছে এবং এ যুক্তিকে বিশ্লেষণ করে দুটি HS-নামক যুক্তি পাওয়া যায় :

$A \supset B$	$A \supset C$	[প্রথম HS এর সিদ্ধান্ত]
$B \supset C$	$C \supset D$	[মূল যুক্তির তৃতীয় হেতুবাক্য]
$\therefore A \supset C$	$\therefore A \supset D$	[মূল যুক্তির সিদ্ধান্ত]

প্রদত্ত যুক্তিতে মধ্যবর্তী সিদ্ধান্ত "$A \supset C$" উহ্য আছে। এখন, HS যুক্তিবিধিটি আরও সাধারণভাবে ব্যক্ত করা যায়—এমনভাবে যে এ বিধি অনুসারে মধ্যবর্তী সিদ্ধান্ত না করেও চরম সিদ্ধান্তে পৌছান যায়। এ যুক্তিবিধিকে আমরা HS-এর সাধারণীকৃত রূপ বা HS শৃঙ্খল বলে অভিহিত করতে পারি।

HS-শৃঙ্খল

$$S_1 \supset S_2,\ S_2 \supset S_3, S_3 \supset S_4,\ S_4 \supset S_5 \cdots \cdots S_m \supset S_n \ \therefore S_1 \supset S_n$$

দ্বিকল্প যুক্তি (Dilemma)

প্রাচীনরা এক বিশেষ প্রকারের সাপেক্ষ যুক্তির উপর গুরুত্ব আরোপ করেন। এ যুক্তি ও যুক্তি-আকারের নাম দ্বিকল্প যুক্তি। এর গঠন এরূপ—

প্রথম হেতুবাক্য : দুটি প্রাকল্পিক বাক্যের সংযোগ
দ্বিতীয় হেতুবাক্য : একটি বৈকল্পিক বাক্য (প্রথম হেতুবাক্যের আণবিক অঙ্গ দিয়ে গঠিত)
সিদ্ধান্ত : অনপেক্ষ বাক্য বা বৈকল্পিক বাক্য
(হেতুবাক্যের কোনো আণবিক অঙ্গ, বা ঐ অঙ্গ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক)

উদাহরণ

(১)	(২)	(৩)
$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$	$(A \supset B) \cdot (C \supset B)$	$(A \supset B) \cdot (A \supset C)$
$A \vee C$	$A \vee C$	$\sim B \vee \sim C$
$\therefore B \vee D$	$\therefore B$	$\therefore \sim A$

যে দ্বিকল্প যুক্তির সিদ্ধান্ত অনপেক্ষ বাক্য তাকে বলে সরল দ্বিকল্প যুক্তি (Simple Dilemma), সংক্ষেপে SD ; যথা (২) ও (৩)। আর, যে দ্বিকল্প যুক্তির সিদ্ধান্ত বৈকল্পিক তাকে বলে জটিল দ্বিকল্প যুক্তি (Complex Dilemma), সংক্ষেপে CD ; যথা (১)।

আবার অন্য একদিক থেকে দ্বিকল্প যুক্তিকে অন্বয়ী (Constructive) আর ব্যতিরেকী (Destructive)—এ দুভাগে ভাগ করা হয়। যে দ্বিকল্প যুক্তিতে প্রথম হেতুবাক্যের পূর্বকল্প দুটি দিয়ে দ্বিতীয় হেতুবাক্য গঠন করা হয় তাকে বলে অন্বয়ী দ্বিকল্প যুক্তি (Constructive Dilemma)। আর যে দ্বিকল্প যুক্তিতে প্রথম হেতুবাক্যের অনুকল্প দুটির নিষেধ দিয়ে দ্বিতীয় হেতুবাক্য গঠন করা হয় তাকে বলে ব্যতিরেকী দ্বিকল্প যুক্তি (Destructive Dilemma)। যথা, উক্ত উদাহরণের (১) হল অন্বয়ী আর (৩) হল ব্যতিরেকী।

এখন, সরল বা জটিল দ্বিকল্প যুক্তি অন্বয়ীও হতে পারে, ব্যতিরেকীও হতে পারে। তার মানে দ্বিকল্প যুক্তি চারটি রূপ গ্রহণ করতে পারে। নিচে এদের নাম উল্লেখ করা হল এবং আকারগুলি দেখানো হল।

Simple Constructive Dilemma (SCD) [সরল অন্বয়ী দ্বিকল্প যুক্তি]
Simple Destructive Dilemma (SDD) [সরল ব্যতিরেকী দ্বিকল্প যুক্তি]
Complex Constructive Dilemma (CCD) [জটিল অন্বয়ী দ্বিকল্প যুক্তি]
Complex Destructive Dilemma (CDD) [জটিল ব্যতিরেকী দ্বিকল্প যুক্তি]

SCD : $(p \supset r) \cdot (q \supset r)$, $p \vee q$ $\therefore$ r
SDD : $(r \supset p) \cdot (r \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$
CCD : $(p \supset r) \cdot (q \supset s)$, $p \vee q$ $\therefore$ $r \vee s$
CDD : $(r \supset p) \cdot (s \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$

এখন, MTকে যেমন MPতে রূপান্তরিত করা যায়, দেখতে পাবে, ব্যতিরেকী আকারকে তেমনি অন্বয়ী আকারে রূপান্তরিত করা যায়। রূপান্তরগুলি লক্ষ কর।

মূল SDD : $(r \supset p) \cdot (r \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$
রূপান্তর : $(\sim p \supset \sim r) \cdot (\sim q \supset \sim r)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$: SCD
[ব্যাবর্তনের সূত্র প্রয়োগ করে]

মূল CDD : $(r \supset p) \cdot (s \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$
রূপান্তর : $(\sim p \supset \sim r) \cdot (\sim q \supset \sim s)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$: CCD
[ব্যাবর্তনের সূত্র প্রয়োগ করে]

১৬. সরল দ্বিকল্প যুক্তি ও MP

দেখা যাবে যে, দ্বিকল্প যুক্তির সরল আকার দুটিকে MPতে রূপান্তরিত করা যায়। এ রূপান্তর দেখাতে গিয়ে আমরা নিম্নোক্ত সূত্র দুটির সাহায্য নেব।

আংশিক সঙ্কালনের সূত্র

সূত্র ১ "$(p \supset r) \cdot (q \supset r)$" সম "$(p \vee q) \supset r$"
সূত্র ২ "$(r \supset p) \cdot (r \supset q)$" সম "$(r \supset (p \cdot q)$"

নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষ করলে নিশ্চিত হতে পারবে যে উক্ত সূত্রগুলির দুধার প্রকৃতই সমার্থক।

$(p \supset r) \cdot (q \supset r)$			
$(\sim p \vee r) \cdot (\sim q \vee r)$	[Df ⊃]	$(r \supset p) \cdot (r \supset q)$	
$(r \vee \sim p) \cdot (r \vee \sim q)$	[Com]	$(\sim r \vee p) \cdot (\sim r \vee q)$	[Df ⊃]
$r \vee (\sim p \cdot \sim q)$	[Dist]	$\sim r \vee (p \cdot q)$	[Dist]
$(\sim p \cdot \sim q) \vee r$	[Com]	$r \supset (p \cdot q)$	[Df ⊃]
$\sim(\sim p \cdot \sim q) \supset r$	[Df ⊃, DN]		
$(p \vee q) \supset r$	[DM, DN]		

এখন অতি সহজেই দেখানো যায় যে SCD আর SDDকে MP-এরই প্রকারভেদ বলে গণ্য করা যায়। নিম্নোক্ত রূপান্তরগুলি লক্ষণীয়।

মূল SCD : $(p \supset r) \cdot (q \supset r)$, $p \vee q$ $\therefore$ r
রূপান্তর : $(p \vee q) \supset r$, $p \vee q$ $\therefore$ r : (MP)
[সূত্র ১ প্রয়োগ করে]

মূল SDD : $(r \supset p) \cdot (r \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$
রূপান্তর : $r \supset (p \cdot q)$, $\sim (p \cdot q)$ $\therefore$ $\sim r$: MT [সূত্র ২, DM, DN]
" : $\sim (p \cdot q) \supset \sim r$, $\sim (p \cdot q)$ $\therefore$ $\sim r$: MP [ব্যাবর্তন]

SDD-কে এ ভাবেও MP-তে রূপান্তরিত করা যেত।*

মূল SDD : $(r \supset p) \cdot (r \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$
রূপান্তর : $(\sim p \supset \sim r) \cdot (\sim q \supset \sim r)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$: SCD [ব্যাবর্তন]
" : $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim r$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r$: MP [সূত্র ১]*

১৭. জটিল দ্বিকল্প যুক্তি ও HS-শৃঙ্খল

আমরা দেখতে পাব, জটিল দ্বিকল্প যুক্তি HS-শৃঙ্খল বলে গণ্য হতে পারে। তার আগে একটা কথা। বলা বাহুল্য, যুক্তির হেতুবাক্যগুলি আসলে সংযোগী এবং সেজন্য ক্রমান্তরযোগ্য। যথা

$$A \supset B, \ A \ \therefore B$$

এ যুক্তি এভাবেও বিন্যস্ত হতে পারত : $A, \ A \supset B \ \therefore B$

তারপর, কোনো হেতুবাক্য যদি সংযৌগিক আকারের বাক্য হয় তাহলে ইচ্ছা করলে সংযোগীগুলি পৃথক পৃথকভাবে বা পৃথক পৃথক ছত্রে লিখতে পারি। যথা—

$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$
$A \vee C$
$\therefore$ $B \vee D$

এর বদলে লিখতে পারি

$A \supset B$
$C \supset D$
$A \vee C$
$\therefore$ $B \vee D$

বা, $A \supset B, \ C \supset D, \ A \vee C \ \therefore \ B \vee D$

জটিল দ্বিকল্প যুক্তিগুলি যে HS-শৃঙ্খল তা এখন দেখাতে পারি। রূপান্তরগুলি লক্ষ কর।

মূল CCD : $(p \supset r) \cdot (q \supset s)$, $p \vee q$ $\therefore$ $r \vee s$
রূপান্তর : $p \supset r$, $q \supset s$, $p \vee q$ $\therefore$ $r \vee s$ [সংযোগী পৃথককরণ]
" : $p \supset r$, $p \vee q$, $q \supset s$ $\therefore$ $r \vee s$ [হেতুবাক্যের ক্রমান্তরকরণ]
" : $\sim r \supset \sim p$, $\sim p \supset q$, $q \supset s$ $\therefore$ $\sim r \supset s$: HS-শৃঙ্খল
[ব্যাবর্তন, Df $\supset$, DN]

মূল CDD : $(r \supset p) \cdot (s \supset q)$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$
রূপান্তর : $r \supset p$, $s \supset q$, $\sim p \vee \sim q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$ [সংযোগী পৃথককরণ]
" : $r \supset p$, $\sim p \vee \sim q$, $s \supset q$ $\therefore$ $\sim r \vee \sim s$ [হেতুবাক্যের ক্রমান্তর]
" : $r \supset p$, $p \supset \sim q$, $\sim q \supset \sim s$ $\therefore$ $r \supset \sim s$: HS-শৃঙ্খল
[Df $\supset$, ব্যাবর্তন]

* আর যদি আমরা "$(r \supset p) \cdot (r \supset q)$" সম "$(\sim p \vee \sim q) \supset \sim r$"—এ সূত্রটি প্রয়োগ করতাম তাহলে আরও সহজে দেখাতে পারতাম যে SDD হল MP-এরই প্রকারভেদ।

১৮. বিশ্লেষক দ্বিকল্প যুক্তি

এতক্ষণ আমরা যে দ্বিকল্প যুক্তি আলোচনা করেছি সেগুলি সংশ্লেষক যুক্তি। দ্বিকল্প যুক্তি দু প্রকার : সংশ্লেষক ও বিশ্লেষক। যে দ্বিকল্প যুক্তির বৈকল্পিক হেতুবাক্যটি সংশ্লেষক তাকে বলে সংশ্লেষক দ্বিকল্প যুক্তি (Synthetic Dilemma)। আর যে দ্বিকল্প যুক্তির বৈকল্পিক হেতুবাক্যটি বিশ্লেষক—আরও নির্দিষ্টভাবে, 'ক v ~ক' আকারের স্বতসত্য—তাকে বলে বিশ্লেষক দ্বিকল্প যুক্তি (Analytic Dilemma)। ২১৯ পৃষ্ঠায় যে আকারগুলি উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি সংশ্লেষক যুক্তির আকার। বিশ্লেষক যুক্তি-আকারগুলি লক্ষ কর।

বিশ্লেষক দ্বিকল্পযুক্তি-আকার

SCD(A)* : $(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q),\ p \vee \sim p \quad \therefore\ q$

SDD(A) : $(q \supset p) \cdot (q \supset \sim p),\ \sim p \vee p \quad \therefore\ \sim q$

CCD(A) : $(p \supset r) \cdot (\sim p \supset s),\ p \vee \sim p \quad \therefore\ r \vee s$

CDD(A) : $(r \supset p) \cdot (s \supset \sim p),\ \sim p \vee p \quad \therefore\ \sim r \vee \sim s$

আমরা জানি, কোনো যুক্তির হেতুবাক্যগুলি সংযোগী—একই সংযৌগিক বাক্যের বিভিন্ন অঙ্গ। হেতুবাক্যগুলি সাধারণত পৃথক ছত্রে লেখা হয় বলে, "," ব্যবহার করেছি ; এ "," প্রকৃতপক্ষে "·" এর কাজ করছে। এখন, নিম্নোক্ত সমার্থতা সূত্রটির দিকে নজর দাও।

স্বতসত্য বর্জন : "প · (ফ v ~ফ)" equiv "প"

সত্যসারণী গঠন করলে দেখতে পাবে উক্ত সূত্রের দু ধার সমার্থক। এ সূত্রের বক্তব্য হল

যে কোনো সংযৌগিক বাক্যের স্বতসত্য সংযোগীটি বর্জন করা যায়।

যথা, SCD-এর হেতুবাক্য

$$(p \supset q)\ ,(\sim p \supset q)\ ,(p \vee \sim p)$$

বা

$$\underbrace{(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q)}_{\text{প}} \cdot \underbrace{(p \vee \sim p)}_{\text{ফ v ~ফ}}$$

-এর পরিবর্তে লেখা যায় :

$$p \supset q \cdot \sim p \supset q$$

যে কোনো যুক্তির হেতুবাক্যগুলি সংযোগী, কাজেই উক্ত সূত্র অনুসারে যে কোনো স্বতসত হেতুবাক্য বর্জন করতে পারি। তাহলে উক্ত বিশ্লেষক দ্বিকল্প যুক্তি-আকারের স্বতসত (দ্বিতীয়) হেতুবাক্য বাদ দিয়ে এভাবে আকারগুলি লিখতে পারি।

SCD(A) : $(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q) \quad \therefore\ q$

SDD(A) : $(q \supset p) \cdot (q \supset \sim p) \quad \therefore\ \sim q$

CCD(A) : $(p \supset r) \cdot (\sim p \supset s) \quad \therefore\ r \vee s$

CDD(A) : $(r \supset p) \cdot (s \supset \sim p) \quad \therefore\ \sim r \vee \sim s$**

প্রথম আকার দুটি বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ, বিশেষত SDD(A)। এদের অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যগুলি লক্ষ কর।

* "Analytic"-এর সংক্ষেপক হিসাবে 'A'

** লক্ষণীয়, Trans, Idem, Df ⊃-এর সাহায্য নিয়ে প্রত্যেকটি আকারকে HS-এতে রূপান্তরিত করা যায়।

SCD(A)-এর নীতি : $[(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q)] \supset q$ (১)

SDD(A)-এর নীতি : $[(q \supset p) \cdot (q \supset \sim p)] \supset \sim q$ (২)

উক্ত স্বতসত্য বাক্য দুইটির বক্তব্য, যথাক্রমে

(১') যদি এমন হয় যে কোনো বাক্য 'ব' সত্য হলেও 'ভ' সত্য আবার 'ব' মিথ্যা হলেও 'ভ' সত্য তাহলে (অনুকল্প) 'ভ' সত্য।

(২') যদি এমন হয় যে কোনো বাক্য 'ভ' সত্য হলে 'ব'-ও সত্য আবার '~ব'-ও সত্য তাহলে (পূর্বকল্প) 'ভ' মিথ্যা।

আংশিক সঞ্চালনের সূত্র* প্রয়োগ করে (১) ও (২)-কে এভাবে ব্যক্ত করা যায় :

$[(p \vee \sim p) \supset q] \supset q$ (1)

$[q \supset (p \cdot \sim p)] \supset \sim q$ (2)

এদের আবার নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করা যায় :

$[\sim q \supset (p \cdot \sim p)] \supset q$ (1')**

$[\ q \supset (p \cdot \sim p)] \supset \sim q$ (2')

এ বাক্যগুলি বৈধ, কাজেই এদের প্রতিপত্তি হিসাবে ব্যক্ত করতে পারি—

"$\sim q \supset (p \cdot \sim p)$" প্রতিপা→ '$q$'

"$q \supset (p \cdot \sim p)$" প্রতিপা→ '$\sim q$'

এ সূত্রগুলি খুব গুরুত্বপূর্ণ। এদের বলে Law of Absurdity, (স্বত)মিথ্যাসাধ্যতার নিয়ম বা অসম্ভবতার নিয়ম। সত্যসারণী গঠন করলে দেখতে পাবে এ সূত্রগুলির বাম ধার যে ডান ধারের প্রতিপাদক কেবল তাই নয়, এদের দু ধার সমার্থক। কাজেই অসম্ভবতার নিয়মটি একটি সমার্থতা সূত্র হিসাবে ব্যক্ত করতে পারি। আমরা এ নিয়মটি সমার্থতা সূত্র হিসাবেই ব্যবহার করব। নিয়মটি লক্ষ কর।

Law of Absurdity : "~ভ ⊃ (ক · ~ক)" equiv "ভ"†

অনুশীলনী

১. সত্যসারণী গঠন না করে বল "$A \cdot B$" নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌গুলির প্রতিপাদক :

(i) A	(iv) $A \cdot \sim B$	(vii) $A \equiv A$
(ii) $A \vee B$	(v) $\sim A \supset B$	(viii) $B \vee \sim B$
(iii) $\sim A \vee B$	(vi) $A \equiv B$	(ix) $\sim C \supset \sim C$

* ২২১ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

** (1)-এর পূর্বকল্পে ব্যাবর্তনের সূত্র, DM, DN প্রয়োগ করে (1') পাওয়া যাবে।

† এভাবে নিয়মটি ব্যক্ত করতে পারতাম "ভ ⊃ (ক · ~ক)" equiv "~ভ"। কিন্তু প্রথমোক্ত রূপটি গ্রহণ করা আমাদের পক্ষে সুবিধাজনক।

২. '$A \vee B$' নিম্নোক্ত বাক্যগুলির কোন্‌গুলিকে প্রতিপাদন করে ?

(i) B (iv) $B \supset B$
(ii) $\sim A \supset B$ (v) $A \equiv A$
(iii) $B \supset A$ (vi) $\sim(\sim A \cdot \sim B)$

৩. 'p', 'q'—এ বর্ণপ্রতীকগুলির প্রত্যেকটি কেবল একবার করে ব্যবহার করে এমন কতকগুলি (যত বেশী সংখ্যক পার) বাক্য রচনা কর :

(i) যা '$\sim p$'-কে প্রতিপাদন করে (মানে '$\sim p$' প্রতিপাদ্য)
(ii) যাকে '$\sim p$' প্রতিপাদন করে (মানে '$\sim p$' প্রতিপাদক) (কোয়াইন্‌)

৪.	
$A \vee A$	$A \supset (B \vee \sim B)$
$\sim A \vee A$	$A \supset (A \supset A)$
$A \supset \sim A$	$(A \cdot \sim A) \supset B$
$\sim A \supset A$	$A \equiv A$

এ বাক্যগুলির কোন্‌গুলি :

(i) 'A'-এর সমার্থক
(ii) '$\sim A$'-এর সমার্থক
(iii) '$A \vee \sim A$'-এর সমার্থক ?

৫. নিচে প্রত্যেক ছত্রে দুটি করে বাক্য আছে। সত্যসারণী গঠন করে দেখাও যে প্রত্যেক ছত্রের প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক।

A	$A \vee B \vee C$
$\sim A$	$\sim(A \cdot B \cdot C)$
$A \supset B$	$(C \supset A) \supset (C \supset B)$
$A \supset B$	$(B \supset C) \supset (A \supset C)$
$A \equiv B$	$(A \vee C) \supset (B \vee C)$
$A \equiv B$	$(A \cdot C) \equiv (B \cdot C)$

৬. নিচে প্রত্যেক ছত্রে দুটি করে বাক্য আছে। বাক্য দুটি কি সমার্থক ?

$A \vee \sim A$	$\sim B \supset \sim B$
$A \cdot \sim A$	$\sim(B \vee \sim B)$
A	$B \equiv (A \supset B)$
$A \supset B$	$(A \vee B) \equiv B$
$(A \vee B) \supset C$	$(A \supset C) \cdot (B \supset C)$
$A \supset (B \cdot C)$	$(A \supset B) \vee (A \supset C)$
$A \vee \sim A$	$(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$

৭. পরোক্ষ সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈধতা নির্ণয় কর :

$(A \supset B) \cdot \sim C \cdot (B \supset C) \cdot A$

$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (\sim B \vee \sim D)] \supset (\sim A \vee \sim C)$

$[(A \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(A \vee C) \supset (B \vee D)]$

$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C)] \supset (B \cdot D)$

$[A \supset (B \vee C) \cdot \sim A \cdot \sim C] \supset (\sim B \vee D)$

$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C)] \supset (B \cdot D)$

৮. বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

$\sim(A \vee B),\ C \supset A \quad \therefore \sim C$

$A \vee (B \cdot C),\ \sim B \vee (A \cdot C) \quad \therefore A$

$A \cdot [(A \vee B) \supset C] \quad \therefore C$

$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \quad \therefore A \supset C$

$(A \supset B), (C \supset D), (A \vee C) \quad \therefore B \vee D$

৯. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর :

(i) $(A \cdot B) \supset C,\ A \quad \therefore C$

(ii) $A \supset (B \cdot C),\ \sim C \quad \therefore \sim A$

(iii) $(A \vee B) \supset (A \cdot B),\ \sim(A \cdot B) \quad \therefore \sim(A \vee B)$

(iv) $(A \supset B), (C \supset D), (\sim B \vee \sim D) \quad \therefore \sim A \vee \sim C$

(v) $A \supset B,\ C \supset D \quad \therefore (A \vee C) \supset (B \vee D)$

১০. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলিকে MP আকারে ব্যক্ত কর :

$A \supset B,\ C \supset B,\ A \vee C \quad \therefore B$

$\sim A \supset B,\ \sim A \supset C,\ \sim B \vee \sim C \quad \therefore A$

কোন্ কোন্ সূত্র প্রয়োগ করে রূপান্তর করলে তাও উল্লেখ করবে।

১১. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলিকে HS আকারে রূপান্তরিত কর :

$\sim A \supset B,\ C \supset D,\ \sim A \vee C \quad \therefore B \vee D$

$A \supset \sim B,\ C \supset \sim D,\ B \vee D \quad \therefore \sim A \vee \sim C$

১২. পরোক্ষ সত্যসারণীর সাহায্যে দেখাও যে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি বৈধ :

$A \equiv B \quad \therefore (A \vee C) \equiv (B \vee C)$

$A \equiv B \quad \therefore (C \supset A) \equiv (C \supset B)$

$A \equiv B \quad \therefore (A \supset C) \equiv (B \supset C)$

১৩. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির হেতুবাক্যের ও সিদ্ধান্তের অঙ্গবাক্যে এমন মূল্য বসাও যাতে হেতুবাক্য সত্য আর সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয় :

$A \supset B,\quad B \vee C,\quad C \supset D \quad \therefore A \vee D$

$A \supset (B \vee C),\quad C \supset (D \cdot E),\quad \sim D \quad \therefore A \supset E$

$\sim A \supset (B \supset \sim C),\quad B \supset (C \supset D),\quad (\sim C \vee D) \supset \sim E \quad \therefore \sim A \supset \sim E$

যে পদ্ধতি প্রয়োগ করে এ প্রশ্নের উত্তর দিলে তার নাম কী ?*

---

* অধ্যায় ১৬-তে আর একটি পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে। ঐ পদ্ধতি প্রয়োগ করে আরও সহজে এ জাতীয় প্রশ্নের উত্তর দেওয়া যায়।

১৩

সাত প্রকার বাক্যসম্বন্ধ

১. অতিপ্রতিপত্তি (Super-implication) ও অনুপ্রতিপত্তি (Sub-implication)

বাক্যের মধ্যে নানান প্রকারের সম্বন্ধ থাকতে পারে। আমরা এতক্ষণ তিন প্রকারের (বস্তুত চার প্রকারের) সম্বন্ধের কথা বলেছি : সমার্থতা, প্রতিপত্তি ও বিরুদ্ধতা। "চার প্রকারের" বলছি এজন্য : প্রতিপত্তি অ-সমমুখী সম্বন্ধ, কাজেই প্রতিপত্তি বলতে আসলে দুটি সম্বন্ধ বোঝায়। "'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে প্রতিপত্তি সম্বন্ধ আছে" বললে বোঝা যায় না কোন্‌টি প্রতিপাদক কোন্‌টি প্রতিপাদ্য। এজন্য বলার দরকার : অমুক অমুকের প্রতিপাদক (বা প্রতিপাদ্য)। ধরা যাক, 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক।

যদি 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে "ব ⊃ ভ" বৈধ। এখন, "ব ⊃ ভ" আর "~ভ ⊃ ~ব" সমার্থক। কাজেই

যদি 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে)
"~ভ ⊃ ~ব" বৈধ।

এখন, যদি "~ভ ⊃ ~ব" বৈধ হয় তাহলে বলা হয় : 'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক (sub-implicant)। 'ভ' থেকে 'ব'-এর দিকে গেলে যে সম্বন্ধ পাই তাকে বলে অনুপ্রতিপত্তি বা ব্যতিরেকী প্রতিপত্তি (sub-implication)-এর সম্বন্ধ। দেখা গেল যে

যদি "~ভ ⊃ ~ব" বৈধ হয় তাহলে বলা হয় : 'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক। আর অনুপ্রতিপাদক থেকে তফাৎ করার জন্য যাকে এতক্ষণ কেবল প্রতিপাদক বলে এসেছি তাকে অতিপ্রতিপাদক বলেও অভিহিত করা হয়। মানে যদি "ব ⊃ ভ" বৈধ হয় তাহলে বলা হয় : 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক (super-implicant)। এবং 'ব' থেকে 'ভ'-এর দিকে গেলে যে সম্বন্ধ পাওয়া যায় তাকে বলে অতিপ্রতিপত্তি বা অন্বয়ী প্রতিপত্তি (super-implication)-এর সম্বন্ধ।* লক্ষণীয়,

'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক ("ব ⊃ ভ" বৈধ)
'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক ("~ভ ⊃ ~ব" বৈধ)

এ বাক্য দুটি সমার্থক। আবার

'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক ("~ভ ⊃ ~ব" বৈধ)
'~ভ' '~ব'-এর অতিপ্রতিপাদক ("~ভ ⊃ ~ব" বৈধ)

* লক্ষণীয়, এতক্ষণ যাকে প্রতিপাদক বলে এসেছি বর্তমানে তাকে অতিপ্রতিপাদক বলে অভিহিত করা হচ্ছে। আর যাকে প্রতিপত্তি বলে এসেছি এখন সে সম্বন্ধকে অতিপ্রতিপত্তি বলে অভিহিত করছি।

এ বাক্য দুটিও সমার্থক। উক্ত সমার্থতা বাক্যগুলি থেকে আরও একটি সমার্থতা পাই

" 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক" equiv " '∼ভ' '∼ব'-এর অতিপ্রতিপাদক"।

কিন্তু প্রাকল্পিক বাক্য সম্বন্ধে যা বলা হয়েছে (১০০ পৃঃ দ্রষ্টব্য) তা বুঝে থাকলে একথাও বুঝতে পারবে যে

'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক ('ব ⊃ ভ' বৈধ)

'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক ('∼ব ⊃ ∼ভ' বৈধ)

এ বাক্যগুলি সমার্থক নয়।

প্রসঙ্গত, যদি এমন হয় যে 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদকও বটে অনুপ্রতিপাদকও বটে তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক বাক্য।*

চার রকমের বাক্যসম্বন্ধ পেলাম। এখন, বাক্যসম্বন্ধ সাত প্রকার—দুটি বাক্যের মধ্যে সাত প্রকারের বাক্যসম্বন্ধের কোনো না কোনোটি অবশ্যই খাটবে। নিচে আর তিন প্রকার বাক্যসম্বন্ধ আলোচনা করা হল।

২. অনুবিষমতা (Sub-contrariety)

দুটি বাক্যের মধ্যে এমন সম্বন্ধ থাকতে পারে যে, দুটি বাক্যই মিথ্যা হতে পারে না** কিন্তু এদের যুগপৎ সত্য হতে বাধা নেই। এরকম ক্ষেত্রে বলা হয়ঃ বাক্য দুটির সম্বন্ধ হল অনুবিষমতার সম্বন্ধ, বাক্য দুটি পরস্পরের অনুবিষম (sub-contrary)।

যথা

$$p \qquad\qquad \sim p \vee q$$

পরস্পরের অনুবিষম। এদের উভয়ই মিথ্যা হতে পারে না, একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য। কেন এ বাক্য দুটির উভয়ই যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে না, বুঝে নাও।

p	$\sim p \vee q$		$\sim p \vee q$	p
0	1 0 ∨ q		0	
	1		0 1 0	1

এখন, " 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম" equiv " 'ব', 'ভ'-এর উভয়ই মিথ্যা হতে পারে না"

" 'ব', 'ভ'-এর উভয়ই মিথ্যা হতে পারে না"† equiv " 'ব ∨ ভ' বৈধ"

∴ " 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম" equiv " 'ব ∨ ভ' বৈধ"

আমরা দেখলাম, দুটি অনুবিষম বাক্যের কোনো একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য। কিন্তু, লক্ষণীয়, এদের কোনো একটি সত্য হলে অন্যটি অনির্ণেয় (সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে)।

* বা যদি এমন হয় যে 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক আবার 'ভ' 'ব'-এর অতিপ্রতিপাদক তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক বাক্য।

** মানে—একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য

† এ কথার মানে ঃ "∼(∼ব · ∼ভ)" স্বতসত্য।

উদাহরণ

p	q	p	$\sim p \vee q$	$\sim p \vee q$	p
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0

তৃতীয় ও চতুর্থ সারি লক্ষ করলে বোঝা যাবে প্রথম বাক্যটি মিথ্যা হলে দ্বিতীয়টি সত্য হতে বাধ্য।
১ম ও ২য় সারি দুটি করলে দেখবে প্রথম বাক্যটি সত্য হলে দ্বিতীয়টি সত্যও হতে পারে মিথ্যাও হতে পারে।

দ্বিতীয় সারি থেকে বোঝা যায় "$\sim p \vee q$" মিথ্যা হলে অবশ্যই 'p' সত্য।
১ম ও ৩য় সারি লক্ষ করলে দেখবে প্রথম বাক্যটি সত্য হলে দ্বিতীয়টি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে।

বাক্য দুটির ফলস্তম্ভ তুলনা করলে দেখবে কোনো সারিতে 00 নেই। এ কথার মানে, স্পষ্টতই,—বাক্য দুটি যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে না।

৩. অতিবিষমতা বা বৈপরীত্য (Contrariety)

দুটি বাক্যের মধ্যে এমন সম্বন্ধ থাকতে পারে যে, দুটি বাক্যই সত্য হতে পারে না* কিন্তু এদের যুগপৎ মিথ্যা হতে বাধা নেই। এরকম ক্ষেত্রে বলা হয়ঃ বাক্য দুটির সম্বন্ধ হল অতিবিষমতার সম্বন্ধ, বাক্য দুটি পরস্পরের অতিবিষম বা বিপরীত (contrary)। যথা

$$p \qquad\qquad \sim p \cdot q$$

পরস্পরের অতিবিষম বা বিপরীত। এদের উভয়ই সত্য হতে পারে না, একটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা। এ বিষয়ে সংশয় হলে নিম্নোক্ত সত্যমূল্য আরোপ দেখে নাও।

$$\begin{array}{cc} p & \sim p \cdot q \\ 1 & 0 \cdot q \\ & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \sim p \cdot q & p \\ 1 & \\ 1\;0\;1 & 0 \end{array}$$

এখন, " 'ব' ও 'ভ' অতিবিষম" equiv " 'ব', 'ভ'-এর উভয়ই সত্য হতে পারে না"
" 'ব', 'ভ'-এর উভয়ই সত্য হতে পারে না"
equiv " '~(ব · ভ)' বৈধ" equiv " 'ব' / 'ভ' বৈধ"
∴ 'ব' ও 'ভ' অতিবিষম equiv " 'ব / ভ' বৈধ।"

আমরা দেখলাম, দুটি অতিবিষম বাক্যের কোনোটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা। কিন্তু, লক্ষণীয়, এদের কোনো একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অনির্ণেয়।

* মানে—একটি সত্য হলে অন্যটি অবশ্যই মিথ্যা

উদাহরণ

p	q	p	$\sim p \cdot q$	$\sim p \cdot q$	p
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0

প্রথম ও দ্বিতীয় সারি লক্ষ করলে বোঝা যাবে প্রথম বাক্যটি সত্য হলে দ্বিতীয়টি মিথ্যা হতে বাধ্য।

৩য় ও ৪র্থ সারি লক্ষ করলে দেখবে প্রথম বাক্যটি মিথ্যা হলে দ্বিতীয়টি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে।

তৃতীয় সারি থেকে বোঝা যায় "$\sim p \cdot q$" সত্য হলে 'p' অবশ্যই মিথ্যা।

২য় ও ৪র্থ সারি লক্ষ করলে বোঝা যাবে "$\sim p \cdot q$" মিথ্যা হলে 'p' সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে।

বাক্য দুটির ফলস্তম্ভ তুলনা করলে দেখবে কোনো সারিতে 11 নেই। এ কথার মানে—বাক্য দুটি যুগপৎ সত্য হতে পারে না।

৪. স্বাতন্ত্র্য (Independence)

উপরে ছয় প্রকারের বাক্য সম্বন্ধের কথা বলা হল। এখন আর একটি বাক্য সম্বন্ধ। দুটি বাক্য এমন হতে পারে যে, বাক্য দুটির মধ্যে উপরোক্ত কোনো সম্বন্ধ খাটে না। এরকম ক্ষেত্রে বলা হয়ঃ বাক্য দুটি স্বতন্ত্র (independent), এদের মধ্যে স্বাতন্ত্র্য সম্বন্ধ বর্তমান। দুটি স্বতন্ত্র বাক্যের সম্বন্ধ এমন যে, এদের

> একটি সত্য হলে অন্যটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে, আবার
> একটি মিথ্যা হলে অন্যটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে।

মানে—এদের কোনোটির সত্যতা মিথ্যাত্ব থেকে অন্যটির সত্যতা মিথ্যাত্ব সম্বন্ধে কোনো কিছু নিশ্চিতভাবে জানা যায় না।

উদাহরণ

"p" আর "q" স্বতন্ত্র বাক্য

"p" আর "$q \cdot r$" স্বতন্ত্র বাক্য

সত্যসারণী গঠন করে এদের ফলস্তম্ভ তুলনা করে দেখ। ফলস্তম্ভ দুটিতে 11, 10, 01, 00—এ সকল সম্ভাব্য সত্যমূল্যবিন্যাসই দেখতে পাবে।

যে সাতটি বাক্যসম্বন্ধ পেলাম সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল।

৫. বিভিন্ন বাক্যসম্বন্ধের সংজ্ঞা

সমার্থতা (Equivalence) বা
সমপ্রতিপত্তি (Co-implication)

" 'ব' ও 'ভ' (পরস্পরের) সমার্থক" এ কথার মানে : "ব ≡ ভ" স্বতসত্য*

মানে : 'ব', 'ভ'-এর
একটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা হতে পারে না, এবং
একটি মিথ্যা হলে অন্যটি সত্য হতে পারে না ।

অতিপ্রতিপত্তি (Super-implication) বা
অন্বয়ী প্রতিপত্তি

" 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক (super-implicant)"—এ কথার মানে :
"ব ⊃ ভ" স্বতসত্য

মানে : এমন হতে পারে না যে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা, অর্থাৎ
'ব' সত্য হলে 'ভ' অবশ্যই সত্য ।

অনুপ্রতিপত্তি (Sub-implication) বা
ব্যতিরেকী প্রতিপত্তি

" 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক (sub-implicant)—এ কথার মানে :
"∼ব ⊃ ∼ভ" † স্বতসত্য

মানে : এমন হতে পারে না যে 'ব' মিথ্যা ও 'ভ' সত্য, অর্থাৎ
'ব' মিথ্যা হলে 'ভ' অবশ্যই মিথ্যা ।

স্বাতন্ত্র্য (Independence)

" 'ব' ও 'ভ' স্বতন্ত্র (independent) বাক্য" এ কথার মানে : 'ব', 'ভ'-এর কোনোটি সত্য হলে অন্যটির সত্যমূল্য অনির্ণেয়, এবং কোনোটি মিথ্যা হলেও অন্যটির সত্যমূল্য অনির্ণেয় ।**

অনুবিষমতা
(Sub-contrariety, বা
Sub-opponency)

" 'ব' ও 'ভ' (পরস্পরের) অনুবিষম" এ কথার মানে : "ব ∨ ভ" স্বতসত্য

মানে : এমন হতে পারে না যে 'ব', 'ভ'-এদের উভয়ই মিথ্যা, মানে—
যদি এদের কোনো একটি মিথ্যা হয় তাহলে অন্যটি অবশ্যই সত্য।

* চাও ত এভাবেও লক্ষণ দিতে পার : 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "ব ≡ ভ" স্বতসত্য হয় । অন্যান্য বাক্যসম্বন্ধের বেলায়ও "—হতে পারে যদি এবং কেবল যদি—" আকার ব্যবহার করতে পার ।

† বা "ভ ⊃ ব" স্বতসত্য ।

** মানে, একটির প্রদত্ত সত্যমূল্য থেকে অন্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করা যায় না ।

অতিবিষমতা (Super-opponency) বা
বৈপরীত্য (Contrariety)

" 'ব' ও 'ভ' (পরস্পরের) অতিবিষম বা বিপরীত (contrary)"—এ কথার মানে
"ব / ভ" স্বতসত্য, বা
"~(ব · ভ)" স্বতসত্য।

মানে : এমন হতে পারে না যে 'ব', 'ভ'-এদের উভয়ই সত্য, মানে—
যদি এদের কোনো একটি সত্য হয় তাহলে অন্যটি অবশ্যই মিথ্যা।

বিষমার্থতা (Co-opponency) বা
বিরুদ্ধতা (Contradiction)

" 'ব' ও 'ভ' (পরস্পরের) বিরুদ্ধ বা বিষমার্থক"—এ কথার মানে :
"~(ব ≡ ভ)" স্বতসত্য*

মানে : 'ব', 'ভ'-এর
দুটিই সত্য হতে পারে না, এবং দুটিই মিথ্যা হতে পারে না, মানে—
এদের একটি সত্য হলে অন্যটি অবশ্যই মিথ্যা, এবং
একটি মিথ্যা হলে অন্যটি অবশ্যই সত্য।

৬. অতিপ্রতিপত্তি ও অন্যান্য সম্বন্ধ

লক্ষণীয়

" 'ব' ও 'ভ' সমার্থক" মানে :
'ব', 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদকও বটে, অনুপ্রতিপাদকও বটে, বা
'ভ' 'ব'-এর অতিপ্রতিপাদকও বটে, অনুপ্রতিপাদকও বটে।

মানে : "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য এবং "ভ ⊃ ব" স্বতসত্য
মানে : "(ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব)" স্বতসত্য।

তারপর

" 'ব' ও 'ভ' পরস্পর বিরুদ্ধ" মানে :
'ব' ও 'ভ' অতিবিষমও বটে, অনুবিষমও বটে

মানে : "ব / ভ" স্বতসত্য এবং "ব ∨ ভ" স্বতসত্য
মানে : "(ব / ভ) · (ব ∨ ভ)" স্বতসত্য

এর থেকে বোঝা যায়, স্বাতন্ত্র্য বাদ দিলে পাই মোট চারটি মৌলিক সম্বন্ধ : অতিপ্রতিপত্তি, অনুপ্রতিপত্তি, অনুবিষমতা ও অতিবিষমতা। শেষোক্ত তিনটি সম্বন্ধকে আবার অতিপ্রতিপত্তি-রূপে ব্যক্ত করা যায়।

* বা, "ব ∨ ভ" স্বতসত্য। বা "ব ≡ ভ" স্বতমিথ্যা।

অতিপ্রতিপত্তি ও অনুপ্রতিপত্তি

" 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক" equiv " '~ব ⊃ ~ভ' " স্বতসত্য

এখন যদি "~ব ⊃ ~ভ' স্বতসত্য হয় তাহলে বলা যায় : '~ব' '~ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক

∴ " 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক" equiv " '~ব' '~ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক"* ।

উদাহরণ

'$p \vee q$' হল 'p'-এর অনুপ্রতিপাদক

এ কথাটা এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি :

'$\sim(p \vee q)$ হল '$\sim p$'-এর অতিপ্রতিপাদক ।

অতিপ্রতিপত্তি ও অনুবিষমতা

'ব' ও 'ভ' অনুবিষম

equiv "ব ∨ ভ" স্বতসত্য

equiv "~ব ⊃ ভ" স্বতসত্য

সুতরাং বলতে পারি

" 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম" equiv " '~ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক" ।

উদাহরণ

'p' ও '$\sim p \vee q$' পরস্পরের অনুবিষম

এ কথার বদলে বলতে পারি :

'$\sim p$' হল '$\sim p \vee q$'-এর অতিপ্রতিপাদক ।

অতিপ্রতিপত্তি ও অতিবিষমতা

'ব' ও 'ভ' অতিবিষম

equiv "ব / ভ" স্বতসত্য

equiv "ব ⊃ ~ভ" স্বতসত্য

সুতরাং বলা যায়

" 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম" equiv " 'ব' ~'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক" ।

উদাহরণ

'p' ও '$\sim p \cdot q$' পরস্পরের অতিবিষম

এ কথাটা এভাবেও ব্যক্ত করা যায় :

'p' হল '$\sim(\sim p \cdot q)$'-এর অতিপ্রতিপাদক ।

মনে রাখবে

" '*P*' is sub-implicant to '*Q*' " সম " '~*P*' is super-implicant to '~*Q*' "

" '*P*' is sub-contrary to '*Q*' " সম " '~*P*' is super-implicant to '*Q*' "

" '*P*' is contrary to '*Q*' " সম " '*P*' is super-implicant to '~*Q*' "

আমরা আগেই দেখেছি যে

---

* বা 'ভ' 'ব'-এর অতিপ্রতিপাদক (কেননা "~ব ⊃ ~ভ" সম "ভ ⊃ ব") ।

" '*P*' is equivalent to '*Q*' " সম " '*P*' is super-implicant to '*Q*'
& '*Q*' is super-implicant to '*P*' "

বিরুদ্ধতাকেও অতিপ্রতিপত্তিতে ব্যক্ত করা যায়। লক্ষণীয়*

" '*P*' is contradictory to '*Q*' " সম " '*P*' is super-implicant to '$\sim Q$'
& '$\sim Q$' is super-implicant to '*P*' "

অপরপক্ষে

" '*P*' super-implies '*Q*' " বললে বলা হয়ে যায় যে :
'*Q*' sub-implies '*P*'
'$\sim P$' is sub-contrary to '*Q*'
'*P*' is contrary to '$\sim Q$'।

বাক্য সম্বন্ধ ও তিন প্রকার সমস্যা

বাক্যের পারস্পরিক সম্বন্ধ সম্পর্কে তিন প্রকার সমস্যার সম্মুখীন হতে পারি :

১. দুটি প্রদত্ত বাক্যের মধ্যে অমুক প্রকার সম্বন্ধ আছে কি নেই ?

২. একটি প্রদত্ত বাক্য কোন্ বাক্যের সঙ্গে অমুক (প্রদত্ত) সম্বন্ধে আবদ্ধ ?

৩. দুটি প্রদত্ত বাক্যের সম্বন্ধ কী ?

নিচে তিনটি পৃথক বিভাগে এ সমস্যাগুলির সমাধান পর পর আলোচিত হল।

৭. সম্বন্ধ নির্ণয়

বিভিন্ন বাক্য সম্বন্ধের লক্ষণ দিতে গিয়ে যা বলেছি তা লক্ষ করলে বুঝে থাকবে— কি করে সত্যসারণী গঠন করে উপরোক্ত প্রথম সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।

(১) দুটি প্রদত্ত বাক্য 'ব', 'ভ' সমার্থক কিনা তা নির্ণয় করতে হলে বাক্য দুটি নিয়ে দ্বিপ্রাকল্পিক ("ব $\equiv$ ভ") গঠন কর, এবং বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা কর। যদি বাক্যটি বৈধ হয় তাহলে 'ব', 'ভ' সমার্থক, নতুবা নয়।

(২) 'ব', 'ভ'-কে (অতি)প্রতিপাদন করে কিনা** তা নির্ণয় করতে হলে 'ব'-কে পূর্বকল্প করে এবং 'ভ'-কে অনুকল্প করে প্রাকল্পিক বাক্য ("ব $\supset$ ভ") গঠন কর, এবং বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা কর। বাক্যটি বৈধ হলে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক, নতুবা নয়।

(৩) 'ব' 'ভ'-কে অনুপ্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে 'ব'-এর নিষেধকে পূর্বকল্প ও 'ভ'-এর নিষেধকে অনুকল্প করে প্রাকল্পিক ("$\sim$ব $\supset$ $\sim$ভ") গঠন কর এবং বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা কর। বাক্যটি বৈধ হলে 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক, নতুবা নয়।

* আরও লক্ষণীয়, " '*P*' is contradictory to '*Q*' " সম " '*P*' is equivalent to '$\sim Q$' "।

** অধ্যায় ১৫-তে আরও কয়টি প্রতিপত্তি নির্ণয় পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে।

(৪) দুটি প্রদত্ত বাক্য স্বতন্ত্র কিনা তা নির্ণয় করতে হলে বাক্য দুটির সত্যসারণী গঠন কর। এদের ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করলে যদি 11, 10, 01, 00 এ সব কয়টি সম্ভাব্য বিন্যাসই পাও তাহলে বুঝবে এরা স্বতন্ত্র, নতুবা নয়।

(৫) 'ব' ও 'ভ' কি অনুবিষম? উত্তর পেতে হলে—'ব' ও 'ভ' নিয়ে একটি বৈকল্পিক বাক্য, 'ব ∨ ভ', গঠন কর, এবং বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা কর। বাক্যটি বৈধ হলে 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম, নতুবা নয়।

(৬) 'ব' ও 'ভ' কি অতিবিষম? উত্তর পেতে হলে—'ব' ও 'ভ' নিয়ে একটি প্রাতিকল্পিক বাক্য, "ব / ভ" বা "∼(ব · ভ)", গঠন কর এবং বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা কর। বাক্যটি বৈধ হলে 'ব' ও 'ভ' অতিবিষম, নতুবা নয়।

(৭) 'ব' ও 'ভ' কি বিরুদ্ধ? উত্তর পেতে হলে—"∼(ব ≡ ভ)" এর* বৈধতা পরীক্ষা কর। এ বাক্য বৈধ হলে 'ব' ও 'ভ' পরস্পর বিরুদ্ধ, নতুবা নয়।

৮. সম্বন্ধী উদ্ধার (Eduction of Correlates)

ধরা যাক, কোনো বাক্য দেওয়া আছে এবং একটি সম্বন্ধ দেওয়া আছে, এবং আমাদের সমস্যা হল: প্রদত্ত বাক্যটি কোন্ বাক্যের (সম্বন্ধীর) সঙ্গে প্রদত্ত সম্বন্ধে আবদ্ধ? যথা, "$p \cdot q$"-এর সঙ্গে কোন্ বাক্য অনুবিষমতার সম্বন্ধে আবদ্ধ? "$p \cdot q$"-এর অনুবিষম কী?

সমার্থক সম্বন্ধী ও বিরুদ্ধ সম্বন্ধী পাওয়া অতিশয় সহজ। কেননা আমরা জানি, কোনো বাক্য 'ব', ঐ বাক্যের 'ব'-এর সমার্থক, আর 'ব'-এর বিরুদ্ধ '∼ব'। এ প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে, একই বাক্যের, 'ব'-এর, যতগুলি সমার্থক সম্বন্ধী পাওয়া সম্ভব সে সবগুলি সমার্থক আর কোনো বাক্যের যতগুলি বিরুদ্ধ বাক্য পাওয়া সম্ভব সে সব কয়টি পরস্পরের সমার্থক।

কোনো বাক্যের, 'ব'-এর, স্বতন্ত্র বাক্য পাবার সহজতম উপায় হল: 'ব'-তে নেই এমন বর্ণ-প্রতীক দিয়ে 'ব' যে প্রকারের বাক্য সে প্রকারের অন্য বাক্য গঠন করা। এভাবে অন্য বাক্য 'ভ' গঠন করলে দেখা যাবে 'ব' ও 'ভ' স্বতন্ত্র বাক্য।
উদাহরণ

$p \cdot q$	—	$r \cdot s$	$p \supset q$	—	$r \supset s$
$p \vee q$	—	$r \vee s$	p / q	—	r / s

প্রত্যেক জোড়ের বাক্য দুটি স্বতন্ত্র। আবার দুটি বাক্যের মধ্যে একই বর্ণপ্রতীক সমভাবে বর্তমান থাকলেও বাক্য দুটি স্বতন্ত্র হতে পারে। প্রদত্ত বাক্য সংযোগিক, বৈকল্পিক, প্রাকল্পিক বা প্রাতিকল্পিক হলে তার স্বতন্ত্র বাক্য পেতে পার এভাবে—

> প্রদত্ত বাক্যের আকার বজায় রেখে কোনো বর্ণপ্রতীকের পরিবর্তে ভিন্ন (স্বতন্ত্র) বর্ণপ্রতীক বসাও।

* বা "ব ≡ ∼ভ"-এর বা "∼ব ≡ ভ"-এর

উদাহরণ

$p \cdot q$	—	$p \cdot r$	$p \supset q$	—	$p \supset r$
$p \vee q$	—	$p \vee r$	$p \mid q$	—	$p \mid r$

এ প্রত্যেকটি জোড়ের বাক্য দুটি স্বতন্ত্র।

এবার অন্য চারটি বাক্যসম্বন্ধ সংক্রান্ত নিয়ম।

১. কোনো বাক্যের (অতি) প্রতিপাদক পেতে হলে বাক্যটির সমার্থক নিয়ে (বিশেষত প্রদত্ত বাক্যটি নিয়ে ও তার সঙ্গে অন্য যে কোনো বর্ণপ্রতীক (বা সংযৌগিক বাক্য) সংযুক্ত করে সংযৌগিক বাক্য গঠন কর। দেখবে, নবগঠিত বাক্য মূল বাক্যের (অতি) প্রতিপাদক।

উদাহরণ ঃ

"p"-এর অতিপ্রতিপাদক	"$p \cdot q$"
"$p \cdot q$"-এর অতিপ্রতিপাদক	"$p \cdot q \cdot r$"
"$p \vee q$"-এর অতিপ্রতিপাদক	"$(p \vee q) \cdot r$"

২. কোনো বাক্যের অনুপ্রতিপাদক পেতে হলে বাক্যটির সমার্থক নিয়ে (বিশেষত প্রদত্ত বাক্যটি নিয়ে) তার সঙ্গে অন্য কোনো বর্ণপ্রতীক (বা বৈকল্পিক বাক্য) যোজনা করে বৈকল্পিক বাক্য গঠন কর। দেখবে, নবগঠিত বাক্য মূল বাক্যের অনুপ্রতিপাদক।

উদাহরণ ঃ

"p"-এর অনুপ্রতিপাদক	"$p \vee q$"
"$p \vee q$"-এর অনুপ্রতিপাদক	"$p \vee q \vee r$"
"$p \cdot q$"-এর অনুপ্রতিপাদক	"$(p \cdot q) \vee r$"

৩. কোনো বাক্যের অনুবিষম পেতে হলে প্রদত্ত বাক্যটির বিরুদ্ধ বাক্য নিয়ে তার সঙ্গে অন্য বর্ণপ্রতীক বা বৈকল্পিক বাক্য যোজনা করে একটি বৈকল্পিক বাক্য গঠন কর। দেখবে, নবগঠিত বাক্য ও মূল বাক্য পরস্পরের অনুবিষম।

উদাহরণ ঃ

প্রদত্ত বাক্য	অনুবিষম
p	$\sim p \vee q$
p	$\sim p \vee q \vee r$
$p \vee q$	$\sim(p \vee q) \vee r$
$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q) \vee r$

৪. কোনো বাক্যের অতিবিষম পেতে হলে প্রদত্ত বাক্যটির বিরুদ্ধ বাক্য নিয়ে তার সঙ্গে অন্য কোনো বর্ণপ্রতীক বা সংযৌগিক বাক্য সংযুক্ত করে একটি সংযৌগিক বাক্য গঠন কর। দেখবে, নবগঠিত বাক্য ও প্রদত্ত বাক্য পরস্পরের অতিবিষম (বা বিপরীত)।

উদাহরণ

প্রদত্ত বাক্য	অতিবিষম (বিপরীত)
p	$\sim p \cdot q$
p	$\sim p \cdot q \cdot r$
$p \cdot q$	$\sim (p \cdot q) \cdot r$
$p \vee q$	$\sim (p \vee q) \cdot r$

৯. সম্বন্ধ উদ্ধার (Eduction of Relation)

দুটি প্রদত্ত বাক্যের, 'ব' ও 'ভ'-এর, সম্বন্ধ উদ্ধার করতে হলে : প্রথমে বাক্য দুটির সত্যসারণী গঠন করার দরকার। তারপর এদের ফলস্তম্ভ দুটির সম্পর্ক বিচার করে বাক্য দুটির সম্বন্ধ উদ্ধার করা যায়। যথা, "$p \supset q$" আর "$p \vee q$"-এর সম্বন্ধ উদ্ধার করতে গিয়ে প্রথমে এদের সত্যসারণী গঠন করে পাই :

$p \supset q$	$p \vee q$
1 1 1	1 1 1
1 0 0	1 1 0
0 1 1	0 1 1
0 1 0	0 0 0

এখন এ ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করলে দেখতে পাই এদের মধ্যে আছে : 11 (১ম ও ৩য় সারি), 10 (৪র্থ সারি), 01 (২য় সারি), নেই কেবল 00 বিন্যাসটি। এর থেকে বোঝা যায় বাক্য দুটি মিথ্যা হতে পারে না, মানে এরা অনুবিষম। স্থান সংক্ষেপের জন্য এবং ফলস্তম্ভ দুটিকে কাছাকাছি আনবার জন্য—সমগ্র সত্যসারণী থেকে তুলে নিয়ে এদের পৃথকভাবে অনুভূমিক আকারে, "সংখ্যা"র আকারে, লেখা সুবিধাজনক। যেমন, উক্ত ফলসূচক-সংখ্যা দুটি এভাবে লিখতে পারি—

$$p \supset q : 1011$$
$$p \vee q : 1110$$

এরূপ ফলসূচক সংখ্যার উপরের ও অনুষঙ্গী নিচের অক্ষরের (1, 0-এর) তুলনা করলে সহজেই বাক্য-সম্বন্ধ উদ্ধার করা যায়। এ সম্বন্ধে কয়েকটি নিয়ম উল্লেখ করতে পারি

'ব', 'ভ'-এর ফলস্তম্ভ সংখ্যায়

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$*—এ দুটি বিন্যাসই যদি থাকে তাহলে 'ব', 'ভ' সমার্থক নয়, 'ব' অতি-প্রতিপাদক নয়, এদের মধ্যে অতিবিষমতা বা বিরুদ্ধতা নেই।

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$- দুটি বিন্যাসই যদি থাকে তাহলে 'ব', 'ভ' সমার্থক নয়, 'ব' অনু-প্রতিপাদক নয়, এদের মধ্যে অনুবিষমতা বা বিরুদ্ধতা নেই।

* উপরের সংখ্যা 'ব'-এর, আর নিচের সংখ্যা 'ভ'-এর, ফলসূচক সংখ্যার অংশ। সংখ্যাগুলি উপর থেকে নিচের দিকে পড়তে হবে।

এ নিয়ম দুটি প্রয়োগ করলে অনুসন্ধানের ক্ষেত্র সীমিত হয়,—জানা যায় প্রদত্ত 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে অমুক অমুক সম্বন্ধ খাটতে পারে না। কিন্তু 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে কোন্ কোন্ সম্বন্ধ খাটতে পারে না—এটা আমাদের জ্ঞাতব্য নয়; আমরা জানতে চাই কোন্ সম্বন্ধ খাটে। প্রদত্ত 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে কোন্ সম্বন্ধ খাটে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি প্রয়োগ করে তা বলতে পারবে।

যদি 'ব' ও 'ভ'-এর ফলসূচক সংখ্যায় কেবল

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ বিন্যাসটি অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' ও 'ভ' অতিবিষম,

$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ বিন্যাসটি অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' ও 'ভ' অনুবিষম,

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$—এ দুটি বিন্যাস অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' ও 'ভ' পরস্পরের বিরুদ্ধ।

ব ভ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ বিন্যাসটি অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক*,

ব ভ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ বিন্যাসটি অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক**,

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$—এ দুটি বিন্যাস অনুপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক ॥

আর বলা বাহুল্য, যদি 'ব' ও 'ভ'-এর ফলসূচক সংখ্যায়

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$—এ চারটি বিন্যাসই উপস্থিত থাকে তাহলে 'ব' ও 'ভ'-এর সম্বন্ধ হল স্বাতন্ত্র্যের সম্বন্ধ।

উদাহরণ

(১) "$p \cdot q$" আর "$p \vee q$" এর সম্বন্ধ কী?

(ব) $p \cdot q : 1000$
(ভ) $p \vee q : 1110$ এখানে কেবল $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ বিন্যাসটি নেই

∴ 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক।

(২) "$p \supset q$" আর "$\sim p \cdot q$"-এর সম্বন্ধ কী?

(ব) $p \supset q : 1011$
(ভ) $\sim p \cdot q : 0010$ এখানে কেবল $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ বিন্যাসটি নেই

∴ 'ব' 'ভ'-এর অনুপ্রতিপাদক।

(সত্যসারণী গঠন করে দেখ।)

* বা 'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক।

** বা 'ভ' 'ব'-এর অতিপ্রতিপাদক।

(৩) "$p \supset q$" আর "$q \supset p$"-এর সম্বন্ধ

$p \supset q$: 1011
$p \supset p$: 1101 এখানে কেবল $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$ বিন্যাসটি নেই

∴ বাক্য দুটি অনুবিষম।

(৪) "$p \cdot q$" আর "$\sim p \cdot r$"-এর সম্বন্ধ

এদের সত্যসারণী গঠন করে ফলস্তম্ভ দুটিকে অনুভূমিক আকারে লিখলে নিম্নোক্ত "সংখ্যা" দুটি পাবে—

$p \cdot q$: 11000000
$\sim p \cdot r$: 00001010 এখানে কেবল $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ বিন্যাসটি নেই

∴ বাক্য দুটি পরস্পরের আর্তিবিষম।

শেষোক্ত উদাহরণ সম্বন্ধে একটা কথা। পৃথক পৃথকভাবে "$p \cdot q$" আর "$\sim p \cdot r$"-এর সত্যসারণী গঠন করলে প্রত্যেকটি সারণীতে চারটি করে সারি থাকবার কথা। কিন্তু এদের ফলস্তম্ভ দুটি তুলনা করাই আমাদের লক্ষ্য, আর দুটিতেই সমসংখ্যক সারি না থাকলে তুলনা করা সম্ভব নয়। এজন্য বাক্য দুটি কোনো যোজকের দ্বারা যুক্ত হলে যেভাবে সারি গঠন করা হত, পৃথক পৃথকভাবে সারণী গঠন করলেও, সেভাবেই সারি গঠন করার দরকার। এখন, উক্ত বাক্য দুটি যুক্ত হলে যে বাক্য পেতাম তাতে তিনটি বর্ণপ্রতীক থাকত : p, q, r ; কাজেই মোট আটটি সারি থাকত। পৃথকভাবে সারণীকৃত "$p \cdot q$" আর "$\sim p \cdot r$"-এর সারণীতেও আটটি করে সারি থাকার দরকার। নিম্নোক্ত সারণী দুটি লক্ষ কর।

p	$\cdot$	q	$\sim p$	$\cdot$
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	0
১	২			৩

সেরূপ "$p \cdot \sim q$" আর 'p'-এর সম্বন্ধ উদ্ধার করতে হলে 'p'-এর নিচে কেবল 10 লিখলে চলবে না, এর নিচে চারটি সত্যমূল্য থাকা চাই। সারণী দুটি এ রকম রূপ পরিগ্রহ করবে :

$\cdot \sim q$	p
0	1
1	1
0	0
0	0

এখানে কেবল 10 বিন্যাসটি নেই
প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয়টির অতি-প্রতিপাদক।

আর একটা কথা।

'ব' ও 'ভ'-এর সম্বন্ধ সংক্রান্ত নিয়ম বলতে গিয়ে আমরা এতক্ষণ ধরে নিয়েছি যে 'ব' ও 'ভ' পরতসাধ্য বাক্য। যদি 'ব' ও 'ভ' বা এদের কোনোটি স্বতসত্য বা স্বতমিথ্যা হয় তাহলে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

যে কোনো স্বতসত্য বাক্য যে কোনো স্বতসত্য বাক্যের সমার্থক
যে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য যে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্যের সমার্থক
যে কোনো স্বতসত্য বাক্য ও যে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য পরস্পর বিরুদ্ধ
যদি 'ব' স্বতমিথ্যা বা 'ভ' স্বতসত্য হয় তাহলে 'ব' 'ভ'-এর অতিপ্রতিপাদক বা 'ভ' 'ব'-এর অনুপ্রতিপাদক।

অনুশীলনী

১. এদের বিরুদ্ধ দাও (এমন বিরুদ্ধ যাতে বৃথনিষেধ চিহ্ন না থাকে) :

(i) $(\sim A \supset B) \supset [C \supset (D \vee E)]$

(ii) $[(A \cdot B \cdot C) \supset D] \equiv \{A \supset [B \supset (C \supset D)]\}$

(iii) $A \supset \{(B \equiv C) \supset [C \supset (D \cdot E)]\}$

(iv) $[(A \cdot B \cdot C) \supset (D \equiv \sim E)] \supset \{A \supset [(B \cdot C) \supset (D \equiv \sim E)]\}$

(v) If it rains then if the crop is good and there is no natural calamity like flood then if the rationing is introduced then there will be no famine.

(vi) If Anna arrives or Betty stays, then if Carroll does not object then if Anna agrees then Dora will be invited.

(vii) If he is a landlord or businessman then he will be admitted as a member and given election ticket if and only if he agrees to contest from a predominantly Muslim area.

(শেষোক্ত তিনটি বাক্যের বিরুদ্ধ সাধারণ ভাষায় ব্যক্ত করবে।)

২. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি জোড়ের (i) দুটি বাক্যই সত্য হতে পারে কি ? (ii) দুটিই মিথ্যা হতে পারে কি ?

(i)	$A \supset B$	$B \supset A$
(ii)	$A \vee B \vee C$	$A \cdot B \cdot C$
(iii)	$A \equiv (B \vee C)$	$A \equiv (\sim B \vee \sim C)$
(iv)	$A \supset (B \cdot C)$	$A \supset (\sim B \cdot \sim C)$

৩. নিম্নোক্ত বাক্য দুটি যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে কি ? এদের কী সম্বন্ধ ?

(i) If he denounces the CPI(M), he will be accepted as a member of our party and allowed to contest in the next election.

(ii) If he does not denounce the CPI(M), he will neither be accepted as a member of our party nor allowed to contest in the next election.

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির প্রত্যেকটির একটি করে

sub-contrary, contrary, sub-implicant ও super-implicant দাও :

$A \supset B$
$A \vee B$
$(A \cdot B) \supset C$
$A \equiv B$

৫. Give the contradictory of the sub-contrary of the sub-implicant of

$$A \cdot \sim B$$

৬. Give the contradictory of the contrary of the super-implicant of

$$A \vee \sim B$$

৭. Show that

(i) 'p' is the sub-implicant of the contradictory of the sub-implicant of the contrary of itself,

(ii) '$\sim p$' is super-implicant of the contradictory of the super-implicant of the sub-contrary of itself.

৮. দেখাও যে নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি জোড়ের বাক্য দুটি সমার্থক :

$[(A \supset B) \cdot A] \supset B$	$[(A \vee B) \cdot \sim A] \supset B$
$A \cdot \sim B \cdot (A \supset B)$	$(\sim A \cdot \sim B) \cdot (A \vee B)$
$A \supset B$	$(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)$

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির মধ্যে (i) কোনগুলি '$(A \cdot B) \supset C$'-এর সমার্থক ?
(ii) কোনগুলি '$(A \vee B) \supset C$'-এর সমার্থক ?

$A \supset (B \supset C)$
$B \supset (A \supset C)$
$(A \supset C) \vee (B \supset C)$
$(A \supset C) \cdot (B \supset C)$

১০. নিম্নোক্ত প্রত্যেক পঙক্তির বাক্যজোড়ের সম্বন্ধ নির্ণয় কর ঃ

(i)	$A \supset (B \cdot C)$	$\sim A \vee \sim(B \cdot C)$
(ii)	$\sim A \vee C$	$\sim A \cdot (B \vee C)$
(iii)	A	$A \supset (B \supset C)$
(iv)	$(A \cdot B) \equiv \sim C$	$(A \cdot B \cdot C) \vee \sim C \cdot \sim(A \cdot B)$
(v)	$A \equiv B$	$(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)$
(vi)	$\sim[(A \supset B) \supset C]$	$\sim B \supset \sim C$
(vii)	$(A \cdot B) \supset C$	$(\sim A \vee \sim B) \equiv \sim C$
(viii)	$A \vee B$	$(A \cdot B) \vee (A \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B)$
(ix)	$A \cdot B$	$A \vee B \vee C$
(x)	A	$B \vee C$
(xi)	$A \vee B \vee C$	$\sim A \vee \sim B \vee \sim C$
(xii)	$[(A \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset A \supset C$	$A \cdot \sim C \cdot (B \supset C) \cdot (A \supset B)$

১৪

বিভিন্ন সত্যাপেক্ষকের পারস্পরিক সম্বন্ধ

১. 'p' দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষক

"$\sim$", "$\cdot$", "$\vee$", "$\supset$" প্রভৃতি যোজক দিয়ে 'p', 'q' প্রভৃতি বাক্যকে যুক্ত করে নানান প্রকারের সত্যাপেক্ষ বাক্য গঠন করা যায়। কেবল একটি বাক্য 'p' নিয়েও বহু সত্যাপেক্ষ বাক্য গঠন করতে পারি। কিন্তু কেবল 'p'-অঙ্গ বিশিষ্ট যত সত্যাপেক্ষ বাক্যই পাই না কেন, এ বাক্যগুলি মোট চার প্রকারের কোনো না কোনো প্রকার ছাড়া অন্য পঞ্চম প্রকারের হতে পারে না। কেননা, এরূপ ক্ষেত্রে কেবল নিম্নোক্ত চারটি ফলস্তম্ভ সম্ভব।

p	
1	1
0	1

p	
1	1
0	0

p	
1	0
0	1

p	
1	0
0	0

কেবল 'p' দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষকের ফলসূচক সংখ্যা 11, 10, 01, 00—এ ছাড়া অন্যরূপ হতে পারে না। এখন প্রশ্ন ঃ এ ফলসূচক সংখ্যাগুলি কোন্ কোন্ সত্যাপেক্ষকের ফলসূচক সংখ্যা? উক্ত অসম্পূর্ণ সারণীগুলির শীর্ষদেশের শূন্যস্থান পূরণ করব কী দিয়ে? প্রথম ফলস্তম্ভটি লক্ষ করলে বোঝা যায় অনুক্ত বাক্যটি স্বতসত্য ; কাজেই বলতে পারি প্রথম সারণীটি "$p \vee \sim p$"-এর (বা এর সমার্থক কোনো বাক্যের) সারণী। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অনুক্ত বাক্যটি স্পষ্টতই পরতসাধ্য, এবং আকরস্তম্ভের মূল্যবিন্যাস ফলস্তম্ভের মূল্য বিন্যাস অভিন্ন ; কাজেই বলতে পারি সারণীটি ("$p \cdot p$" বা) "$p \vee p$"-এর সারণী। তৃতীয় ক্ষেত্রে অনুক্ত বাক্যটি স্পষ্টতই "$\sim p \cdot \sim p$" (বা "$\sim p \vee \sim p$") ; কেননা এ ক্ষেত্রে ফলস্তম্ভের মূল্য আকরস্তম্ভের মূল্যের বিরুদ্ধ। আর চতুর্থ সারণীটি স্বতমিথ্যা বাক্যের সারণী ; কাজেই বলতে পারি এটি "$p \cdot \sim p$"-এর সারণী। উক্ত অসম্পূর্ণ সারণীগুলির শূন্যস্থান পূরণ করে পাই ঃ

p	$p \vee \sim p$
1	1
0	1

p	$p \vee p$
1	1
0	0

p	$\sim p \cdot \sim p$
1	0
0	1

p	$p \cdot \sim p$
1	0
0	0

অসম্পূর্ণ সারণীগুলির শূন্যস্থান পূর্ণ করতে আমরা উক্ত চারটি বাক্য বেছে নিয়েছি। এ বাক্যগুলি এক এক প্রকারের সত্যাপেক্ষকের উদাহরণ। প্রত্যেক প্রকারের আরও বহু উদাহরণ হতে পারে। যথা, প্রথম প্রকারের (স্বতসত্য বাক্যের) উদাহরণ হিসাবে আমরা "$p \supset p$", "$p \equiv p$"—এরূপ আরও বহু বাক্য উল্লেখ করতে পারতাম। নিচে প্রত্যেক প্রকারের কয়েকটি বাক্য উক্ত প্রকারগুলির উদাহরণ হিসাবে একত্রিত হল।

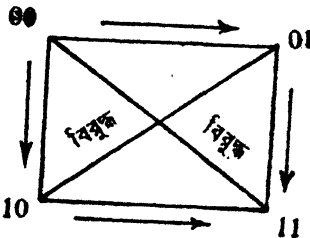
প্রথম প্রকার	দ্বিতীয় প্রকার	তৃতীয় প্রকার	চতুর্থ প্রকার
ফলসূচক সংখ্যা : 11	ফলসূচক সংখ্যা : 10	ফলসূচক সংখ্যা : 01	ফলসূচক সংখ্যা : 00
$p \vee \sim p$	p	$\sim p$	$p \cdot \sim p$
$\sim p \vee p$	$p \cdot p$	$\sim p \cdot \sim p$	$\sim p \cdot p$
$p \supset p$	$p \vee p$	$\sim p \vee \sim p$	$p \vee p$
$\sim p \supset \sim p$	$\sim p \supset p$	$p \supset \sim p$	$\sim p \vee \sim p$
$p \mid \sim p$	$\sim p \mid \sim p$	$p \mid p$	$p \downarrow \sim p$
$\sim p \mid p$	$\sim p \downarrow \sim p$	$p \downarrow p$	$\sim p \downarrow p$
$p \equiv p$			$p \equiv \sim p$
$\sim p \equiv \sim p$			$\sim p \equiv p$

(দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রকারের শেষ বাক্য: বিরুদ্ধ; প্রথম ও চতুর্থ প্রকারের শেষ বাক্য: বিরুদ্ধ)

যদি যুগ্মনিষেধ প্রয়োগ করি তাহলে আরও কতকগুলি উদাহরণ পেতে পারি। কয়েকটি উদাহরণ উল্লেখ করা হল।

11	10	01	00
$\sim(p \cdot \sim p)$	$\sim(\sim p \cdot \sim p)$	$\sim(p \cdot p)$	$\sim(p \vee \sim p)$
$\sim(\sim p \cdot p)$	$\sim(\sim p \vee \sim p)$	$\sim(p \vee p)$	$\sim(\sim p \vee p)$
$\sim(p \vee q)$			$\sim(p \equiv p)$
$\sim(\sim p \vee \sim q)$			$\sim(\sim p \equiv \sim p)$
এখানে ৪র্থ স্তম্ভের* প্রত্যেকটি বাক্যের নিষেধ উল্লেখ করা যেত।	এখানে ৩য় স্তম্ভের* প্রত্যেকটি বাক্যের নিষেধ উল্লেখ করা যেত।	এখানে ২য় স্তম্ভের* প্রত্যেকটি বাক্যের নিষেধ উল্লেখ করা যেত।	এখানে ১ম স্তম্ভের* প্রত্যেকটি বাক্যের নিষেধ উল্লেখ করা যেত।

লক্ষণীয় একই স্তম্ভের বাক্যগুলি সমার্থক। আরও লক্ষণীয়, প্রথম স্তম্ভের প্রত্যেকটি বাক্য চতুর্থ স্তম্ভের প্রত্যেকটি বাক্যের বিরুদ্ধ (স্মরণীয় যে স্বতসত্য ও স্বতমিথ্যা বাক্য পরস্পরের বিরুদ্ধ)। আবার দ্বিতীয় স্তম্ভের প্রত্যেকটি বাক্য তৃতীয় স্তম্ভের প্রত্যেক বাক্যের বিরুদ্ধ।

তালিকাভুক্ত বাক্যগুলির সম্বন্ধ সম্পর্কে আর একটি কথা। যেহেতু ৪র্থ স্তম্ভের বাক্যগুলি স্বতমিথ্যা সেহেতু ৪র্থ স্তম্ভের প্রত্যেকটি বাক্য অন্য প্রত্যেকটি স্তম্ভের বাক্যের প্রতিপাদক। আবার ১ম স্তম্ভের বাক্যগুলি স্বতসত্য বলে ২য় ও ৩য় স্তম্ভের বাক্যগুলি ১ম স্তম্ভের বাক্যের প্রতিপাদক। বাক্যগুলির পরিবর্তে এদের ফলসূচক সংখ্যা ব্যবহার করে এদের সম্বন্ধ এভাবে দেখানো যায়।

এখানে প্রতিপাদন বোঝাতে "→" ব্যবহার করা হল। তীরটির ডাঁটের দিকে প্রতিপাদক ফলার মুখে প্রতিপাদ্য। এ সংকেতলিপিতে "$A \rightarrow B$" পড়তে হবে এভাবে : 'A' 'B'-কে প্রতিপাদন করে।

* মানে পূর্ববর্তী তালিকার স্তম্ভের। "এখানে"-এর পরে "পূর্ববর্তী তালিকার"—এ কথাগুলি যাগ করে নিতে হবে।

২. 'p', 'q'-এর যোজনা

দুটি বাক্য—'p', 'q'—নিয়ে কত প্রকারের সত্যাপেক্ষক গঠিত হতে পারে ? এ প্রশ্নের জবাব পেতে হলে, এরূপ ক্ষেত্রে মোট কতগুলি ফলসূচক সংখ্যা সম্ভব তা নির্ণয় করার দরকার। আমরা জানি দুই-অঙ্গ-বিশিষ্ট বাক্যের ফলসূচক সংখ্যায় মোট চারটি আঙ্কিক অক্ষর থাকে, যথা "p ∨ q"-এর ফলসূচক সংখ্যায় থাকে : 1110

মোট কয়টি ফলসূচক সংখ্যা সম্ভব ?—এ প্রশ্নটি তাহলে এভাবে পুনরুত্থাপন করতে পারি : 1, 0 দিয়ে চারটি 'ঘর'—'সহস্র', 'শতক', 'দশক', 'একক'-এর ঘর—কত বিভিন্নভাবে পূরণ করা যায় ? চারটি ঘরকে চারটি বর্ণপ্রতীক বলে কল্পনা কর। এ ৪টি বর্ণপ্রতীকের সত্যমূল্য বিন্যাস 2^n বা ১৬টি। তাহলে চারটি ঘরে 1, 0 ১৬ভাবে বিন্যস্ত হতে পারে। পার্শ্ববর্তী সারণীটি দেখ।

	সহস্র	শতক	দশক	একক
(১)	1	1	1	1
(২)	1	1	1	0
(৩)	1	1	0	1
(৪)	1	1	0	0
(৫)	1	0	1	1
(৬)	1	0	1	0
(৭)	1	0	0	1
(৮)	1	0	0	0
(৮')	0	1	1	1
(৭')	0	1	1	0
(৬')	0	1	0	1
(৫')	0	1	0	0
(৪')	0	0	1	1
(৩')	0	0	1	0
(২')	0	0	0	1
(১')	0	0	0	0

এ ফলসূচক সংখ্যাগুলি নিচে উল্লম্ব আকারে লেখা হল।

১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৮'	৭'	৬'	৫'	৪'	৩'	২'	১'
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

লক্ষণীয়, এ স্তম্ভগুলির প্রত্যেকটি এক একটি সত্যাপেক্ষকের (দুই-অঙ্গ-বিশিষ্ট সত্যাপেক্ষকের) সত্যসারণীর ফলস্তম্ভ। অনুক্ত সত্যাপেক্ষকগুলি উদ্ধার করা শক্ত নয়, অধিকাংশ ফলস্তম্ভ আমাদের পূর্বপরিচিত।

১, ১' : স্পষ্টতই ১ স্তম্ভটি কোনো স্বতসত্য বাক্যের, আর ১' কোনো স্বতমিথ্যা বাক্যের ফলস্তম্ভ (যথা, ১ "p ∨ ~p ∨ q"-এর, আর ১' "p · ~p · q"-এর)।

২, ২' : ২ "p ∨ q"-এর ফলস্তম্ভ, ২' "~(p ∨ q)"-এর বা "~p · ~q"-এর।

৩, ৩' : ৩ "q ⊃ p"-এর ফলস্তম্ভ ("q ⊃ p"-এর সত্যসারণী গঠন করে দেখ), আর ৩' "~(q ⊃ p)"-এর বা "~p · q"-এর।

৪, ৪′ : আপাতত বাদ দাও।

৫, ৫′ : স্পষ্টতই ৫ "$p \supset q$"-এর ফলস্তম্ভ, আর ৫′ '$\sim(p \supset q)$'-এর বা '$p \cdot \sim q$'এর।

৬, ৬′ : আপাতত বাদ দাও।

৭, ৭′ : আমরা জানি, ৭ "$p \equiv q$"-এর ফলস্তম্ভ, আর ৭′ এর বিরুদ্ধের, "$\sim(p \equiv q)$"-এর, ফলস্তম্ভ।

৮, ৮′ : ৮ হল "$p \cdot q$"-এর, আর ৮′ "$\sim(p \cdot q)$"-এর বা "p / q"-এর ফলস্তম্ভ।

এবার ৪, ৪′ ; ৬, ৬′ সংখ্যক ফলস্তম্ভের দিকে নজর দাও।

৪, ৪′ : লক্ষণীয়, ৪-এর ফলস্তম্ভ আর 'p'-এর আকরস্তম্ভ* অভিন্ন। কাজেই বোঝা যায়, এ স্তম্ভটি এমন একটি অপেক্ষকের ফলস্তম্ভ যা 'p'-এর সমার্থক। এখন, একটি সমার্থতা সূত্র অনুসারে

"p" সম "$p \vee (q \cdot \sim q)$" ["$\sim p$" সম "$\sim p \vee (q \cdot \sim q)$"]
[বাম ধারের সূত্রে 'p'-এর জায়গায় '$\sim p$' নিবেশন করে]

এ সূত্রটিকে স্বতমিথ্যা-বিকল্প সংক্রান্ত সূত্র বলে অভিহিত করতে পারি। আর একটি সমার্থতা সূত্র অনুসারে

"p" সম "$p \cdot (q \vee \sim q)$" ["$\sim p$" সম "$\sim p \cdot (q \vee \sim q)$"]
[বাম ধারের সূত্রে 'p'-এর জায়গায় '$\sim p$' নিবেশন করে]

এ সূত্রটিকে স্বতসত্য-সংযোগী সংক্রান্ত সূত্র বলে অভিহিত করতে পারি। এখন, বলতে পারি, ৪ হল "$p \vee (q \cdot \sim q)$"-এর বা "$p \cdot (q \vee \sim q)$"-এর ফলস্তম্ভ। আবার লক্ষণীয় যে, ৪′ আর '$\sim p$' আকরস্তম্ভ অভিন্ন।** কাজেই মনে করতে পারি, ৪′ সংখ্যক স্তম্ভটি "$\sim p \vee (q \cdot \sim q)$"-এর বা "$\sim p \cdot (q \vee \sim q)$"-এর ফলস্তম্ভ।

৬, ৬′ : লক্ষণীয়, ৬-এর ফলস্তম্ভ আর 'q'-এর আকরস্তম্ভ অভিন্ন। কাজেই বোঝা যায়, ৬ এমন একটি অপেক্ষকের ফলস্তম্ভ যা 'q'-এর সমার্থক। উক্ত সূত্র অনুসারে বলতে পারি, ৬ হল "$q \vee (p \cdot \sim p)$"-এর বা "$q \cdot (p \vee \sim p)$"-এর ফলস্তম্ভ। আবার লক্ষণীয় যে, ৬′ আর '$\sim q$'-এর আকরস্তম্ভ অভিন্ন। কাজেই উক্তসূত্র অনুসারে মনে করতে পারি, ৬′ হল "$\sim q \vee (p \cdot \sim p)$"-এর বা "$\sim q \cdot (p \vee \sim p)$"-এর ফলস্তম্ভ।

স্বতসত্য ও স্বতমিথ্যা বাক্য বাদ দিয়ে যে ১৪টি পরতসাধ্য বাক্য বাকি থাকে সেগুলিকে দু ভাগে বিন্যস্ত করা যায় :

(১) যেগুলিতে তিনটি 1 বা তিনটি 0 আছে

(২) যেগুলিতে দুটি 1 বা দুটি 0 আছে।

এ ১৪টি অপেক্ষকের সত্যসারণী নিম্নোক্ত তালিকা দুটিতে পুনর্বিন্যস্ত হল। পুনর্বিন্যাস করা হয়েছে বলে ফলস্তম্ভগুলিকে নতুন ক্রমিক সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করলাম।

---

* 'p', 'q' দিয়ে গঠিত কোনো বাক্যের সত্যসারণীর 'p'-এর নিচেকার আকরস্তম্ভ

** 'p', 'q' দিয়ে গঠিত কোনো বাক্যের সত্যসারণীর 'q'-এর নিচেকার আকরস্তম্ভ

তালিকা ১

		সাপেক্ষ বাক্য				অনপেক্ষ বাক্য			
		I	II	III	IV	IV′	III′	II′	I′
p	q	$p \vee q$	$q \supset p$	$p \supset q$	p/q	$p \cdot q$	$p \cdot \sim q$	$\sim p \cdot q$	$\sim p \cdot \sim q$
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1

তালিকা ২

		V	VI	VII	VII′	VI′	V′
p	q	$p \vee (q \cdot \sim q)$, $p \cdot (q \vee \sim q)$	$q \vee (p \cdot \sim p)$, $q \cdot (p \vee \sim p)$	$\sim(p \equiv q)$	$p \equiv q$	$\sim q \vee (p \cdot \sim p)$, $\sim q \cdot (p \vee \sim p)$	$\sim p \vee (q \cdot \sim q)$, $\sim p \cdot (q \vee \sim q)$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	1

লক্ষণীয়, প্রথম তালিকার বাম অর্ধের প্রত্যেক বাক্য দক্ষিণ অর্ধের অনুষঙ্গী বাক্যের বিরুদ্ধ। কোন্ বাক্য (বা কোন্ স্তম্ভ) কোন্ বাক্যের (বা কোন্ স্তম্ভের) অনুষঙ্গী ক্রমিক সংখ্যাগুলি লক্ষ করলেই তা বুঝতে পারবে। যথা, I-এর অনুষঙ্গী I′, II-এর অনুষঙ্গী II′। দ্বিতীয় তালিকার বাম অর্ধের বাক্যগুলিও দক্ষিণ অর্ধের অনুষঙ্গী বাক্যের বিরুদ্ধ।

আর একটা কথা। প্রথম তালিকার বাম অর্ধের বাক্যগুলি " · "-এর দ্বারা সংযুক্ত করলে পাওয়া যায় দ্বিতীয় তালিকার অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলি। আবার প্রথম তালিকার দক্ষিণ অর্ধের বাক্যগুলি "v"-এর দ্বারা যুক্ত করলেও দ্বিতীয় তালিকার অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলি পাওয়া যায়। এ কথার মানে—প্রথম তালিকার বাক্য নিয়ে যে সংযোগিক বা বৈকল্পিক গঠিত হবে তা দ্বিতীয় তালিকার কোনো বাক্যের সমার্থক। প্রথম তালিকার কোন্ বাক্যের সঙ্গে কোন্ বাক্য কিভাবে (" · " দিয়ে, না "v" দিয়ে) যুক্ত করলে দ্বিতীয় তালিকার কোন্ বাক্য পাওয়া যায় তা নিচে বলা হল। বলা হল দুভাবে: প্রথমে বাক্যগুলির ক্রমিক সংখ্যা উল্লেখ করে, তারপর সমার্থতা সূত্রের আকারে—বাক্যগুলি উল্লেখ করে এবং এদের সমার্থক দেখিয়ে।

I · II = V   "$(p \vee q) \cdot (q \supset p)$" সম "$p$"*
I · III = VI   "$(p \vee q) \cdot (p \supset q)$" সম "$q$"
I · IV = VII   "$(p \vee q) \cdot (p \mid q)$" সম "$\sim(p \equiv q)$"†
II · III = VII′   "$(q \supset p) \cdot (p \supset q)$" সম "$(p \equiv q)$"
II · IV = VI′   "$(q \supset p) \cdot (p \mid q)$" সম "$\sim q$"
III · IV = V′   "$(p \supset q) \cdot (p \mid q)$" সম "$\sim p$"

I′ ∨ II′ = V′   "$(\sim p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$" সম "$\sim p$"
I′ ∨ III′ = VI′   "$(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)$" সম "$\sim q$"
I′ ∨ IV′ = VII′   "$(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$" সম "$p \equiv q$"
II′ ∨ III′ = VII   "$(\sim p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$" সম "$\sim(p \equiv q)$"†
II′ ∨ IV′ = VI   "$(\sim p \cdot q) \vee (p \cdot q)$" সম "$q$"
III′ ∨ IV′ = V   "$(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$" সম "$p$"

উপরোক্ত সমার্থক বাক্যগুলি, বাম-ধারে-দেওয়া স্তম্ভসূচক সংখ্যা আর তালিকা ২-এর স্তম্ভশীর্ষের বাক্যগুলি, লক্ষ করলে বুঝতে পারবে—নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি গুচ্ছের বাক্যগুলি ঐ গুচ্ছের অন্যান্য বাক্যের সমার্থক। আমরা ইচ্ছা করলে এক একটি বাক্যগুচ্ছকে তালিকা ২-এর অনুষঙ্গী স্তম্ভশীর্ষে স্থাপন করতে পারতাম।

V	VI	VII
p	q	$\sim(p \equiv q)$
$p \vee (q \cdot \sim q)$	$q \vee (p \cdot \sim p)$	$(p \vee q) \cdot (p/q)$
$p \cdot (q \vee \sim q)$	$q \cdot (p \vee \sim p)$	$(\sim p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$
$(p \vee q) \cdot (q \supset p)$	$(p \vee q) \cdot (p \supset q)$	
$(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$	$(\sim p \cdot q) \vee (p \cdot q)$	

VII′	VI′	V′
$(p \equiv q)$	$\sim q$	$\sim p$
$(q \supset p) \cdot (p \supset q)$	$\sim q \vee (p \cdot \sim p)$	$\sim p \vee (q \cdot \sim q)$
$(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$	$\sim q \cdot (p \vee \sim p)$	$\sim p \cdot (q \vee \sim q)$
	$(q \supset p) \cdot (p \mid q)$	$(p \supset q) \cdot (p \mid q)$
	$(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)$	$(\sim p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$

* দ্বিতীয় তালিকার স্তম্ভশীর্ষ দেখ। এখানে 'সম'-এর পরবর্তী বাক্যগুলি স্তম্ভশীর্ষের অনুষঙ্গী বাক্যের সমার্থক। যথা, এ সারণীর প্রথম ছত্রের "p" হল দ্বিতীয় তালিকার V-এর স্তম্ভশীর্ষের বাক্যের সমার্থক। কাজেই এ ছত্রে আরও বলতে পারতাম : সম "$p \vee (q \cdot \sim q)$" সম "$p \cdot (q \vee \sim q)$"। অনুরূপভাবে দ্বিতীয় ছত্রের "q"-এর সমার্থক হল VI-এর স্তম্ভশীর্ষের বাক্যগুলি। এভাবে অন্যান্য ছত্রে সমার্থক যুক্ত করে নিতে পার। সংক্ষেপকরণের জন্য আমরা কেবল সরলতম সমার্থকটি উল্লেখ করলাম।

† এ বাক্যটির বদলে আমরা লিখতে পারতাম : $p \vee q$ (১০৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য)।

উপরোক্ত এক একটি গুচ্ছের বাক্যগুলি যে সমার্থক সত্যসারণী গঠন করে তা যাচাই করে নিতে পার। আবার রূপান্তরের সাহায্যেও সমার্থতা দেখানো যায়। নিচে প্রথম গুচ্ছের বাক্যগুলির সমার্থতা দেখানো হল।

*1.	p	
*2.	$p \vee (q \cdot \sim q)$	[1, স্বতমিথ্যা-বিকল্প সংক্রান্ত সূত্র]
*3.	$p \cdot (q \vee \sim q)$	[1, স্বতসত্য-সংযোগী সংক্রান্ত সূত্র]
4.	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$	[2, Dist]
5.	$(p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)$	[4, Com]
*6.	$(p \vee q) \cdot (q \supset p)$	[5, Df $\supset$]
7.	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$	[3, Dist]
*8.	$(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$	[7, Com]

তারকাচিহ্নিত বাক্যগুলিই প্রথম গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত। উপরোক্ত রূপান্তরধারা দেখলে বোঝা যাবে উপরোক্ত প্রত্যেক বাক্যগুচ্ছে আরও সমার্থক বাক্য যুক্ত করা যেতে পারে। যথা, উপরোক্ত 4, 5, 7 সংখ্যক বাক্য প্রথম গুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত হতে পারত।

দুটি আণবিক বাক্য, 'p' 'q', নিয়ে যে সম্ভাব্য ১৬টি সত্যাপেক্ষক গঠিত হতে পারে এতক্ষণ তার ১৪টির কথা বলা হল। আর বাকি থাকল দুটি সত্যাপেক্ষক : ২৪৫ পৃষ্ঠার ১-সংখ্যক ও ১′-সংখ্যক স্তম্ভ যে বাক্যের ফলস্তম্ভ সে বাক্য দুটি, মানে স্বতসত্য ও স্বতমিথ্যা বাক্য। দেখা যাবে, এ দুটি বাক্যও তালিকা ১-এর বাক্যগুলিকে যুক্ত করে পাওয়া যায়।

> তালিকা ১-এর বামার্ধের যে কোনো দুটি বাক্য '$\vee$' দিয়ে যুক্ত করলে পাওয়া যায় স্বতসত্য বাক্য, ১ যার ফলস্তম্ভ।

যথা :

$$(p \vee q) \vee (q \supset p)\dagger, \ (p \vee q) \vee (p \supset q)$$

—এগুলি স্বতসত্য, এদের প্রত্যেকের সারণীসংখ্যা : 1111

> তালিকা ১-এর দক্ষিণার্ধের যে কোনো দুটি বাক্য " · " দিয়ে যুক্ত করলে পাওয়া যায় স্বতমিথ্যা বাক্য, ১′ যার ফলস্তম্ভ।

যথা :

$$(p \cdot q) \cdot (p \cdot \sim q)\ddagger, \ (p \cdot q) \cdot (\sim p \cdot q)$$

—এগুলি স্বতমিথ্যা, এদের প্রত্যেকের সারণীসংখ্যা : 0000

আরও লক্ষণীয় যে, প্রথম তালিকার বাম ধারের অংশের প্রত্যেকটি বাক্য ডান ধারের অংশের অনুষঙ্গী বাক্যের বিরুদ্ধ। তাহলে মুখ্য বাক্য হিসাবে বাম ধারের সাপেক্ষ বাক্য চারটি বা ডান ধারের অনপেক্ষ বাক্য চারটি মেনে নিতে পারতাম। আর এদের নিষেধ করে অন্য

† সম "$(p \vee q) \vee (\sim q \vee p)$" সম "$p \vee q \vee \sim q \vee p$" সম "$q \vee \sim q \vee p \vee p$" সম "$q \vee \sim q \vee p$

‡ বা $q \cdot \sim q \cdot p$

চারটি পেতে পারতাম। তারপর মুখ্য বলে গৃহীত বাক্যগুলিকে বা এদের নিষেধকে নিয়ে বৈকল্পিক বা সংযৌগিক গঠন করে অন্য বাক্যগুলি (বাকী ১২টি) পেতে পারতাম।

ধরা যাক, ডানধারের বাক্য চারটি আমাদের মুখ্য বাক্য। লক্ষণীয় যে, এ বাক্য তালিকা সম্পূর্ণ—মানে 'p', 'q' আর এদের নিষেধ নিয়ে সংযৌগিক গঠন করতে হলে মোট চারটি সংযৌগিকই সম্ভব : '$p \cdot q$', '$p \cdot \sim q$', '$\sim p \cdot q$', '$\sim p \cdot \sim q$'। আবার, বাম ধারের বাক্যগুলিকে : '$p \vee q$', '$q \supset p$', '$p \supset q$', '$p \mid q$'—এ চারটিকেও মুখ্য বলে গ্রহণ করতে পারতাম। এ তালিকাও সম্পূর্ণ মানে 'p', 'q' আর এদের নিষেধ নিয়ে '$\vee$', '$\supset$', '$\mid$' দিয়ে বাক্য গঠন করলে যে বাক্য পাওয়া সম্ভব সে সব বাক্য (বা এদের সমার্থক) এ তালিকার অন্তর্ভুক্ত। নিচে প্রত্যেকটি বাক্যের সমার্থক বাক্য উল্লেখ করা হল।

I	II	II	IV
$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$
$\sim q \supset p$	$q \supset p$	$\sim q \supset \sim p$	$q \supset \sim p$
$\sim p \supset q$	$\sim p \supset \sim q$	$p \supset q$	$p \supset \sim q$
$\sim p \mid \sim q$	$\sim p \mid q$	$p \mid \sim q$	$p \mid q$

একই স্তম্ভের প্রত্যেকটি বাক্য সমার্থক। প্রথম তালিকার বামার্ধের বাক্যগুলি অপেক্ষাকৃত বড় হরফে লেখা।

যে চারটি বাক্যকে মুখ্য বাক্য বলে ধরে নেওয়া হল সেগুলি আসলে একই যোজক দিয়ে গঠিত সব সম্ভাব্য বাক্যের সমার্থক।

প্রথম তালিকার বাক্যগুলির সত্যসারণী পুনরুক্তি করা হল।

$p \vee q$	$q \supset p$	$p \supset q$	$p \mid q$	$p \cdot q$	$p \cdot \sim q$	$\sim p \cdot q$	$\sim p \cdot \sim q$
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1

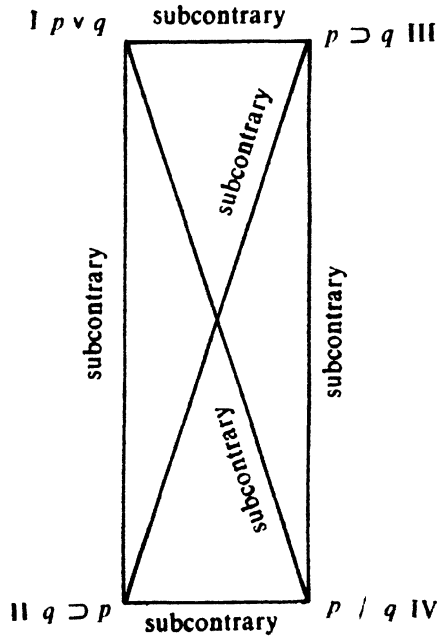
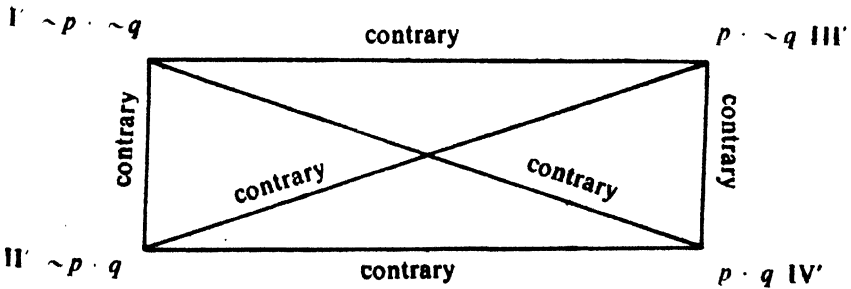
উপরের বাক্যগুলির কোনো দুটি বাক্য একই সত্যমূল্য বিন্যাসে যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে না। মানে যে কোনো দুটি বাক্য নিয়ে যে বৈকল্পিক গঠিত হবে তা স্বতসত্য সুতরাং প্রত্যেকটি বাক্য অন্য প্রত্যেকটির অনুবিষম (subcontrary)।

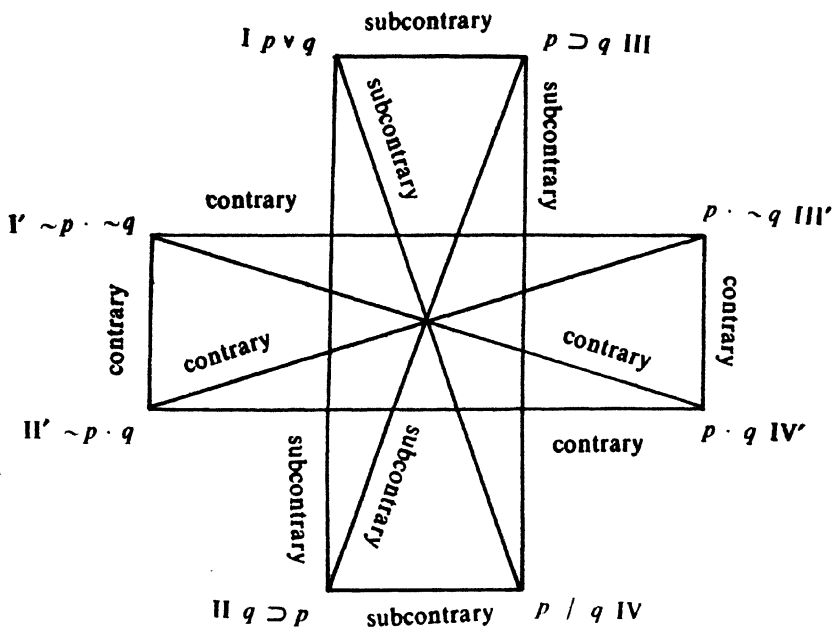
উপরের বাক্যগুলির কোনো দুটি বাক্য একই সত্যমূল্য বিন্যাসে যুগপৎ সত্য হতে পারে না। মানে কোনো দুটি বাক্য নিয়ে যে সংযৌগিক গঠিত হবে তা স্বতমিথ্যা। মানে—যে কোনো দুটো বাক্য নিয়ে যে প্রাতিকল্পিক গঠিত হবে তা স্বতসত্য। এ কথার অর্থ এ তালিকার প্রত্যেকটি বাক্য অন্য প্রত্যেকটির অতিবিষম (contrary)।

উদাহরণ		
I		II
$(p \vee q)$	$\vee$	$(q \supset p)$
1	1	1
1	1	1
1	1	0
0	1	1

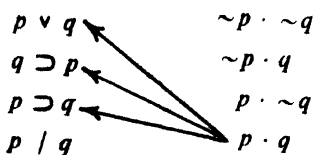
উদাহরণ		
IV′		III′
$(p \cdot q)$	/	$(p \cdot \sim q)$
1	1	0
0	1	1
0	1	0
0	1	0

(1)

সাপেক্ষ বাক্যগুলির সম্বন্ধ আর অনপেক্ষগুলির (সংযৌগিক-গুলির) সম্বন্ধ এভাবে দুটি “চতুর্ভুজ”-এতে দেখানো যায়। (1) ও (2) দ্রষ্টব্য।

(2)

চতুর্ভুজ দুটির একটিকে অন্যটির উপরে স্থাপন করে পরের পৃষ্ঠার ১ সংখ্যক চিত্রটি পাই।

চিত্র ১

প্রথম তালিকার বাক্যগুলি আবার লেখা হল।

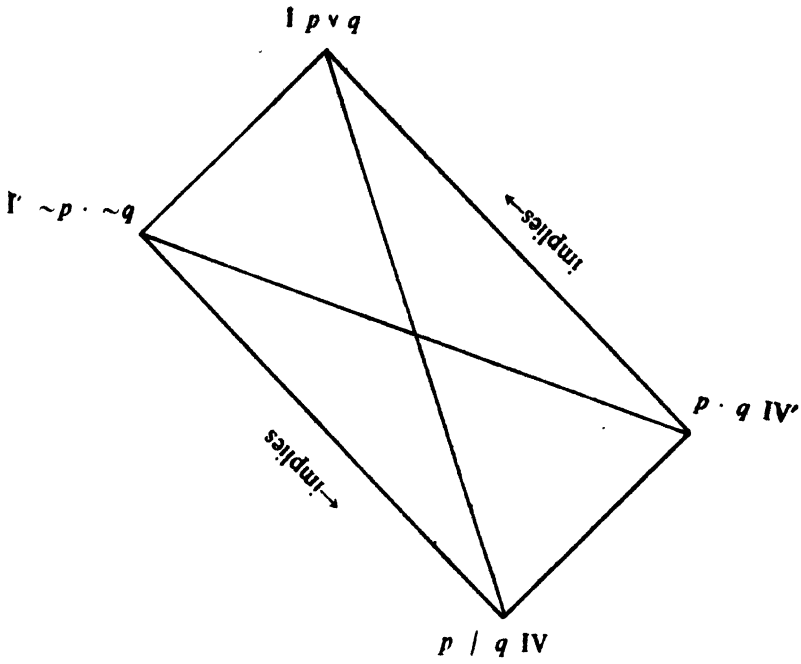
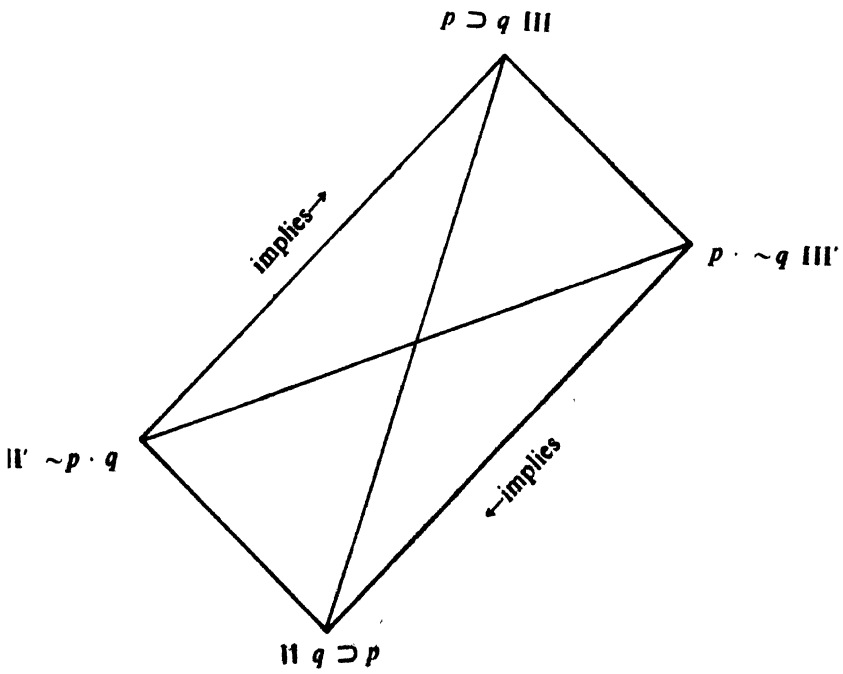
A	B
সাপেক্ষ বাক্য	অনপেক্ষ বাক্য
$p \vee q$	$\sim p \cdot \sim q$
$q \supset p$	$\sim p \cdot q$
$p \supset q$	$p \cdot \sim q$
$p \mid q$	$p \cdot q$

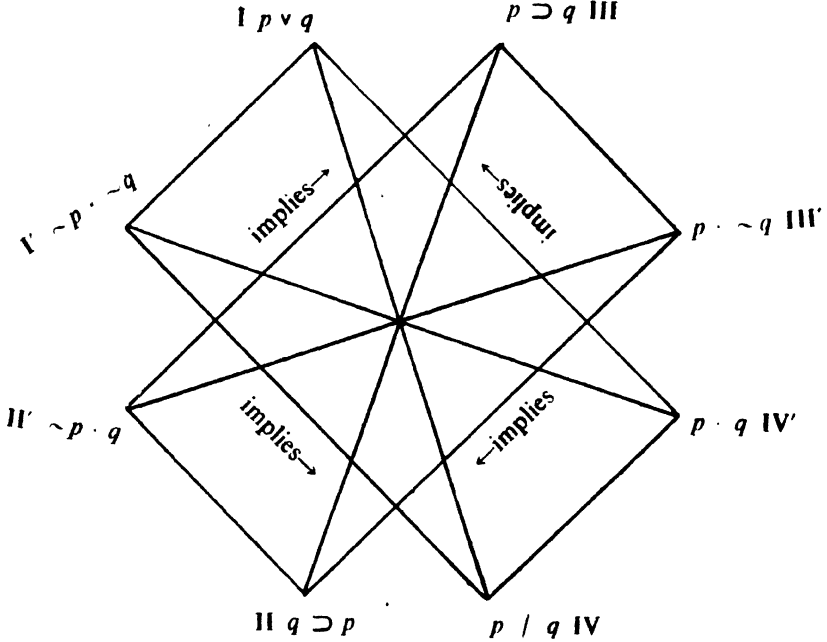
লক্ষণীয় : একই সারির বাক্যগুলি বিরুদ্ধ। আরও লক্ষণীয় : B স্তম্ভের যে কোনো সারির বাক্য (A স্তম্ভের ঐ সারির বাক্যটি ছাড়া) A স্তম্ভের অন্য প্রত্যেকটি বাক্যের প্রতিপাদক। অনুরূপভাবে—A স্তম্ভের যে কোনো সারির বাক্য (B স্তম্ভের ঐ সারি ছাড়া) B স্তম্ভের অন্য সব বাক্যের প্রতিপাদ্য। উক্ত সম্বন্ধের দুটি উদাহরণ নিচে দেখানো হল।

উপরোক্ত প্রতিপাদ্য-প্রতিপাদক সম্বন্ধে দেখাতে পারি পরের পৃষ্ঠার চতুর্ভুজ দুটি দিয়ে।

(3)

I p ∨ q
I′ ~p · ~q
implies
implies
p · q IV′
p | q IV

(4)

p ⊃ q III
implies
p · ~q III′
II′ ~p · q
implies
II q ⊃ p

প্রতিপাদক আর প্রতিপাদ্যের পার্থক্য দেখানো হল '→' চিহ্নটি দিয়ে। "implies → "-এর বা "←implies"-এর ফলামুখে যে বাক্য তা প্রতিপাদ্য আর পালকমুখে বা লেজের দিকে যে বাক্য তা প্রতিপাদক। এখন (3) ও (4) যুক্ত করে পাই নিচের ২ সংখ্যক চিত্রটি।

চিত্র ২

আবার চিত্র ২-কে চিত্র ১-এর উপর স্থাপন করে পাই পরের পৃষ্ঠার চিত্রটি (চিত্র ৩)। এ চিত্রে "subcontrary", "contrary" প্রভৃতির পরিবর্তে ১, ২ ইত্যাদি লেখা হল।

১=subcontrary*

২=contrary

৩=contradictory

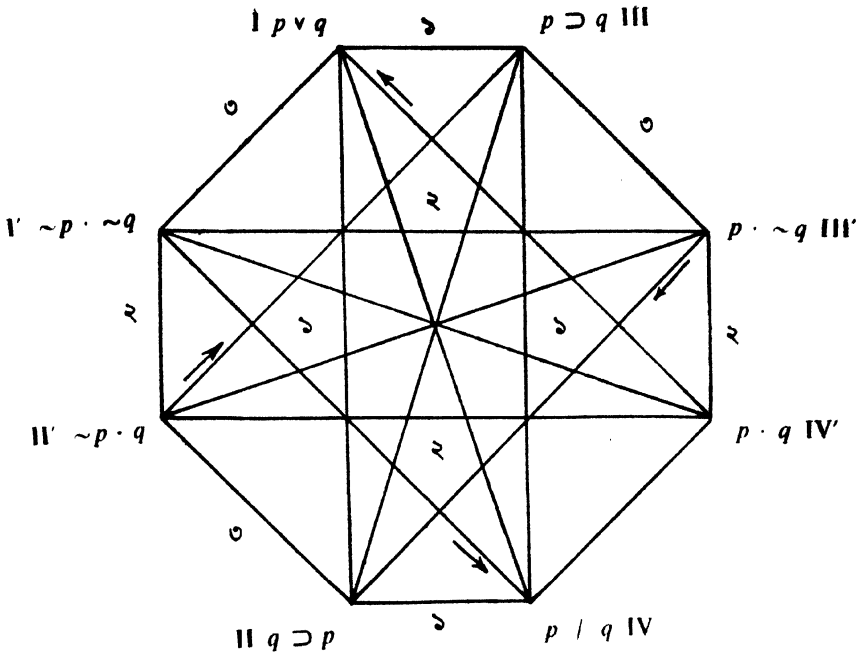
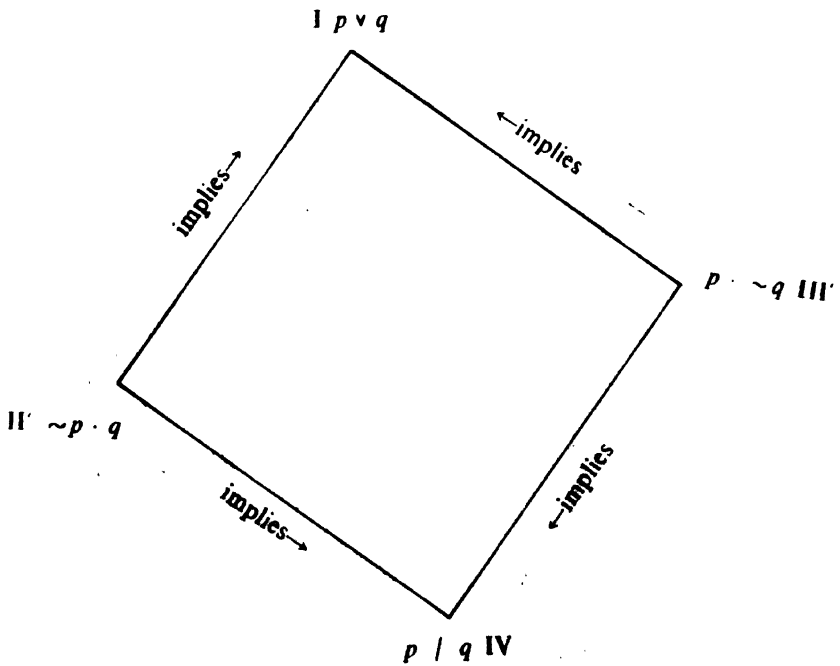
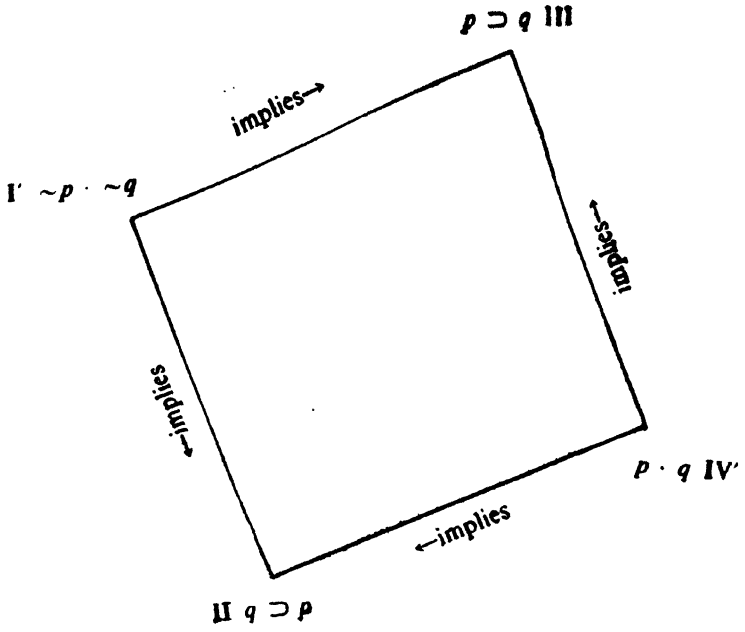
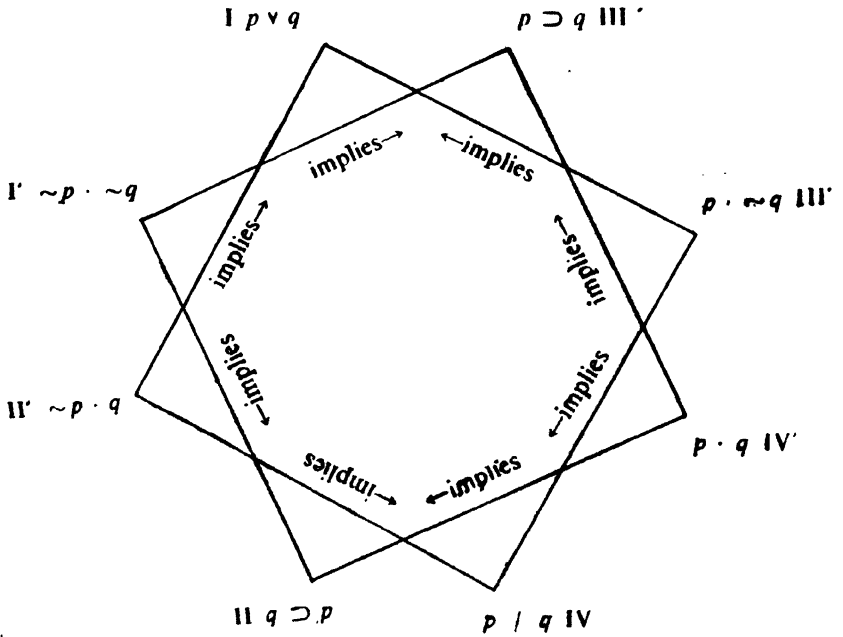
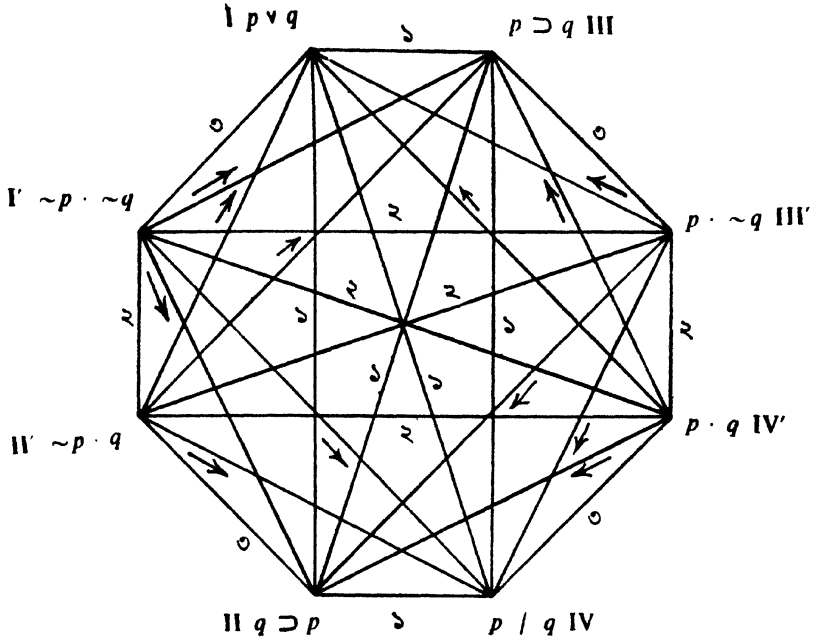
A স্তম্ভ ও B স্তম্ভের বাক্যের মধ্যে যে প্রতিপত্তি সম্বন্ধ থাটে তার আরও কয়টি বাকি থাকল। এ প্রতিপত্তি সম্বন্ধগুলি (5) ও (6)-এতে দেখানো হল।

---

* '=' -এর জায়গায় পড়তে হবে : —লেখা হল "—" এর পরিবর্তে।

চিত্র ৩

I p ∨ q
১
p ⊃ q III
৩
৩
২
I′ ~p · ~q
p · ~q III′
২
১
১
২
II′ ~p · q
p · q IV′
২
৩
১
II q ⊃ p
p | q IV
I p ∨ q
←implies
implies→
p · ~q III′
II′ ~p · q
←implies
implies→
p | q IV

(5)

এ চিত্র দুটিকে একত্রিত করে পাই নিচের চিত্র (চিত্র ৪) ।

আর চিত্র ৪-কে চিত্র ৩-এর উপর স্থাপন করে পাই পরের পৃষ্ঠার অষ্টভুজটি ।

এ অষ্টভুজে স্বাতন্ত্র্য ও সমার্থতা ছাড়া অন্য সব বাক্যসম্বন্ধ দেখানো হয়েছে। এখন, এতে প্রত্যেক কোণে যে সাপেক্ষ ও অনপেক্ষ (সংযৌগিক) বাক্য আছে তার সঙ্গে এদের সমার্থক জুড়ে দেওয়া যায়। তা করলে স্বাতন্ত্র্য ভিন্ন অন্য সব বাক্যসম্বন্ধ দেখানো হবে।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত "সংখ্যা"গুলি চারটি মৌলিক বাক্যের সত্যসারণীর ফলসূচক সংখ্যা :

11, 10, 01, 00

বাক্যগুলি কী কী ? প্রত্যেক প্রকারের চারটি করে বাক্য উল্লেখ কর। এবং এ চার প্রকারের বাক্যের পারস্পরিক সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

২. 'p', 'q' নিয়ে মোট যতগুলি পৃথক যৌগিক সত্যাপেক্ষ বাক্য (যাদের ফলসূচক সংখ্যা ভিন্ন ভিন্ন) গঠন করা যায় তাদের সরলতম রূপ উল্লেখ কর।

৩. $p \cdot q, p \supset q, p \vee q, p / q$

—এদের পারস্পরিক সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

৪. $p \vee q, q \supset p, p \supset q, p / q$

$p \cdot q, p \cdot \sim q, \sim p \cdot q, \sim p \cdot \sim q$

এ বাক্যগুলির পারস্পরিক সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

৫. '$p \vee q$'-এর ফলসূচক সংখ্যা : 1110। এ বাক্যটিকে কোন্ বাক্যের সঙ্গে " · " দিয়ে যুক্ত করলে 1010—এ ফলসূচক সংখ্যা পাওয়া যাবে ?

———

১৫

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ ঃ আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

১. ভূমিকা

সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে কি করে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হয় তা আমরা জানি। এ পদ্ধতির একটা মস্ত অসুবিধা হল এই ঃ যদি প্রদত্ত বাক্যে অনেকগুলি স্বতন্ত্র অঙ্গ (বর্ণপ্রতীক) থাকে তাহলে—এর সত্যসারণী বিশাল ও জটিল আকার ধারণ করে, এবং এরূপ ক্ষেত্রে সারণীগঠন দুঃসাধ্য হয়ে ওঠে। যথা, যদি প্রদত্ত বাক্যে ৪টি অঙ্গ থাকে তাহলে ১৬টি সারি, যদি ৫টি অঙ্গ থাকে তাহলে ৩২টি সারি গঠন করতে হয়, আর ১০টি অঙ্গ থাকলে ১০২৪টি সারি গঠন করার দরকার। এখন আমরা একটি বিকল্প সত্যমূল্য বিশ্লেষণ পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি ; এ পদ্ধতিতে আরও অনেক সহজে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা যাবে। এ পদ্ধতিকে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি বলে অভিহিত করা যায়।

আলোচ্য পদ্ধতিতে কোনো বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হলে, প্রদত্ত বাক্যের বিভিন্ন অঙ্গে মূল্য আরোপ করে যে আঙ্কিক বাক্য পাওয়া যায়, যোজকের নামতা অনুসারে তাদের লঘুকরণ করতে হয়। আমরা জানি, অগ্রগামী সত্যসারণী পদ্ধতিতেও প্রদত্ত বাক্যের অঙ্গগুলির জায়গায় এদের সম্ভাব্য সত্যমূল্য বসিয়ে লব্ধ আঙ্কিক বাক্যগুলির লঘুকরণ করা দরকার। কিন্তু অগ্রগামী সত্যসারণী পদ্ধতি আর আলোচ্য দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতির মধ্যে পার্থক্য আছে। অগ্রগামী পদ্ধতিতে প্রত্যেক সারি-বাক্যের লঘুকরণ করা হয় সেই সারির ডানদিকে অগ্রসর হয়ে, কিন্তু আলোচ্য পদ্ধতিতে আঙ্কিক বাক্যের লঘুকরণ করা হয় ওপর থেকে নিচের দিকে নেমে—বিভিন্ন ছত্রে। যেমন আলোচ্য পদ্ধতিতে "$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$"-এর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হলে, নিম্নোক্ত সারণীটি

$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$
$[(1 \vee 1) \cdot \sim 1] \supset 1 = [1 \cdot \sim 1] \supset 1 = [1 \cdot 0] \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$
$[(1 \vee 0) \cdot \sim 1] \supset 0 = [1 \cdot \sim 1] \supset 0 = [1 \cdot 0] \supset 0 = 0 \supset 0 = 1$
$[(0 \vee 1) \cdot \sim 0] \supset 1 = [1 \cdot \sim 0] \supset 1 = [1 \cdot 1] \supset 1 = 1 \supset 1 = 1$
$[(0 \vee 0) \cdot \sim 0] \supset 0 = [0 \cdot \sim 0] \supset 0 = [0 \cdot 1] \supset 0 = 0 \supset 0 = 1$

প্রথমে এভাবে লেখার দরকার (প্রত্যেক সমীকরণের অঙ্গগুলি এক একটি স্তম্ভের আকারে লেখা হয়) ঃ

$$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q \qquad [(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$$
$$[(1 \vee 1) \cdot \sim 1] \supset 1 \qquad [(1 \vee 0) \cdot \sim 1] \supset 0$$
$$[1 \cdot \sim 1] \supset 1 \qquad [1 \cdot \sim 1] \supset 0$$
$$[1 \cdot 0] \supset 1 \qquad [1 \cdot 0] \supset 0$$
$$0 \supset 1 \qquad 0 \supset 0$$
$$1 \qquad 1$$

$$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q \qquad [(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$$
$$[(0 \vee 1) \cdot \sim 0] \supset 1 \qquad [(0 \vee 0) \cdot \sim 0] \supset 0$$
$$[1 \cdot \sim 0] \supset 1 \qquad [0 \cdot \sim 0] \supset 0$$
$$[1 \cdot 1] \supset 1 \qquad [0 \cdot 1] \supset 0$$
$$1 \supset 1 \qquad 0 \supset 0$$
$$1 \qquad 1$$

অগ্রগামী সত্যসারণী পদ্ধতি আর আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতির মধ্যে যে কেবল আঙ্কিক বাক্যগুলির বিন্যাসের পার্থক্য তা নয় ; পরে দেখতে পাব, এদের মধ্যে আরও বহু বিষয়ে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। আর একটা কথা। আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতিতে যে ঠিক উপরোক্তরূপে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হয় তাও নয় ; পরে দেখব, এ পদ্ধতিতে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ আরও অনেক সংক্ষেপে নির্বাহ করা যায়, এবং আঙ্কিক বাক্যগুলি অন্য একটি বিশেষ ক্রমে বিন্যস্ত হয়।

আলোচ্য পদ্ধতিটি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করার আগে লঘুকরণ সম্বন্ধে দু একটা কথা বলে নেওয়া দরকার। লঘুকরণ করা হয় যোজকের নামতা অনুসারে। এখন, এসব নামতার ভিত্তিতে এমন কয়েকটি নিয়ম রচনা করা যায় যে, নিয়মগুলি মেনে চললে নামতাগুলি আর প্রয়োগ করার বিশেষ দরকার হয় না। এ নিয়মগুলিকে আমরা লঘুকরণের নিয়ম বলে অভিহিত করব। এ জাতীয় নিয়মের সুবিধা হল এই ঃ এগুলি মেনে চললে, প্রদত্ত বাক্যের কোনো কোনো অঙ্গের সত্যমূল্য বিচার না করেই অঙ্গগুলি বর্জন করা যায় ; ফলে লঘুকরণ ক্রিয়া দ্রুততর হয়। যেমন, লঘুকরণের একটি নিয়ম এভাবে ব্যক্ত করতে পারি ঃ কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের অনুকল্পের মূল্য যদি 1 হয় তাহলে বাক্যটির বাকি অংশ বর্জন কর। উদাহরণ ঃ এ নিয়ম অনুসারে উপরোক্ত বাক্যস্তম্ভগুলির ১ম ও ৩য় স্তম্ভের বাক্য আরও সহজে লঘুকরণ করে স্তম্ভ দুটি এভাবে লেখা যায় ঃ

$$[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q \qquad [(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$$
$$[(1 \vee 1) \cdot \sim 1] \supset 1 \qquad [(0 \vee 1) \cdot \sim 0] \supset 1$$
$$1 \qquad 1$$

আবার, মনে করা যাক, সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে গিয়ে পেলাম নিম্নোক্ত বাক্যটি ঃ

$$[(p \supset 1) \cdot (\sim p \supset 1)] \supset 1$$

'p'-এর সত্যমূল্য বিচার না করেও উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে বাক্যটির লঘুকরণ করতে পারি এভাবে—

$$[(p \supset 1) \cdot (\sim p \supset 1)] \supset 1$$
$$1$$

২. লঘুকরণের নিয়ম (Rules of Resolution)

কোনো বাক্যে কোনো অঙ্গের জায়গায় এর সত্যমূল্য বসিয়ে যা পাওয়া যায় তাও বাক্য বলে গণ্য হবে ; যথা : $(0 \vee 0) \supset 1$, $0 \supset (p \supset q)$—এসবও বাক্য। বলা বাহুল্য, "অঙ্গ" কথাটি এ বিভাগে ব্যাপক অর্থে ব্যবহার করা হবে ; যোজিত বাক্য যেমন অঙ্গ, সেরূপ এদের সত্যমূল্যও অঙ্গ বলে গণ্য। যথা, "$0 \supset (p \supset q)$"-এর একটি অঙ্গ "0", একটি অঙ্গ "$p \supset q$"। তবে আমরা "অঙ্গ" কথাটিও ব্যবহার করব, "অঙ্গের সত্যমূল্য" কথাটিও ব্যবহার করব।

নিয়ম ১

> যদি দেখ কোনো সংযৌগিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '1', তাহলে
> অঙ্গটি বর্জন** করবে।

উদাহরণ : "$1 \cdot 1 \cdot 1$"-এর বদলে "$1 \cdot 1$" লেখা যায়। নিয়মটি আবার প্রয়োগ করে "$1 \cdot 1$"-এর বদলে লেখা যায় "1" (এ "1"টি আর বর্জন করা যাবে না, কেননা এখন এটি আর সংযৌগিকের অঙ্গ নয়)। এভাবে "$1 \cdot 1 \cdot 0$"কে লঘুকরণ করে পাই : '0'। সেরূপ, "$1 \cdot (p \supset q)$"-কে লঘুকরণ করে পাওয়া যাবে "$p \supset q$"।

এ নিয়মের যাথার্থ্য : যে সংযৌগিকের কোনো অঙ্গ '1' সে সংযৌগিক সত্য কি মিথ্যা তা নির্ভর করে বাকি অঙ্গের সত্যমূল্যের উপর। সুতরাং সত্য সংযোগীটি বাদ দেওয়া যায়।

নিয়ম ২

> যদি দেখ কোনো বৈকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '0' তাহলে
> অঙ্গটি বর্জন করবে।

উদাহরণ : "$1 \vee 0$"-কে লঘুকরণ করে পাওয়া যাবে "1" ; "$0 \vee 0 \vee 0$"-কে লঘুকরণ করে "$0 \vee 0$", আবার একে লঘুকরণ করে "0" (এ "0"-টি আর বাদ দেওয়া যাবে না ; কেননা এখন এটি আর বৈকল্পিকের অঙ্গ নয়)। এভাবে "$0 \vee q \vee r$"-কে লঘুকরণ করে পাওয়া যাবে "$q \vee r$"।

এ নিয়মের যাথার্থ্য : যে বৈকল্পিকের কোনো অঙ্গ '0' সে বৈকল্পিক সত্য কি মিথ্যা তা নির্ভর করে বাকি অঙ্গের সত্যমূল্যের উপর। সুতরাং মিথ্যা বিকল্পটি বাদ দেওয়া যায়।

নিয়ম ৩

> যদি দেখ কোনো সংযৌগিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '0' তাহলে
> ঐ বাক্যের বাকি অংশ বর্জন করবে।

উদাহরণ : "$0 \cdot 1 \cdot 1$"-এর পরিবর্তে লেখা যাবে "0" ; আবার "$0 \cdot (p \supset q)$"-এর পরিবর্তেও "0" লেখা যাবে।

* স্পষ্টতই এখানে "অঙ্গ" মানে : অঙ্গের সত্যমূল্য।

** এরূপ বর্জনের ক্ষেত্রে অনুষঙ্গী যোজকটিও বর্জন করতে হবে। যথা "$1 \cdot p$"-এর "1" বর্জন করতে হলে বিন্দুটিও বর্জন করতে হবে।

নিয়ম ৪

যদি দেখ কোনো বৈকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '1' তাহলে ঐ বাক্যের বাঁকি অংশ বর্জন করবে।

উদাহরণ : "1 ∨ 0 ∨ 0"-এর বদলে লেখা যাবে "1" ; আবার "1 ∨ ($p \cdot q$)"-এর বদলে "1" লেখা যাবে।

এ নিয়ম দুটির যাথার্থ্য :

যে সংযৌগিক বাক্যের কোনো অঙ্গ মিথ্যা সে বাক্য মিথ্যা.
যে বৈকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ সত্য সে বাক্য সত্য।

কাজেই এরূপ বাক্যের অন্যান্য অঙ্গের সত্যমূল্য বিচার করার দরকার হয় না।

নিয়ম ৫

যদি দেখ কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '1' তাহলে পূর্বকল্পটি বর্জন করবে।

এ নিয়ম অনুসারে

(১) "1 ⊃ 1" লঘু*—— : 1

(২) "1 ⊃ 0" লঘু —— : 0 (৪) "p ⊃ 1" লঘু—— : 1

(৩) "0 ⊃ 1" লঘু —— : 1 (৫) "1 ⊃ q" লঘু—— : q

(৪) ও (৫)-কে আরও সাধারণভাবে নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করতে পারি–

(4) "(……) ⊃ 1" লঘু—— : 1

(5) "1 ⊃ (……)" লঘু—— : (……)**

[এখানে "……" এর জায়গায় যে কোনো আকারের যে কোনো জটিল সত্যাপেক্ষ বাক্য বসাতে পার]

এ নিয়মের যাথার্থ্য : যে প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প সত্য সে বাক্যের সত্যমূল্য নির্ভর করে অনুকল্পের সত্যমূল্যের উপর (আমরা জানি, 1 ⊃ 1=1, 1 ⊃ 0=0) কাজেই পূর্বকল্পটি বা পূর্বকল্পটির সত্যমূল্য অগ্রাহ্য করা যায়। আর যদি অনুকল্প সত্য হয় তাহলে প্রাকল্পিক বাক্যটি সত্য (আমরা জানি, 1 ⊃ 1=1, 0 ⊃ 1=1) এবং ফলে পূর্বকল্পটি বা পূর্বকল্পটির সত্যমূল্য অগ্রাহ্য করা যায়।

পূর্বকল্প বা অনুকল্প সত্য হলে. এবং কোনো অঙ্গের সত্যমূল্য অজ্ঞাত থাকলে যে পাঁচটি ক্ষেত্র পাই ওপরে তার সব কয়টি উল্লেখ করা হয়েছে। লক্ষণীয়, আমাদের

* "লঘু—"-এর পরিবর্তে পড়তে হবে : —থেকে পূর্বকল্প বাদ দিয়ে লঘুকরণ করে পাই
** বলা বাহুল্য, বন্ধনীভুক্ত বাক্য দুটি অভিন্ন হওয়া চাই।

লঘুকরণ নিয়ম দিয়ে যে ফল (সমগ্র প্রাকল্পিকের সত্যমূল্য) পাই, " $\supset$ "-এর নামতা প্রয়োগ করেও প্রথম চারটি ক্ষেত্রে সে ফলই পাওয়া যায়।

$1 \supset 1 = 1$
$1 \supset 0 = 0$ $\qquad p \supset 1 = 1$
$0 \supset 1 = 1$ $\qquad 1 \supset q = q$

" $\supset$ "-এর নামতা থেকে সর্বশেষ সমীকরণটি পাওয়া যায় না, ঠিক। তবে এ নামতা দিয়েই দেখানো যায় যে সমীকরণটি অভ্রান্ত। অভ্রান্ত —কেননা, আমরা দেখেছি, যে প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প সত্য সে বাক্যের সত্যমূল্য নির্ভর করে অনুকল্পের উপর। আরও বিশদভাবে বলতে গেলে—

"$1 \supset q$"—এখানে "q" হয় সত্য অথবা মিথ্যা। কাজেই এখানে দুটি সম্ভাবনা। এ সম্ভাবনা দুটি নিয়ে "$\supset$"-এর নামতা অনুসারে সমগ্র বাক্যটির সত্যমূল্য নির্ণয় করতে গিয়ে পাই—

'q' সত্য হলে : $1 \supset 1 = 1$ [বাক্যমূল্যটি বস্তুত 'q'-এর সত্যমূল্য]
'q' মিথ্যা হলে : $1 \supset 0 = 0$ [ঐ]

এর মানে "$1 \supset q$"-এর কী মূল্য তা নির্ভর করে 'q'-এর সত্যমূল্যের উপর।
সুতরাং "$1 \supset q$"-কে লঘুকরণ করে লিখতে পারি 'q'। পরে 'q'-এর সত্যমূল্য জানতে পারলে "$1 \supset q$"-এর মূল্যও জানা হয়ে যাবে।

নিয়ম ৬

যদি দেখ কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '0' তাহলে
অনুকল্পটি বর্জন করবে, এবং
পূর্বকল্পটিকে নিষেধ করবে।

এ নিয়ম অনুসারে

(1) "$0 \supset 0$" লঘু*—— : 1
(2) "$0 \supset 1$" লঘু —— : 1 $\qquad$ (4) "$0 \supset q$" লঘু—— : 1
(3) "$1 \supset 0$" লঘু —— : 0 $\qquad$ (5) "$p \supset 0$" লঘু—— : $\sim p$

(4), (5)-কে আরও সাধারণভাবে নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করতে পারি।

(৪) "$0 \supset (\cdots\cdots)$" লঘু—— : 1
(৫) $(\cdots\cdots) \supset 0$" লঘু—— : $\sim(\cdots\cdots)$

এ নিয়মের যাথার্থ্য : পূর্বকল্প যদি '0' হয় তাহলে প্রাকল্পিক বাক্যটি সত্য (মানে $0 \supset 1 = 1$, $0 \supset 0 = 1$) এবং ফলে অনুকল্পটি বাদ দিয়ে পূর্বকল্পের স্থলে "~ 0" বা

---

* "লঘু—"-এর পরিবর্তে পড়তে হবে : —থেকে অনুকল্প বাদ দিয়ে ও পূর্বকল্প নিষেধ করে লঘুকরণ করে পাই

"1" লেখা যায়। আর যে প্রাকল্পিকের অনুকল্প '0' সে বাক্য সত্যমূল্য নির্ভর করে পূর্বকল্পের উপর ঃ

পূর্বকল্প '1' হলে বাক্যটি মিথ্যা, মানে এর সত্যমূল্য ঃ ~ 1 বা 0

পূর্বকল্প '0' হলে বাক্যটি সত্য, মানে এর সত্যমূল্য ঃ ~ 0 বা 1 ॥

আলোচ্য নিয়ম অনুসারে—

$$0 \supset 0 = 1$$
$$0 \supset 1 = 1 \qquad 0 \supset q = 1$$
$$1 \supset 0 = 0 \qquad p \supset 0 = \sim p$$

প্রথম চারটি সমীকরণ যে নির্ভুল "$\supset$"-এর নামতা থেকেই তা জানা যায়। সর্বশেষ সমীকরণটির দিকে নজর দেওয়া যাক। "$\supset$"-এর নামতা প্রয়োগ করেই দেখানো যায় যে এটি অভ্রান্ত।

"$p \supset 0$"—এখানে 'p' হয় সত্য অথবা মিথ্যা। কাজেই এখানে দুটি সম্ভাবনা। এ সম্ভাবনা দুটি নিয়ে এবং '$\supset$'-এর নামতা প্রয়োগ করে পাই—

p	$\sim p$	$p \supset 0$	
1	0	$1 \supset 0 = 0$	[বাক্যটির সত্যমূল্য আর '$\sim p$'-এর সত্যমূল্য অভিন্ন]
0	1	$0 \supset 0 = 1$	[ঐ]

দেখা গেল "$p \supset 0$"-এর মূল্য নির্ভর করে '$\sim p$'-এর উপর ঃ '$\sim p$' মিথ্যা হলে (মানে 'p' সত্য হলে) "$p \supset 0$"ও মিথ্যা আর '$\sim p$' সত্য হলে (মানে 'p' মিথ্যা হলে) "$p \supset 0$"ও সত্য। মানে "$p \supset 0$"-এর সত্যমূল্য আর পূর্বকল্পের বিরুদ্ধের মূল্য, '$\sim p$'-এর মূল্য, অভিন্ন। কাজেই "$p \supset 0$"কে লঘুকরণ করে লিখতে পারি '$\sim p$'। পরে '$\sim p$'-এর সত্যমূল্য জানা হলে "$p \supset 0$"-এর সত্যমূল্যও জানা হয়ে যাবে।

নিয়ম ৭

যদি দেখ কোনো দ্বিপ্রাকল্পিকের বাক্যের কোনো অঙ্গ '1' হয় তাহলে অঙ্গটি বর্জন করবে।

এ নিয়ম অনুসারে (সমীকরণের আকারে বলি)—

$1 \equiv 1 = 1$ (প্রথম বা দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন করে)

$1 \equiv 0 = 0$ (প্রথম অঙ্গ বর্জন করে)

$0 \equiv 1 = 0$ (দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন করে)

$p \equiv 1 = p$ (দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন করে)

$1 \equiv q = q$ (প্রথম অঙ্গ বর্জন করে)

এ নিয়মের যাথার্থ্য ঃ যে দ্বিপ্রাকল্পিকের একটি অঙ্গ '1' সে বাক্য সত্য কি মিথ্যা তা নির্ভর করে বাকি অঙ্গটির সত্যমূল্যের উপর ; কাজেই সত্য অঙ্গটি বাদ দেওয়া যায়।

"$p \equiv 1$" লঘুকরণ করে "p" যে পাওয়া যায় তা "   "-এর নামতা প্রয়োগ করে এভাবে দেখানো যায়।

	$p \equiv 1$	
1	$1 \equiv 1 = 1$	[লক্ষণীয়, বাক্যটির সত্যমূল্য আর 'p'-এর সত্যমূল্য অভিন্ন]
0	$0 \equiv 1 = 0$	[ঐ]

'p'-এর যে সত্যমূল্য "$p \equiv 1$"-এরও ঠিক সে সত্যমূল্য। কাজেই "$p \equiv 1$"-কে লঘুকরণ করে লেখা যায় 'p'। পরে 'p'-এর মূল্য জানতে পারলে '$p \equiv 1$'-এর মূল্যও জানা হয়ে যাবে। অনুরূপভাবে দেখানো যায়, 'q'-এর যে সত্যমূল্য '$1 \equiv q$'-এরও ঠিক সে সত্য-মূল্য—'q' সত্য হলে "$1 \equiv q$" সত্য, 'q' মিথ্যা হলে "$1 \equiv q$" মিথ্যা।

নিয়ম ৮

যদি দেখ কোনো দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ '0' তাহলে
অঙ্গটি বর্জন করবে, এবং
অপর অঙ্গটি নিষেধ করবে।

এ নিয়ম অনুসারে (সমীকরণের আকারে বলি)—

$0 \equiv 0 = 1$ (প্রথম বা দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন করে এবং অপর অঙ্গ নিষেধ করে)
$1 \equiv 0 = 0$ (দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন ও প্রথম অঙ্গ নিষেধ করে)
$0 \equiv 1 = 0$ (প্রথম অঙ্গ বর্জন ও দ্বিতীয় অঙ্গ নিষেধ করে)
$p \equiv 0 = \sim p$ (দ্বিতীয় অঙ্গ বর্জন ও প্রথম অঙ্গ নিষেধ করে)
$0 \equiv q = \sim q$ (প্রথম অঙ্গ বর্জন ও দ্বিতীয় অঙ্গ নিষেধ করে)

এ নিয়মের যাথার্থ্য ঃ কোনো দ্বিপ্রাকল্পিকের এক অঙ্গ যদি '0' হয় তাহলে অপর অঙ্গটি হয় '1' নয়ত '0'। যদি অঙ্গটি '1' হয় তাহলে বাক্যটির সত্যমূল্য ~ 1 বা 0 (স্মরণীয় " $\equiv$ "-এর নামতা অনুসারে ঃ $1 \equiv 0 = 0$)। অপর অঙ্গটি যদি '0' হয় তাহলে বাক্যটির সত্যমূল্য ~ 0 বা 1 (নামতা ঃ $0 \equiv 0 = 1$)। এজন্যই দ্বিপ্রাকল্পিকের '0'-অঙ্গকে বর্জন করে অপর অঙ্গটিকে নিষেধ করে বাক্যটির সত্যমূল্য পাওয়া যায়। উদাহরণ হিসাবে

$$p \equiv 0 = \sim p$$

—এ সমীকরণটি নেওয়া যাক। এ সমীকরণ যে অভ্রান্ত " $\equiv$ "-এর নামতা প্রয়োগ করে তা দেখানো যায়।

p	$\sim p$	$p \equiv 0$	
1	0	$1 \equiv 0 = 0$	[বাক্যটির সত্যমূল্য আর '$\sim p$'-এর মূল্য অভিন্ন]
0	1	$0 \equiv 0 = 1$	[ঐ]

দেখা গেল '$\sim p$'-এর যে মূল্য '$p \equiv 0$'-এরও ঠিক সে মূল্য, বা বলতে পারি—'$p \equiv 0$'-এর মূল্য হল 'p'-এর মূল্যের বিরুদ্ধ মূল্য। কাজেই '$p \equiv 0$'-কে লঘুকরণ করে লেখা যায় '$\sim p$'। পরে '$\sim p$'-এর মূল্য জানা গেলে '$p \equiv 0$'-এর সত্যমূল্যও জানা হয়ে যাবে।

ধরা যাক, 'P' কোনো আণবিক বা যৌগিক বাক্য বা সত্যমূল্য (1 বা 0) বোঝাচ্ছে। তাহলে লঘুকরণের নিয়মগুলি সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

(১) $P \cdot 1 = P$ (২) $P \vee 0 = P$

(৩) $P \cdot 0 = 0$ (৪) $P \vee 1 = 1$

(৫) $1 \supset P = P, P \supset 1 = 1$ (৬) $0 \supset P = 1, P \supset 0 = \sim P$

(৭) $1 \equiv P = P$ (৮) $P \equiv 0 = \sim P$*

"$\cdot$", '$\vee$'' ও "$\equiv$" সম্বন্ধে ক্রমান্তরকরণের নিয়ম খাটে। কাজেই (১)—(৪), ৭ ও ৮ সংখ্যক সমীকরণ যথাক্রমে এভাবেও লেখা যেত :

$$1 \cdot P = P,\ 0 \vee P = P,\ 0 \cdot P = 0,\ 1 \vee P = 1,\ P \equiv 1 = P,\ 0 \equiv P = \sim P$$

৩. সত্যমূল্য-বিশ্লেষণ সুবিন্যস্তকরণ : আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

ধরা যাক, আমরা

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$

এ বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে চাই। স্পষ্টতই 'p', 'q'-এর সত্যমূল্য চারভাবে বিন্যস্ত হতে পারে : (১) $p = 1, q = 1$; (২) $p = 1, q = 0$;
(৩) $p = 0, q = 1$; (৪) $p = 0, q = 0$।

প্রদত্ত বাক্যে এ সত্যমূল্য পূরণ করে যে চারটি সত্যমূল্য-পূরিত বাক্য বা আঙ্কিক বাক্য পাওয়া যায় নিচে তাদের লঘুকরণ করা হল।

(১) $[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
$[(1 \supset 1) . 1] \supset 1$
1 (নিয়ম ৫)

(২) $[(p \supset q) . p] \supset q$
$[(1 \supset 0) . 1] \supset 0$
$[0 . 1] \supset 0$
$0 \supset 0$
1

(৩) $[(p \supset q) . p] \supset q$
$[(0 \supset 1) \cdot 0] \supset 1$
1 (নিয়ম ৫)

(৪) $[(p \supset q) . p] \supset q$
$[(0 \supset 0) \cdot 0] \supset 0$
$[1 \cdot 0] \supset 0$
$0 \supset 0$
1

উপরে যে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হল তা আরও সংক্ষেপে বিন্যস্ত করা যায়। প্রথমে কেবল একটি অঙ্গে মূল্য আরোপ করা যাক। যদি $p = 1$ হয় তাহলে পাই

$[(p \supset q) . p] \supset q$
(1) $[(1 \supset q) . 1] \supset q$
(2) $[q . 1] \supset q$
(3) $q \supset q$

* বলা বাহুল্য, এ বাক্যগুলির যথাযথরূপ এরূপ : $(P \cdot 1) = P$, $(P \vee 0) = P$ ইত্যাদি

এখন, হয় $q=1$, নয়ত $q=0$ । এবার 'q'-তে মূল্য দুটি আরোপ করে পাই

(4)	$1 \supset 1$	$0 \supset 0$
(5)	1	1

উপরের বিশ্লেষণ থেকে বোঝা গেল, যদি $p=1$ হয় তাহলে 'q' যাই হোক না কেন প্রদত্ত বাক্যটি সত্য। মানে ঃ $p=1, q=1$ হলে (১ম সত্যসর্তে বাক্যটি সত্য ; আবার $p=1, q=0$ হলেও (২য় সত্যসর্তে) বাক্যটি সত্য। $p=1$ হলে বাক্যটির সত্যমূল্য কী এতক্ষণ আমরা কেবল তাই বিচার করেছি। কিন্তু হতে পারে $p=0$; সেক্ষেত্রে বাক্যটির সত্যমূল্য কী তা দেখা যাক। 'p'-এর পরিবর্তে '0' বসিয়ে পাই

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$
$$[(0 \supset q) \cdot 0] \supset q \qquad (1')$$
$$[q \cdot 0] \supset q \qquad (2')$$
$$0 \supset q \qquad (3')$$

এখন, 'q' সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। কাজেই 'q' এর জায়গায় একবার '1', একবার '0' বসাতে হবে। এভাবে মূল্য আরোপ করে পাই

$0 \supset 1$	$0 \supset 0$	(4')
1	1	(5')

দেখা গেল, $p=0$ হলে 'q' যাই হোক না কেন, প্রদত্ত বাক্যটি সত্য। মানে : $p=0, q=1$ হলে (৩য় সত্যসর্তে) প্রদত্ত বাক্যটি সত্য, আবার $p=0, q=0$ হলেও (৪র্থ সত্যসর্তে) বাক্যটি সত্য। উপরে যে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হল তা নিম্নোক্তরূপে বিন্যস্ত করা যায় ঃ

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$

(1)	$[(1 \supset q) \cdot 1] \supset q$		$[(0 \supset q) \cdot 0] \supset q$		(1')
(2)	$[q \cdot 1] \supset q$		$[1 \cdot 0] \supset q$		(2')
(3)	$q \supset q$		$0 \supset q$		(3')
(4)	$1 \supset 1$	$0 \supset 0$	$0 \supset 1$	$0 \supset 0$	(4')
(5)	1	1	1	1	(5')

কেন উক্তরূপ সত্যমূল্য বিশ্লেষণকে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ বলে উক্ত বিশ্লেষণটি দেখলে তা বোঝা যাবে। লক্ষণীয় বিশ্লেষণটি দু শাখায় বিভক্ত। বাম দিকের প্রধান শাখায় দেখানো হয়েছে 'p' সত্য হলে কি হয়, আর ডান দিকের প্রধান শাখায়—'p' মিথ্যা হলে কী হয়।

$p=1, q=1$ হলে বাক্যটির সত্যমূল্য কী তা দেখানো হয়েছে সর্ববাম প্রশাখায়

$p=1, q=0$ হলে ,, ,, ,, ,, ,, ,, বাম শাখার দক্ষিণ প্রশাখায়

$p=0, q=1$ হলে ,, ,, ,, ,, ,, ,, দক্ষিণ শাখার বাম প্রশাখায়

$p=0, q=0$ হলে ,, ,, ,, ,, ,, ,, সর্বদক্ষিণ প্রশাখায়।

লক্ষণীয় যে, দক্ষিণ শাখাটি প্রশাখায় ভাগ না করলেও চলত। আমরা 3' সংখ্যক বাক্যের নিচে (নিয়ম ৬ অনুসারে) সরাসরি '1' লিখতে পারতাম। মানে, দাবী করতে

পারতাম যদি $p=0$ হয় তাহলে 'q' যাই হোক না কেন, প্রদত্ত বাক্যটি সত্য। মানে দক্ষিণ শাখাটির লঘুকরণ করা যেত এভাবে

$$[(0 \supset q) \cdot 0] \supset q$$
$$[1 \cdot 0] \supset q$$
$$0 \supset q$$
$$1$$

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতিতে কি করে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হয় তা দেখলাম। এবার এ পদ্ধতি সম্বন্ধে কয়েকটি ব্যবহারিক নিয়ম উল্লেখ করতে পারি।

(১) প্রদত্ত বাক্যের কোনো অঙ্গ বেছে নিয়ে তাতে '1' বসিয়ে একটি শাখা, আবার '0' বসিয়ে আর একটি শাখা গঠন করতে হবে। এ শাখা বাক্য দুটিকে প্রদত্ত বাক্যের নিচে—যথাক্রমে বামে ও দক্ষিণে স্থাপন করতে হবে। পরে আরও যে সব দ্বিশাখ বিশ্লেষণ করতে হবে তার ভিত্তি হল এ মুখ্য শাখা দুটি।

কোন্ অঙ্গ-প্রতীকে প্রথমে মূল্য আরোপ করতে হবে—এ সম্বন্ধে কোনো বিধি নিষেধ নেই। তবে যে প্রতীক বেশীবার আছে তাতেই প্রথমে মূল্য আরোপ করা বাঞ্ছনীয়; এতে লঘুকরণের কাজ দ্রুততর হয়।

(২) তারপর লঘুকরণের নিয়ম প্রয়োগ করে উক্ত শাখা দুটিকে ক্রমশ লঘুকরণ করতে হবে।

(৩) এভাবে লঘুকরণ করে যদি কোনো বর্ণপ্রতীক বা প্রতীক-সমষ্টি পাওয়া যায় তাহলে প্রতীকটিতে বা প্রতীকসমষ্টির কোনো একটিতে (যেটি বেশীবার আছে তাতে) একবার '1', একবার '0' বসিয়ে আবার দুটি শাখা গঠন করে এদের প্রত্যেকটি পূর্ববর্তী শাখার নিচে—যথাক্রমে বামে ও দক্ষিণে—স্থাপন করতে হবে; এবং এ প্রশাখা বাক্যগুলিকে লঘুকরণ করতে হবে। এ লঘুকরণের পরেও যদি কোনো বর্ণপ্রতীক বা প্রতীকসমষ্টি পাওয়া যায় তাহলে বর্ণপ্রতীকটিতে বা প্রতীকসমষ্টির কোনো একটিতে সত্যমূল্য '1', '0' বসিয়ে আবার দুটি (বা দুটি করে) প্রশাখা গঠন করতে হবে। এবং এভাবে ক্রমশ এগিয়ে যেতে হবে।

(৪) যতক্ষণ না লঘুকরণের ফলে প্রত্যেক প্রশাখার অগ্রভাগে '1' বা '0' পাওয়া যাবে ততক্ষণ দ্বিশাখ বিশ্লেষণ করে এবং লঘুকরণ করে এগিয়ে যেতে হবে।

এবার একটি অপেক্ষাকৃত জটিল উদাহরণ নেওয়া যাক।

উদাহরণ ১

$$[(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim r)] \supset (q \equiv r)$$

	Left branch		Right branch	
(1)	$[(1 \cdot q) \vee (0^* \cdot \sim r)] \supset (q \equiv r)$		$[(0 \cdot q) \vee (1^* \cdot \sim r)] \supset (q \equiv r)$	(1')
(2)	$[q \vee 0] \supset (q \equiv r)$		$[0 \vee \sim r] \supset (q \equiv r)$	(2')
(3)	$q \supset (q \equiv r)$		$\sim r \supset (q \equiv r)$	(3')
(4)	$1 \supset (1 \equiv r)$	$0 \supset (0 \equiv r)$	$0 \supset (q \equiv 1)$ $1 \supset (q \equiv 0)$	(4')
(5)	$1 \equiv r$	1	1 $q \equiv 0$	(5')
(6)	r		$\sim q$	(6')
(7)	1 0		0 1	(7')

* এ রকম ক্ষেত্রে আমরা "মানসাঙ্ক" করব, $\sim 1=0$, $\sim 0=1$—এ নামতা দুটির বা নিষেধের-নিষেধ নিয়মের প্রয়োগ পৃথকভাবে দেখানো হবে না।

প্রদত্ত বাক্যে তিনটি বর্ণপ্রতীক আছে, কাজেই ৮টি সত্যমূল্য বিন্যাস সম্ভব। সম্ভাব্য সত্যসর্তগুলি স্পষ্টতই :

	(১)	(২)	(৩)	(৪)	(৫)	(৬)	(৭)	(৮)
p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
r	1	0	1	0	1	0	1	0

[সত্যসর্তগুলি সারির আকারে না লিখে স্তম্ভের আকারে লেখা হল।]

(১) : (1), (4)-এর বাম ও (7)-এর বাম প্রশাখা* ··· ··· ··· 1

(২) : (1), (4)-এর বাম ও (7)-এর দক্ষিণ প্রশাখা ··· ··· ··· 0

(৩), (৪) : (1), (4)-এর দক্ষিণ প্রশাখা ও (5) ··· ··· ··· 1

(লক্ষণীয়, (4)-এর দক্ষিণ প্রশাখাটি আর শাখায়িত করার দরকার হয় নি।)

(৫) : (1′), (4′)-এর বাম প্রশাখা** ··· ··· ··· 1

(৬) : (1′), (4′)-এর দক্ষিণ ও (7′)-এর বাম প্রশাখা ··· ···· ··· 0

(৭) : (1′) (4′)-এর বাম প্রশাখা** ··· ··· ··· 1

(৮) : (1′) (4′)-এর দক্ষিণ ও (7′)-এর দক্ষিণ প্রশাখা ··· ··· ··· 1

৪. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ : বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়

সত্যসারণী পদ্ধতির মত, আনুক্রমিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে আমরা প্রদত্ত যুক্তির বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করতে পারি ; কোনো বাক্য স্বতসত্য নাকি স্বতমিথ্যা নাকি পরতসাধ্য তা নির্ণয় করতে পারি। বলা বাহুল্য, কোনো বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করে যদি সব শাখার শেষে কেবল '1' পাওয়া যায় তাহলে বুঝতে হবে বাক্যটি স্বতসত্য (এটি প্রাকল্পিক বাক্য হলে, অনুষঙ্গী যুক্তিটি বৈধ)। যদি সর্বশেষ পর্যায়ে কেবল '0' পাওয়া যায় তাহলে বুঝতে হবে বাক্যটি স্বতমিথ্যা। আর যদি দেখা যায় কোনো শাখান্তে '1', কোনো শাখান্তে '0' তাহলে বুঝতে হবে বাক্যটি পরতসাধ্য। তারপর কোনো যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্য যদি স্বতমিথ্যা বা পরতসাধ্য হয় তাহলে যুক্তিটি স্পষ্টতই অবৈধ। উদাহরণ :

$$A \supset B,\ B \supset C\ ;\ \therefore\ \ A \supset C$$

এ যুক্তিটি বৈধ না অবৈধ ? হেতুবাক্যকে পূর্বকল্প করে আর সিদ্ধান্তকে অনুকল্প যে প্রাকল্পিক বাক্য পাওয়া যায় তার সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা যাক।

* বিন্দুগুলি দিয়ে চিহ্নিত জায়গায় পড়তে হবে : "লক্ষ করলে বোঝা যাবে যে, এক্ষেত্রে প্রদত্ত বাক্যটির সত্যমূল্য"

** লক্ষণীয়, যদি $p=0$, $r=1$ হয় তাহলে 'q'-এর মূল্য যা-ই হোক না কেন, প্রদত্ত বাক্যটি সত্য।

উদাহরণ ২

$$[(A \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset (A \supset C)$$

$$[(1 \supset B) \cdot (B \supset C)] (1 \supset C) \quad [(0 \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset (0 \supset C)†$$

$$[B \cdot (B \supset C)] \supset C \qquad [1 \cdot (B \supset C)] \supset 1$$

$$1$$

$$[1 \cdot (1 \supset C)] \supset C \quad [0 \cdot (0 \supset C)] \supset C$$

$$[1 \supset C] \supset C \qquad 0 \supset C$$

$$C \supset C \qquad 1$$

$$1 \supset 1 \quad 0 \supset 0$$

$$1 \qquad 1$$

বাক্যটি স্বতসত্য, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

লক্ষণীয়, আমরা জানি "$p \supset p$" আকারের বাক্য স্বতসত্য, সুতরাং "$C \supset C$" বাক্যটিকে শাখায়িত না করে এর নিচে সরাসরি '1' বসিয়ে দিতে পারতাম।

উদাহরণ ৩

$$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot A \cdot \sim C$$

$$(1 \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot 1 \cdot \sim C \quad (0 \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot 0 \cdot \sim C$$

$$(1 \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim C \qquad 0$$

$$B \cdot (B \supset C) \cdot \sim C$$

$$1 \cdot (1 \supset C) \cdot \sim C \quad 0 \cdot (0 \supset C) \cdot \sim C$$

$$(1 \supset C) \cdot \sim C \qquad 0$$

$$*C \cdot \sim C$$

$$1 \cdot 0 \quad 0 \cdot 1$$

$$0 \qquad 0$$

দেখা গেল, আলোচ্য বাক্যটি স্বতমিথ্যা। লক্ষণীয়, উপরোক্ত বিশ্লেষণের তারকাচিহ্নিত বাক্যটি স্বতমিথ্যা, কাজেই এর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ না করে পরের পঙ্‌ক্তিতে সরাসরি '0' লিখতে পারতাম।

উদাহরণ ৪

$$[p \cdot (q \supset r)] \equiv [p \supset (q \supset r)]$$

$$[1 \cdot (q \supset r)] \equiv [1 \supset (q \supset r)] \quad [0 \cdot (q \supset r)] \equiv [0 \supset (q \supset r)]$$

$$*[q \supset r] \equiv [q \supset r] \qquad 0 \equiv 1$$

$$0$$

$$[1 \supset r] \equiv [1 \supset r] \quad [0 \supset r] \equiv [0 \supset r]$$

$$r \equiv r \qquad 1 \equiv 1$$

$$1$$

$$1 \equiv 1 \quad 0 \equiv 0$$

$$1 \qquad 1$$

† এ শাখাটি লক্ষ করলে বুঝতে পারবে, যদি $A = 0$ হয় তাহলে 'B', 'C'-তে যে মূল্যই আরোপ করা হোক না কেন, প্রদত্ত বাক্যটি সত্য। মানে, 011, 010, 001, 000 এ ৪টি সত্যসর্তেই বাক্যটি সত্য।

প্রথম পর্বের দক্ষিণ শাখাটির শেষাস্ত লক্ষ করলে এবং বাম ধারের সর্বনিম্ন প্রশাখা লক্ষ করলে বোঝা যাবে প্রদত্ত বাক্যটি পরতসাধ্য। এ বিশ্লেষণের তারকাচিহ্নিত বাক্যটি লক্ষণীয়। আমরা জানি "$p \equiv p$" আকারের বাক্য স্বতসত্য। কাজেই ঐ বাক্যটির নিচে সরাসরি '1' লেখা যেত। অর্থাৎ উক্ত বিশ্লেষণটি সংক্ষেপে এভাবে লেখা যেত।

$$[p \cdot (q \supset r)] \equiv [p \supset (q \supset r)]$$

$$[1 \cdot (q \supset r)] \equiv [1 \supset (q \supset r)] \qquad [0 \cdot (q \supset r)] \equiv [0 \supset (q \supset r)]$$

$$[q \supset r] \equiv [q \supset r] \qquad 0 \equiv 1$$

$$1 \qquad 0$$

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ : সংক্ষেপকরণ

কিভাবে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ সংক্ষেপে ব্যক্ত করা যায় তার কয়েকটি ইঙ্গিত দেওয়া হয়েছে। এ বিভাগে সংক্ষেপকরণের আরও কয়টি কায়দার কথা বলব। প্রথমে কয়টি অতি সরল বাক্যের বৈধতা অবৈধতা পরীক্ষা করা যাক।

(১) $p \vee \sim p$

$$1 \vee \sim 1 \qquad 0 \vee \sim 0$$
$$1 \vee 0 \qquad 0 \vee 1$$
$$1 \qquad 1$$

(২) $p \vee \sim p \vee q$

$$1 \vee \sim 1 \vee q \qquad 0 \vee \sim 0 \vee q$$
$$1 \qquad 0 \vee 1 \vee q$$
$$1$$

(৩) $p \cdot \sim p$

$$1 \cdot \sim 1 \qquad 0 \cdot \sim 0$$
$$1 \cdot 0 \qquad 0$$
$$0$$

(৪) $p \cdot \sim p \cdot q \cdot r$

$$1 \cdot \sim 1 \cdot q \cdot r \qquad 0 \cdot \sim 0 \cdot q \cdot r$$
$$1 \cdot 0 \cdot q \cdot r \qquad 0$$
$$0$$

এ বাক্যগুলির স্বতসত্যতা ও স্বতমিথ্যাত্ব এত প্রকট যে, কোনো শাখার শেষে বা কোনো শাখাবাক্যের অংশ হিসাবে এ জাতীয় বাক্য পেলে আমরা এদের পরিবর্তে সরাসরি '1' বা '0' বসিয়ে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ সংক্ষেপ করতে পারি। উদাহরণ :

(1) $(p \supset (p \vee \sim p))$

$$1 \supset 1 \qquad 0 \supset 1$$
$$1 \qquad 1$$

(2) $(p \supset p) \supset (p \cdot \sim p)$

$$(1 \supset 1) \supset 0 \qquad (0 \supset 0) \supset 0$$
$$1 \supset 0 \qquad 1 \supset 0$$
$$0 \qquad 0$$

আবার, (৫) $p \supset p$

$$1 \supset 1 \qquad 0 \supset 0$$
$$1 \qquad 1$$

(৬) $p \equiv p$

$$1 \equiv 1 \qquad 0 \equiv 0$$
$$1 \qquad 1$$

সুতরাং $(p \equiv p) \supset (p \supset p)$

$$1 \supset 1$$
$$1$$

এমন কি নিম্নোক্ত বিশ্লেষণ দুটি

(3) $(p \vee q) \supset (p \vee q)$

$(1 \vee q) \supset (1 \vee q)$ $(0 \vee q) \supset (0 \vee q)$

$1 \supset 1$ $q \supset q$

1 1

(4) $(p \cdot r) \equiv (p \cdot r)$

$(1 \cdot r) \equiv (1 \cdot r)$ $(0 \cdot r) \supset (0 \cdot r)$

$r \equiv r$ $0 \supset 0$

1 1

যথাক্রমে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

(3′) $(p \vee q) \supset (p \vee q)$
1

(4′) $(p \cdot r) \equiv (p \cdot r)$
1

কেননা আমরা জানি যে

যে প্রাকল্পিক বা দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্যের দু ধার অভিন্ন সে বাক্য (স্বত)সত্য। আমরা বলেছি যে বাক্যের স্বতসত্যতা বা স্বতমিথ্যাত্ব প্রকট সত্যমূল্য বিশ্লেষণ না করে তার নিচে সরাসরি '1' বা '0' লেখা যাবে। কিন্তু কোনো বাক্যের স্বতসত্যতা বা স্বতমিথ্যাত্ব প্রকট কিনা তা নির্ণয় করব কি করে ? যা একজনের কাছে প্রকট তা অন্যের কাছে প্রকট নাও মনে হতে পারে। যথা

$$(p \vee q) \supset (q \vee p)$$

এ বাক্যের নিচে সরাসরি '1' লেখা যাবে কি ? এটা কি সবাইর কাছে স্বতবোধ্য যে বাক্যটি স্বতসত্য ? এভাবে আমরা উক্ত সমস্যার মীমাংসা করতে পারি। কিরূপ বাক্যের স্বতসত্যতা ও স্বতমিথ্যাত্ব প্রকটিত বলে গণ্য হবে, কোন্ কোন্ প্রকারের বাক্যের বিশ্লেষণ সংক্ষেপ করা যাবে, এ সম্পর্কে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি মেনে চলব।

(১) $p \cdot \sim p,\ p \cdot q \cdot \cdots \cdot \sim p \cdots$ ঃ এরূপ বাক্য স্বতমিথ্যা বলে গণ্য

(২) $p \vee \sim p,\ p \vee q \vee \cdots \vee \sim p \vee \ldots$ ঃ এরূপ বাক্য স্বতসত্য বলে গণ্য

(৩) ব $\supset$ ব ঃ আকারের বাক্য† স্বতসত্য বলে গণ্য

(৪) ব $\equiv$ ব ঃ আকারের বাক্য‡ স্বতসত্য বলে গণ্য

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে গিয়ে আমরা (১)-সদৃশ বাক্যের নিচে '0', আর (২), (৩), (৪) সদৃশ বাক্যের নিচে সরাসরি '1' লিখব।

সংক্ষেপকরণের এসব কায়দার কথা মনে রেখে এবার একটি জটিল বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা যাক।

† যথা ঃ $(p \supset q) \supset (p \supset q),\ (p \cdot q) \supset (p \cdot q)$

‡ যথা ঃ $(p \supset q) \equiv (p \supset q),\ (p \cdot q) \equiv (p \cdot q)$

উদাহরণ ৫

$$\{[((p \vee q)\cdot(p \vee \sim q))\vee(\sim p \cdot q)] \equiv q\} \supset [(p \cdot r)\vee(p \cdot \sim r)]$$

প্রথম শাখা

$$\{[((1 \vee q)\cdot(1 \vee \sim q))\vee(0 \cdot q)] \equiv q\} \supset [(1 \cdot r)\vee(1 \cdot \sim r)]$$
$$\{[(1 \cdot 1)\vee 0] \equiv q\} \supset [r \vee \sim r]$$
$$\{[1 \vee 0] \equiv q\} \supset 1$$
$$1$$

দ্বিতীয় শাখা

$$\{[((0 \vee q)\cdot(0 \vee \sim q)\vee(1 \cdot q)] \equiv q\} \supset [(0 \cdot r)\vee(0 \cdot \sim r)]$$
$$\{[(q \cdot \sim q)\vee q] \equiv q\} \supset [0 \vee 0]$$
$$\{[0 \vee q] \equiv q\} \supset 0$$
$$\{q \equiv q\} \supset 0$$
$$1 \supset 0$$
$$0$$

বলা বাহুল্য, প্রদত্ত বাক্যটি পরতসাধ্য।

এ বিশ্লেষণের দুটি মাত্র শাখা। বাম ধারের শাখাটি (প্রথম শাখা) লক্ষ করলে বোঝা যাবে ঃ যদি $p=1$ হয় তাহলে 'q', 'r'-এর সত্যমূল্য যা-ই হোক না কেন, প্রদত্ত বাক্যটি সত্য, আর দক্ষিণ দিকের শাখাটি (দ্বিতীয় শাখা) লক্ষ করলে বোঝা যাবে ঃ যদি $p=0$ হয় তাহলে 'q', 'r'-এর সত্যমূল্য যা-ই হোক না কেন প্রদত্ত বাক্যটি মিথ্যা। অর্থাৎ বাক্যটির সত্যসারণী গঠন করলে সারণীটি নিম্নোক্ত রূপ গ্রহণ করত।

p	q	r	প্রদত্ত বাক্য
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

অসম্পূর্ণ সত্যমূল্য বিশ্লেষণ

২৬৮ পৃষ্ঠার (৪) সংখ্যক নিয়মে সম্পূর্ণভাবে বর্ণপ্রতীক বিতাড়নের কথা বলা হয়েছে, সত্যমূল্য বিশ্লেষণ ক্রিয়া সম্পূর্ণ করার কথা বলা হয়েছে। কিন্তু ক্ষেত্র বিশেষে বিশ্লেষণ অসম্পূর্ণ রাখা চলে। পরিপূর্ণ বিশ্লেষণ করার প্রয়োজন আছে কি নেই তা নির্ভর করে কী উদ্দেশ্যে বিশ্লেষণ করা হচ্ছে তার উপর।

যদি কোনো বাক্য স্বতসত্য কিনা—এ প্রশ্নের জবাব পাওয়ার জন্যই বিশ্লেষণে প্রবৃত্ত হই তাহলে কোনো শাখা প্রশাখার নিচে '0' পেলেই সেখানে থেমে গিয়ে, দাবী করতে পারি বাক্যটি স্বতসত্য নয়।

আবার ধরা যাক, জানতে চাই 'ব' বাক্যটি স্বতমিথ্যা কিনা। এখন 'ব'-এর বিশ্লেষণে কোনো পর্যায়ে '1' পেলে সেখানে থেমে গিয়ে দাবী করতে পারি—'ব' স্বতমিথ্যা নয়।

আবার ধরা যাক, 'ব' কি পরতসাধ্য ?—এ প্রশ্নের জবাব চাই। এরকম ক্ষেত্রে কোনো শাখার নিচে '1', এবং কোনো শাখার নিচে '0' পেলেই আমাদের প্রশ্নের জবাব পেয়ে গেলাম ; আর অগ্রসর হওয়ার দরকার নেই।

৫. বাকসংকোচন ও সত্যমূল্য-বিশ্লেষণ সংক্ষেপকরণ

সত্যমূল্য-বিশ্লেষণ সংক্ষেপকরণ সম্পর্কে এ বিভাগে আরও কয়টি কথা বলা হবে। সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে গিয়ে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতির সঙ্গে রূপান্তরকরণ বা সমার্থক বিনিময় পদ্ধতি যুক্ত করলে বিশ্লেষণের কাজ অনেক সহজ হয়। এ যুক্ত পদ্ধতি অনুসারে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হলে

প্রথমে প্রদত্ত বাক্যের অঙ্গে সমার্থক বিনিময় করে বাক্যটিকে সরল, মানে যথাসম্ভব ক্ষুদ্রকায়, করে নিতে হয় ; তারপর লব্ধ বাক্যটির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হয়।

উদাহরণ ঃ

$$[(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)] \equiv [(\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)]$$
$$[p \equiv q] \equiv [(p \supset q) \cdot (\sim p \supset \sim q)]$$
$$[p \equiv q] \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$$
$$[p \equiv q] \underset{1}{\equiv} [p \equiv q]^{*}$$

এখানে সরাসরি প্রদত্ত বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হয় নি। প্রথমে সমার্থক বিনিময় করে বাক্যটিকে অনেক হ্রস্বকায় করা হয়েছে, এবং সর্বশেষ পর্যায়ের বাক্যটির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

নিচে কয়েকটি নির্বাচিত সমার্থতা সূত্র উল্লেখ করা হল। এগুলি বাকসংকোচের সূত্র। এ সূত্রগুলি প্রয়োগ করে প্রথমে প্রদত্ত বাক্যের সরলীকরণ করে, তারপর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করলে বিশ্লেষণ ক্রিয়া অপেক্ষাকৃত সহজ হয়, দ্রুততর হয়।

(১) প্রতিপাদ্য-সংযোগী বর্জন

"$p \cdot (p \vee q)$" সম "p"

আরও সাধারণভাবে "$p \cdot (p \vee q \vee r \vee \ldots \ldots \vee n)$" সম "$p$"

এ সূত্রের বক্তব্য ঃ একটি সংযোগী, 'p', যদি অপর বন্ধনীভুক্ত সংযোগীর মধ্যে অন্যতম বিকল্প হিসাবে থাকে তাহলে সমগ্র বাক্যটি 'p'-এর সমার্থক, সুতরাং এরূপ সংযৌগিক বাক্যের 'p' বজায় রেখে বাকি অংশ বর্জন করা যায়।

* এখানে যথাক্রমে নিম্নোক্ত সূত্রগুলি প্রয়োগ করা হয়েছে ঃ "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$" সম "$p \equiv q$", "$p \supset q$" সম "$\sim p \vee q$", "$p \supset q$" সম "$\sim q \supset \sim p$", "$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$" সম "$p \equiv q$"।

(২) প্রতিপাদক-বিকল্প বর্জন

"$p \vee (p \cdot q)$" সম "p"

আরও সাধারণভাবে "$p \vee (p \cdot q \cdot r \ldots\ldots \cdot n)$" সম "$p$"

এ সূত্রের বক্তব্য : একটি বিকল্প, 'p', যদি অপর বন্ধনীভুক্ত বিকল্পের মধ্যে অন্যতম সংযোগী হিসাবে থাকে তাহলে সমগ্র বাক্যটি 'p'-এর সমার্থক, সুতরাং এরূপ বৈকল্পিক বাক্যের 'p' বজায় রেখে বাকি অংশ বর্জন করা যায়।

সংকোচনের সূত্র

(৩) "$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$" সম "$p$"

(৪) "$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$" সম "$p$"

এদের সাধারণত সম্প্রসারণের সূত্র (Rules of Expansion) বলে। ডান ধার থেকে বাম ধারের দিকে গেলে সম্প্রসারণ, আর বাম ধার থেকে ডান ধারে গেলে সংকোচন। আলোচ্য প্রসঙ্গে আমরা বাম ধারের বাক্যকে সরলীকরণ করার জন্য তার জায়গায় ডান ধারের বাক্য বসাব ; এজন্য এ সূত্রগুলিকে আমরা সংকোচনের সূত্র বলে চিহ্নিত করলাম।

(৫) স্বতসত্য বর্জন

"$p \cdot (q \vee \sim q)$" সম "p"

(৬) স্বতমিথ্যা বর্জন

"$p \vee (q \cdot \sim q)$" সম "p"

এ সূত্র দুটির বক্তব্য যথাক্রমে নিম্নরূপ।

(৫′) কোনো বাক্যের সঙ্গে কোনো স্বতসত্য বাক্য সংযোগী* হিসাবে যুক্ত করলে যা পাওয়া যায় তা মূল বাক্যের সমার্থক, সুতরাং

স্বতসত্য সংযোগীটি বর্জন করা যায়।

(৬′) কোনো বাক্যের সঙ্গে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য বিকল্প † হিসাবে যুক্ত করলে যা পাওয়া যায় তা মূল বাক্যের সমার্থক, সুতরাং

স্বতমিথ্যা বিকল্পটি বর্জন করা যায়।

লক্ষণীয় যে (সংকোচক) সঞ্চালনের সূত্র এবং (৫)–(৬) ব্যবহার করলে আর (৩)—(৪)-এর প্রয়োজন হয় না। কেননা সঞ্চালনের সূত্রের সাহায্যে (৩)—(৪)-কে যথাক্রমে

"$p \cdot (q \vee \sim q)$" আর "$p \vee (q \cdot \sim q)$"

—এতে রূপান্তরিত করা যায়, এবং তারপর স্বতসত্য বর্জন ও স্বতমিথ্যা বর্জন সূত্র অনুসারে এদের পরিবর্তে 'p' লেখা যায়।

* কিন্তু স্বতসত্য বিকল্প বর্জন করা চলে না। লক্ষণীয়, '$p \vee (q \vee \sim q)$' আর 'p' সমার্থক নয়, কেননা প্রথম বাক্যটি স্বতসত্য আর দ্বিতীয়টি পরতসাধ্য (মিথ্যাও হতে পারে)।

† কিন্তু স্বতমিথ্যা সংযোগী বর্জন করা চলে না। লক্ষণীয়, "$p \cdot (q \cdot \sim q)$" আর 'p' সমার্থক নয়, কেননা প্রথম বাক্যটি স্বতমিথ্যা আর দ্বিতীয়টি পরতসাধ্য (সত্যও হতে পারে)। আরও একটা কথা। "$(p \vee \sim p) \supset q$" সম "$q$"-এর সঙ্গে এ নিয়মের তুলনা কর।

আত্তীকরণের* সূত্র (Rules of Absorption)

(৭) "$p \cdot (\sim p \vee q)$" সম "$p \cdot q$"

(৮) "$p \vee (\sim p \cdot q)$" সম "$p \vee q$"

এদেরও স্বতন্ত্র সূত্র বলে মানবার দরকার হয় না। (প্রসারক) সঞ্চালন, ক্রমান্তরকরণ আর উক্ত (৫)—(৬)-এর সাহায্যে এদের বাম ধারের বাক্যকে ডান ধারের বাক্যে রূপান্তরিত করা যায়। রূপান্তরগুলি লক্ষণীয়।

$p \cdot (\sim p \vee q)$		$p \vee (\sim p \cdot q)$	
$(p \cdot \sim p) \vee (p \cdot q)$	[সঞ্চালন]	$(p \vee \sim p) \cdot (p \vee q)$	[সঞ্চালন]
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim p)$	[ক্রমান্তরকরণ]	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim p)$	[ক্রমান্তরকরণ]
$p \cdot q$	[স্বতমিথ্যা বর্জন]	$p \vee q$	[স্বতসত্য বর্জন]

দ্বিপ্রাকল্পিকের সংজ্ঞা

(৯) "$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$" সম "$p \equiv q$"

(১০) "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$" সম "$p \equiv q$"

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে গিয়ে উক্তরূপ বাকসংকোচক সূত্র প্রয়োগ করে সরলীকরণ করলে বিশ্লেষণের কাজ কি রকম সহজসাধ্য হয় দু একটি উদাহরণ দিয়ে তা দেখানো হল।

উদাহরণ ৫'

$$\{[\underline{((p \vee q) \cdot (p \vee \sim q))} \vee (\sim p \cdot q)] \equiv q\} \supset [\underline{(p \cdot r) \vee (p \cdot \sim r)}]$$

[সূত্র (৪)]** $\qquad \{[\underline{p \vee (\sim p \cdot q)}] \equiv q\} \supset p \qquad$ [সূত্র (৩)]

[সূত্র (৮)] $\qquad \{[p \vee q] \equiv q\} \supset p$

$$\{[1 \vee q] \equiv q\} \supset 1 \qquad \{[0 \vee q] \equiv q\} \supset 0$$

$$1 \qquad\qquad \{q \equiv q\} \supset 0$$

$$1 \supset 0$$

$$0$$

লক্ষণীয় যে, এ বিশ্লেষণটি উদাহরণ ৫-এর সংক্ষেপিত রূপ।

উদাহরণ ৬

$$(p \vee \sim p) \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot r) \vee (\sim p \cdot s) \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$$

(মুখ্য বাম শাখা)

1. $1 \equiv [(1 \cdot q) \vee (1 \cdot \sim r) \vee (0 \cdot r) \vee (0 \cdot s) \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$
2. $1 \equiv [q \vee \sim r \vee 0 \vee 0 \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$
3. $1 \equiv [q \vee \sim r \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$

* বা, অঙ্গীকরণের সূত্র। এ সূত্রগুলির সঙ্গে যথাক্রমে (১) ও (২)-এর গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। এ পার্থক্যের দিকে নজর দাও।

** মানে, সমঃ সূত্র (৪), মানে—সমার্থতা সূত্র (৪)। কোন্ বাক্যাংশের উপর সমার্থতা সূত্র প্রয়োগ করা হয়েছে রেখাঙ্কিত করে তা দেখানো হল।

4. $1 \equiv [q \vee (\sim q \cdot r) \vee \sim r \vee (\sim r \cdot \sim s)]$ (3, ক্রমান্তরকরণ)
5. $1 \equiv [q \vee (\sim q \cdot r) \vee \sim r$ (4, সমঃ সূত্র (২))
6. $1 \equiv [q \vee r \vee \sim r]$ (5, সমঃ সূত্র (৮))
7. $1 \equiv 1$

1

(মুখ্য দক্ষিণ শাখা)

1′. $1 \equiv [(0 \cdot q) \vee (0 \cdot \sim r) \vee (1 \cdot r) \vee (1 \cdot s) \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$
2′. $1 \equiv [0 \vee 0 \vee r \vee s \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$
3′. $1 \equiv [r \vee s \vee (\sim q \cdot r) \vee (\sim r \cdot \sim s)]$
4′. $1 \equiv [r \vee (r \cdot \sim q) \vee s \vee (\sim s \cdot \sim r)]$ (3′, ক্রমান্তরকরণ)
5′. $1 \equiv [r \vee s \vee (\sim s \cdot \sim r)]$ (4′, সমঃ সূত্র (২))
6′. $1 \equiv [r \vee s \vee \sim r]$ (5′, সমঃ সূত্র (৮))
7′. $1 \equiv 1$

1

বলা বাহুল্য প্রদত্ত বাক্যটি স্বতসত্য। লক্ষ করে থাকবে বাক্যটিতে ৪টি স্বতন্ত্র বর্ণপ্রতীক: p, q, r, s; কিন্তু বাক্যটির সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে গিয়ে কেবল 'p'-তে মূল্য আরোপ করতে হয়েছে, আর কেবল দুটি শাখা, বাক্য গঠন করতে হয়েছে।

৬. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ও সমার্থতা নির্ণয়

আমরা জানি, " 'ব' 'ভ'-এর সমার্থক" এ কথার অর্থ: "ব ≡ ভ" এ বাক্য স্বতসত্য। এর থেকে বোঝা যায়, কোনো দুটি বাক্য 'ব' ও 'ভ' সমার্থক কিনা তা নির্ণয় করতে হলে 'ব' ও 'ভ'-কে অঙ্গ হিসাবে নিয়ে একটি দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য, "ব ≡ ভ", গঠন করতে হবে, এবং এর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে হবে। যদি দেখা যায় দ্বিপ্রাকল্পিকটি স্বতসত্য তাহলে বুঝতে হবে, 'ব' 'ভ'-এর সমার্থক, নতুবা নয়।

উদাহরণ ৭

প্রশ্ন: "$(p \supset q) \supset r$" আর "$p \supset (q \supset r)$" কি সমার্থক ?

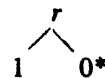
উত্তর: $[(p \supset q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$

$[(1 \supset q) \supset r] \equiv [1 \supset (q \supset r)]$ $[(0 \supset q) \supset r] \equiv [0 \supset (q \supset r)]$

$[q \supset r] \equiv [q \supset r]$ $[1 \supset r] \equiv 1$

1 $r \equiv 1$

r

1 0^*

তারকাচিহ্নিত মূল্যাঙ্ক থেকে বোঝা যায় দ্বিপ্রাকল্পিকটি স্বতসত্য নয়। সুতরাং প্রদত্ত বাক্য দুটি সমার্থক নয়।

উদাহরণ ৮

প্রশ্ন : "$\sim p \cdot (q \vee r)$" আর "$(\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot r)$" কি সমার্থক ?

উত্তর :

$$[\sim p \cdot (q \vee r)] \equiv [(\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot r)]$$

$$[0 \cdot (q \vee r)] \equiv [(0 \cdot q) \vee (0 \cdot r)] \qquad [1 \cdot (q \vee r)] \equiv [(1 \cdot q) \vee (1 \cdot r)]$$

$$0 \equiv [0 \vee 0] \qquad [q \vee r] \equiv [q \vee r]$$

$$0 \equiv 0 \qquad 1$$

$$1$$

দ্বিপ্রাকল্পিকটি স্বতসত্য, সুতরাং প্রদত্ত বাক্য দুটি সমার্থক।

৭. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ও প্রতিপত্তি নির্ণয়

আমরা জানি

'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে, 'ব' হল 'ভ'-এর প্রতিপাদক
'ভ' 'ব'-এর দ্বারা প্রতিপন্ন হয়, 'ভ' হল 'ব'-এর প্রতিপাদ্য

—এসব কথার অর্থ : "ব ⊃ ভ" বাক্যটি স্বতসত্য। জানি, যে প্রাকল্পিক বাক্য স্বতসত্য তার পূর্বকল্প অনুকল্পের প্রতিপাদক। এর থেকে বোঝা যায়, কোনো প্রদত্ত বাক্য 'ব' অন্য কোনো প্রদত্ত বাক্যকে, 'ভ'-কে, প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে "ব ⊃ ভ"-এর বৈধতা পরীক্ষা করতে হয়। আমরা আরও জানি, কোনো যুক্তির "ব ∴ ভ"-এর বৈধতা বিচার করতে হলেও অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের 'ব ⊃ ভ'-এর, বৈধতা পরীক্ষা করার দরকার। যদি দেখা যায় "ব ⊃ ভ" বৈধ বা স্বতসত্য তাহলে বুঝতে হবে 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে, "ব ∴ ভ" বৈধ।

আনুক্রমিক সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করে প্রতিপত্তি নির্ণয় করা প্রসঙ্গে কোয়াইন্ তিনটি পদ্ধতির কথা বলেছেন :

(১) Full Sweep—পূর্ণপাতন বা সর্বারোপ পদ্ধতি

(২) Fell Swoop—পক্ষপাতন বা পক্ষারোপ পদ্ধতি

(৩) Full Swap—(পূর্ণ) প্রতিপাতন বা (পূর্ণ) প্রত্যারোপ পদ্ধতি

(১) Full Sweep—পূর্ণপাতন পদ্ধতি

এতক্ষণ আমরা যে আনুক্রমিক সত্যমূল্য বিশ্লেষণ প্রয়োগ করে আসছি সে পদ্ধতিতে প্রতিপত্তি নির্ণয়কে বলে Full Sweep পদ্ধতি।

উদাহরণ ৯

প্রশ্ন : "$(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r)$" এ বাক্যটি "$q \vee s$"-কে প্রতিপাদন করে ?

উত্তর ঃ $[(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r)] \supset (q \vee s)$

$[(1 \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (1 \vee r)] \supset (q \vee s)$ $[(0 \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (0 \vee r)] \supset (q \vee s)]$

$[q \cdot (r \supset s) \cdot 1] \supset (q \vee s)$ $[1 \cdot (r \supset s) \cdot r] \supset (q \vee s)$

$[q \cdot (r \supset s)] \supset (q \vee s)$ $[(r \supset s) \cdot r] \supset (q \vee s)$

$[1 \cdot (r \supset s)] \supset (1 \vee s)$ $[0 \cdot (r \supset s)] \supset (0 \vee s)$ $[(1 \supset s) \cdot 1] \supset (q \vee s)$ $[(0 \supset s) \cdot 0] \supset (q \vee s)$

$[r \supset s] \supset 1$ $0 \supset s$ $s \supset (q \vee s)$ $0 \supset (q \vee s)$

1 1 1

$1 \supset (q \vee 1)$ $0 \supset (q \vee 0)$

$q \vee 1$ 1

1

প্রশ্নোক্ত প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যকে প্রতিপাদন করে।

উদাহরণ ১০

প্রশ্ন ঃ $(A \supset B) \cdot (C \supset D) \therefore (A \cdot C) \supset (B \cdot D)$—এ যুক্তিটি কি বৈধ ?

উত্তর ঃ $[(A \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(A \cdot C) \supset (B \cdot D)]$

$[(1 \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(1 \cdot C) \supset (B \cdot D)]$ $[(0 \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(0 \cdot C) \supset (B \cdot D)]$

$[B \cdot (C \supset D)] \supset [C \supset (B \cdot D)]$ $[C \supset D] \supset [0 \supset (B \cdot D)]$

$[C \supset D] \supset 1$

$[1 \cdot (C \supset D)] \supset [C \supset (1 \cdot D)]$ $[0 \cdot (C \supset D)] \supset [C \supset (0 \cdot D)]$ 1

$[C \supset D] \supset [C \supset D]$ $0 \supset (C \supset 0)$

1 1

উক্ত প্রাকল্পিক বাক্যটি স্বতসত্য, সুতরাং যুক্তিটি বৈধ।

উদাহরণ ১১

প্রশ্ন ঃ "$\sim q \vee \sim s$" (১) কি "$(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim p \vee \sim r)$" (২)-এর দ্বারা প্রতিপন্ন হয় ?

উত্তর ঃ $[(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim p \vee \sim r)] \supset (\sim q \vee \sim s)$

$[(1 \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (0 \vee \sim r)] \supset (\sim q \vee \sim s)$ $[(0 \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (1 \vee \sim r)] \supset (\sim q \vee \sim s)]$

$[q \cdot (r \supset s) \cdot \sim r] \supset (\sim q \vee \sim s)$ $[1 \cdot (r \supset s) \cdot 1] \supset (\sim q \vee \sim s)$

$[r \supset s] \supset (\sim q \vee \sim s)$

$[1 \cdot (r \supset s) \cdot \sim r] \supset (0 \vee \sim s)$ $[(0 \cdot (r \supset s) \cdot \sim r] \supset (1 \vee \sim s)$ $[r \supset 1] \supset (\sim q \vee 0)$ $[r \supset 0] \supset (\sim q \vee 1)$

$[(r \supset s) \cdot \sim r] \supset \sim s$ $0 \supset 1$ $1 \supset \sim q$ $\sim r \supset 1$

1 $\sim q$ 1

$[(1 \supset s) \cdot 0] \supset \sim s$ $[(0 \supset s) \cdot 1] \supset \sim s$ $*0$ 1

$0 \supset \sim s$ $[0 \supset s] \supset \sim s$

1 $1 \supset \sim s$

$\sim s$

$*0$ 1

তারকাচিহ্নিত মূল্যাঙ্ক দেখলে বোঝা যাবে প্রাকল্পিকটি স্বতসত্য নয়, সুতরাং প্রদত্ত (১) (২)-এর দ্বারা প্রতিপন্ন হয় না।

(২) Fell Swoop—পক্ষপাতন পদ্ধতি

যে বাক্য সম্বন্ধে প্রশ্ন উঠবে, বাক্যটি প্রতিপাদক কিনা তাকে আমরা "ব" বলে উল্লেখ করব, আর যার সম্বন্ধে প্রশ্ন উঠবে বাক্যটি প্রতিপাদ্য কিনা তাকে 'ভ' বলে উল্লেখ করব।

আমরা জানি, কোনো কোনো বাক্য কেবল অনন্য সত্যমূল্যসর্তেই সত্য। যথা "$\sim p \cdot \sim q$" সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি $p=0$, $q=0$ হয়। এখন, 'ব' যদি এ জাতীয় কোনো বাক্য হয় তাহলে 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে প্রাকল্পিক বাক্য, 'ব ⊃ ভ', গঠন করার দরকার নেই। এ রকম ক্ষেত্রে আরও সহজে প্রতিপত্তি নির্ণয় করা যায়। সংক্ষিপ্তভাবে প্রতিপত্তি নির্ণয়ের নিয়মটি অনুজ্ঞার আকারে ব্যক্ত করা যায় ঃ

> 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত বর্ণপ্রতীকগুলিতে যে যে মূল্য আরোপ করলে 'ব' সত্য হয়, 'ভ'-এর অন্তর্ভুক্ত প্রতীকগুলিতে ঠিক সে সে মূল্য আরোপ কর, এবং লব্ধ বাক্যটির লঘুকরণ কর।

লঘুকরণ করে যদি '1' পাওয়া যায় তাহলে বুঝবে 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে, অন্যথা করে না।

প্রস্তাবিত প্রতিপত্তি নির্ণয় পদ্ধতিটি নির্ভুল। কেননা ঃ যদি কোনো অনন্য সত্যমূল্য গ্রহণ করলে ('ব ⊃ ভ'-এর) 'ব' সত্য, এবং সে মূল্য বসালে 'ভ'-ও সত্য হয়, তাহলে বলা যায়—এমন কোনো সত্যমূল্য নেই যা আরোপ করলে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা হতে পারে, কাজেই বলতে পারি 'ব ⊃ ভ' বৈধ, সুতরাং 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে (আরও দাবী করতে পারি ঃ "ব ∴ ভ" বৈধ)। উদাহরণ ঃ

প্রশ্ন ঃ "$p \cdot r$" (ব) "$(p \,.\, \sim q) \vee (r \cdot \sim s) \vee (q \cdot s)$" (ভ)কে প্রতিপাদন করে কি ?

উত্তর ঃ "$p \cdot r$" সত্য হতে পারে যদি $p=1$, $r=1$ হয়। 'ভ'তে এ মূল্যগুলি বসিয়ে পাই—

$$(p \cdot \sim q) \vee (r \,.\, \sim s) \vee (q \cdot s)$$

1. $(1 \cdot \sim q) \vee (1 \cdot \sim s) \vee (q \cdot s)$
2. $(\sim q \vee \sim s) \vee (q \cdot s)$
3. $\sim(q \cdot s) \vee (q \cdot s)$ [2, ডি মরগেন]
4. $(q \cdot s) \vee \sim(q \cdot s)$ [3, ক্রমান্তরকরণ]

$$1$$

সুতরাং প্রদত্ত 'ব' প্রদত্ত 'ভ'কে প্রতিপাদন করে।

প্রশ্ন ঃ "$\sim p \cdot \sim r$" কি "$(p \cdot \sim q) \vee (r \cdot \sim s) \vee (\sim q \cdot \sim s)$"কে প্রতিপাদন করে ?

উত্তর : $[p=0,\ r=0]$

$$(p \cdot \sim q) \vee (r \cdot \sim s) \vee (\sim q \cdot \sim s)$$
$$(0 \cdot \sim q) \vee (0 \cdot \sim s) \vee (\sim q \cdot \sim s)$$
$$\sim q \cdot \sim s$$
$$0 \cdot \sim s \qquad 1 \cdot \sim s$$
$$0 \qquad\qquad \sim s$$
$$0 \quad 1$$

প্রদত্ত প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক নয় (সর্বনিম্ন বাম প্রশাখা দ্রষ্টব্য)।

প্রশ্ন : "$p \cdot \sim t$" কি "$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee (r \cdot \sim s) \vee (s \cdot \sim t)$"-এর প্রতিপাদক ?

উত্তর : $[p=1,\ t=0]$

$$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee (r \cdot \sim s) \vee (s \cdot \sim t)$$
$$(1 \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee (r \cdot \sim s) \vee (s \cdot 1)$$
$$\sim q \vee (q \cdot \sim r) \vee (r \cdot \sim s) \vee s$$
$$\underline{\sim q \vee (q \cdot \sim r)} \vee \underline{s \vee (\sim s \cdot r)}$$
$$(\sim q \vee \sim r) \vee (s \vee r) \qquad \text{[সমঃ সূত্র (৮)]}$$
$$\sim q \vee \sim r \vee s \vee r$$
$$r \vee \sim r \vee \sim q \vee s$$
$$1$$

সুতরাং প্রদত্ত প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক।

আবার, আমরা জানি যে—কোনো কোনো বাক্য কেবল অনন্য সত্যমূল্যসর্তে মিথ্যা। যথা :

"$p \vee q$" মিথ্যা হতে পারে ··· *$p=0, q=0$

"$p \supset q$" মিথ্যা হতে পারে ··· $p=1, q=0$

"$(p . q) \supset r$" মিথ্যা হতে পারে ··· $p=1, q=1, r=0$

"$p \supset (r \vee s)$" মিথ্যা হতে পারে ··· $p=1, r=0, s=0$

এখন, 'ভ' যদি এমন কোনো বাক্য হয় তাহলে 'ভ' 'ব'-এর দ্বারা প্রতিপন্ন হয় কিনা তা "ব ⊃ ভ" গঠন না করেও সহজে নির্ণয় করা যায় নিম্নোক্ত নির্দেশ অনুসরণ করে—

'ভ'-এর অন্তর্ভুক্ত বর্ণপ্রতীকগুলিতে যে যে মূল্য আরোপ করলে 'ভ' মিথ্যা হয় 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত প্রতীকগুলিতে ঠিক সে সে মূল্য আরোপ কর, এবং লব্ধ বাক্যটির লঘুকরণ কর।

লঘুকরণ করে যদি '0' পাওয়া যায় তাহলে বুঝতে হবে 'ভ' 'ব'-এর দ্বারা প্রতিপন্ন হয়, বুঝতে হবে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক।

* "···"-এর পরিবর্তে পড়তে হবে : "যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে"

প্রস্তাবিত প্রতিপত্তি নির্ণয় পদ্ধতি নির্ভুল। কেননা : উক্ত নিয়ম অনুসরণ করে যদি '0' পাই তাহলে দাবী করতে পারি—এমন কোনো সত্যমূল্য নেই যা আরোপ করলে 'ভ' মিথ্যা ও 'ব' সত্য হয়, দাবী করতে পারি "ব $\supset$ ভ" বৈধ, বা 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক (বা " $\therefore$ ভ" বৈধ)।

উদাহরণ ৯'

প্রশ্ন : "$(p \supset q) . (r \supset s) , (p \vee r)$" এ বাক্য কি "$q \vee s$"-এর প্রতিপাদক ?

উত্তর : "$q \vee s$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি $q=0, s=0$ হয়। অপর বাক্যটিতে এ মূল্য আরোপ করে পাই :

$$(p \supset q) . (r \supset s) \cdot (p \vee r)$$
$$(p \supset 0) . (r \supset 0) \cdot (p \vee r)$$
$$\sim p . \sim r \cdot (p \vee r)$$
$$(\sim p . \sim r) \cdot (p \vee r)$$
$$\sim (p \vee r) \cdot (p \vee r)$$
$$(p \vee r) \cdot \sim (p \vee r)$$
$$0$$

সুতরাং প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক।

এ উদাহরণে যে প্রশ্নের উত্তর দেওয়া হয়েছে উদাহরণ ৯-তেও সে প্রশ্নেরই উত্তর দেওয়া হয়েছে। উত্তর দুটি তুলনা কর।

উদাহরণ ১১'

প্রশ্ন : "$(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim p \vee \sim r)$"—এ বাক্য কি "$\sim q \vee \sim s$"-কে প্রতিপাদন করে ?

উত্তর : "$\sim q \vee \sim s$" মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে $q=1, s=1$; প্রথম বাক্যে এ মূল্যগুলি আরোপ করা হল।

$$(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim p \vee \sim r)$$
$$(p \supset 1) \cdot (r \supset 1) \cdot (\sim p \vee \sim r)$$
$$1 \cdot 1 \cdot (\sim p \vee \sim r)$$
$$\sim p \vee \sim r$$

$0 \vee \sim r$ $1 \vee \sim r$

$\sim r$ 1

0 1

স্পষ্টতই প্রদত্ত প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যকে প্রতিপাদন করে না (সর্বনিম্ন দক্ষিণ প্রশাখা দ্রষ্টব্য)।

এ উদাহরণে যে প্রশ্নের উত্তর দেওয়া হয়েছে উদাহরণ ১১-তেও সে প্রশ্নেরই উত্তর দেওয়া হয়েছে। উত্তর দুটি তুলনা কর।

উপরে প্রতিপত্তি পরীক্ষার দুটি নিয়ম উল্লেখ করা হয়েছে। এ নিয়ম দুটি প্রয়োগ করে প্রতিপত্তি নির্ণয়করণকে বলে পক্ষপাতন (fell swoop)। আমরা পক্ষপাতন ব্যাখ্যা করেছি প্রতিপত্তি পরীক্ষা পদ্ধতি হিসাবে। যেহেতু এ পদ্ধতিতে প্রতিপত্তি পরীক্ষা করা যায় সেহেতু এর সাহায্যে যুক্তির বৈধতাও পরীক্ষা করা যায়।

উদাহরণ ১২

প্রশ্ন : $[A \supset (B \supset C)] \cdot [B \supset (C \supset D)] \therefore A \supset (B \supset D)$

—এ যুক্তিটি বৈধ না অবৈধ ?

উত্তর : এ যুক্তির সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে যদি এবং কেবল যদি $A=1,\ B=1,\ D=0$ হয়। হেতুবাক্যে এ মূল্যগুলি আরোপ করে সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করা হল।

$$[A \supset (B \supset C)] \cdot [B \supset (C \supset D)]$$
$$[1 \supset (1 \supset C)] \cdot [1 \supset (C \supset 0)]$$
$$[1 \supset C] \cdot [C \supset 0]$$
$$C \cdot \sim C$$
$$0$$

স্পষ্টতই যুক্তিটি বৈধ।

উদাহরণ ১৩

প্রশ্ন : $[(A \vee B) \supset (C \cdot D)] \cdot [(C \vee E) \supset (D \supset \sim A) \therefore \sim A$

—এ যুক্তিটি বৈধ না অবৈধ ?

উত্তর : [ধরা যাক সিদ্ধান্ত মিথ্যা, তাহলে $A=1$]

$$[(A \vee B) \supset (C \cdot D)] \cdot [(C \vee E) \supset (D \supset \sim A)]$$
$$[(1 \vee B) \supset (C \cdot D)] \cdot [(C \vee E) \supset (D \supset 0)$$
$$[1 \supset (C \cdot D)] \cdot [(C \vee E) \supset \sim D]$$
$$[C \cdot D] \cdot [(C \vee E) \supset \sim D]$$

$$[1 \cdot D] \cdot [(1 \vee E) \supset \sim D] \qquad [0 \cdot D] \cdot [(0 \vee E) \supset \sim D]$$
$$D \cdot [1 \supset \sim D] \qquad 0 \cdot [E \supset \sim D]$$
$$D \cdot \sim D \qquad 0$$
$$0$$

বলা বাহুল্য, প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

উদাহরণ ১৪

প্রশ্ন : $[A \equiv (B \vee C)] \cdot [B \equiv (C \vee A)] \cdot [C \equiv (A \vee B)] \therefore B \vee C$

—যুক্তিটি কি বৈধ ?

উত্তর : [সিদ্ধান্তটি মিথ্যা হলে $B=0, C=0$]

$$[A \equiv (B \vee C)] \cdot [B \equiv (C \vee A)] \cdot [C \equiv (A \vee B)]$$
$$[A \equiv (0 \vee 0)] \cdot [0 \equiv (0 \vee A)] \cdot [0 \equiv (A \vee 0)]$$
$$[A \equiv 0] \cdot [0 \equiv A] \cdot [0 \equiv A]$$
$$[A \equiv 0] \cdot [0 \equiv A]$$
$$\sim A \cdot \sim A$$
$$\sim A$$
$$0 \quad 1$$

দক্ষিণ শাখাটি লক্ষ করলে বোঝা যায় প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।

পক্ষপাতন পদ্ধতি প্রয়োগ করলে প্রতিপত্তি বা বৈধতা পরীক্ষণের কাজ অনেক সহজ-সাধ্য হয়, ঠিক। কিন্তু এ পদ্ধতি দিয়ে সব সময় প্রতিপত্তি বা বৈধতা পরীক্ষা করা যায় না। যদি এমন হয় যে "ব ⊃ ভ" বা "ব ∴ ভ"-এর, 'ব' একাধিক সত্যমূল্যসর্তে সত্য এবং 'ভ' একাধিক সত্যমূল্যসর্তে মিথ্যা তাহলে পক্ষপাতন সম্ভব নয়। এরকম ক্ষেত্রে পূর্ণ-পাতনের উপর নির্ভর করতে হয়।

যদি 'ব'

$p, \sim p, p \cdot q, p \cdot \sim q, \sim(p \vee q), \sim(p \supset q)$

—এসব আকারের বাক্য* হয়, আর

যদি 'ভ'

$p, \sim p, p \vee q, p \supset q, p \vee (q \supset r), p \supset (q \supset r)$

—এসব আকারের বাক্য† হয়

তাহলে পক্ষপাতন প্রয়োগ করা সুবিধাজনক।

(৩) Full Swap—পূর্ণ প্রতিপাতন

প্রতিমানতা (duality) আলোচনা না করে এ পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করা অসুবিধাজনক। এজন্য প্রতিমানতা প্রসঙ্গে পদ্ধতিটি আলোচনা করা হয়েছে। অধ্যায় ১৮ দ্রষ্টব্য।

অনুশীলনী

১. $(A \cdot C) \cdot (A \supset B)$ $\qquad$ $\sim B \cdot [A \supset (B \cdot C)]$

$A \cdot (\sim A \supset B)$ $\qquad$ $A \supset (B \cdot C \cdot \sim B)$

উক্ত বাক্যগুলির কোন্‌টি 'A'-এর প্রতিপাদক, কোন্‌টি '$\sim A$'-এর ?

---

* অর্থাৎ একবর্ণ প্রতীক, সংযৌগিক বা সাপেক্ষ বাক্যের নিষেধ

† অর্থাৎ একবর্ণ প্রতীক, বা সাপেক্ষ বাক্য

২. $(A \supset B) \cdot (A \supset C)$ $(A \supset B) \vee (A \supset C)$

এ বাক্য দুটির (i) কোন্‌টি '$A \supset (B \cdot C)$'-এর সমার্থক ?

(ii) কোন্‌টি '$A \supset (B \vee C)$'-এর সমার্থক ?

৩. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখাও নিম্নোক্ত পঙক্তিগুলির প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক ঃ

$(A \supset B) \cdot [C \supset (D \cdot E \cdot F)] \cdot (\sim B \vee \sim D \vee \sim E \vee \sim F)$ $A \supset \sim C$

$A \cdot [A \supset (B \cdot \sim C)]$ $[(B \vee C) \supset D] \supset D$

$\{[A \supset (B \vee C)] \supset [(D \cdot E) \equiv \sim F]\} \cdot [(D \cdot E) \equiv F]$ $[A \cdot \sim(B \vee C)]$

৪. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি জোড়ের বাক্যগুলি সমার্থক কিনা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতিতে তা নির্ণয় কর ঃ

(a) $(A \cdot B) \vee (A \cdot C) \vee (B \cdot C)$

(*a*) $(A \vee B) \cdot (A \vee C) \cdot (B \vee C)$

(b) $(A \cdot B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot D) \vee (A \cdot C \cdot D) \vee (B \cdot C \cdot D)$

(*b*) $(A \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee D) \vee (A \vee C \vee D) \vee (B \vee C \vee D)$

(c) $(A \cdot B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot \sim C) \vee (A \cdot \sim B \cdot C) \vee (A \cdot \sim B \cdot \sim C)$

(*c*) $(A \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee \sim C) \cdot (A \vee \sim B \vee C) \cdot (A \vee \sim B \vee \sim C)$ (কোয়াইন্‌ অবলম্বনে)

৫. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখাও যে নিম্নোক্ত বাক্য দুটি সমার্থক ঃ

$(\sim A \cdot \sim D) \vee (\sim A \cdot \sim B) \vee (B \cdot \sim D) \vee (A \cdot \sim C \cdot D)$

$(\sim A \cdot \sim D) \vee (A \cdot \sim C \cdot D) \vee (A \cdot B \cdot \sim D) \vee (\sim A \cdot \sim B \cdot D)$

৬. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় কর ঃ

(i) $[A \vee (B \cdot C)] \vee [\sim A \cdot (\sim B \vee \sim C)]$

(ii) $[(A \cdot B) \equiv C] \vee [(A \cdot B) \equiv \sim C]$

(iii) $(A \supset B) \supset [\sim(B \cdot C) \supset \sim(C \cdot A)]$

(iv) $\{[((A \vee B) \cdot (A \vee \sim B)) \vee (\sim A \cdot B)] \equiv B\} \supset [(A \cdot C) \vee (A \cdot \sim C)]$

(v) $(A \cdot B) \vee (A \cdot \sim C) \vee (\sim A \cdot C) \vee (\sim A \cdot D) \vee (\sim B \cdot C) \vee (\sim C \cdot \sim D)$

(vi) $[(A \cdot B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot \sim C) \vee (A \cdot \sim B \cdot C) \vee (A \cdot \sim B \cdot \sim C)] \equiv [(A \cdot D) \vee (A \cdot \sim D)]$

(vii) $\{A \supset [B \supset (C \supset (D \supset E))]\} \supset [(A \cdot B \cdot C \cdot D) \supset (E \vee F \vee G)]$

৭. আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর।

(১) $(A \vee B) \supset (A \cdot B)$, $\sim(A \vee B)$ $\therefore$ $\sim(A \cdot B)$

(২) $(A \supset B) \cdot (C \supset D)$, $B \vee C$ $\therefore$ $A \vee D$

(৩) $A \supset (B \supset C)$, $C \supset (D \cdot E)$ $\therefore$ $A \supset (B \supset D)$

(৪) $A \equiv B,\ B \equiv (C \cdot D),\ C \equiv (A \vee E),\ A \vee E, \quad \therefore \quad A \cdot E$

(৫) $(A \supset \sim B) \cdot (B \supset C),\ C \supset A,\ \sim D \supset B \quad \therefore \quad D$

(৬) $A \supset (B \supset C),\ B \supset (\sim C \supset D),\ (C \vee D) \supset E \quad \therefore \quad A \supset E$

(৭) $A \cdot (B \vee C),\ (A \cdot C) \supset \sim(D \vee E),\ (\sim D \vee \sim E) \supset (A \cdot B)$
$\therefore \quad D \equiv E$

(৮) $A \vee (B \cdot C),\ (A \vee B) \supset (D \equiv \sim E),\ (D \supset \sim E) \supset (E \cdot \sim F),$
$(F \supset G) \cdot (G \supset E),\ (B \supset C) \supset G \quad \therefore \quad G$

(৯) $A \supset \{(\sim B \supset C) \vee [(\sim D \supset E) \vee (\sim E \supset \sim D)\}$
$\therefore \quad A \supset \{(\sim C \supset B) \vee [(\sim D \supset E) \supset (D \supset E)]\}$

(১০) $(A \vee B) \supset \sim(C \cdot D),\ (\sim C \vee \sim D) \supset (E \supset F),\ (E \equiv F)$
$\supset (G \cdot H) \quad \therefore \quad (A \vee B) \supset (H \cdot G)$

৮. দেখাও যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি বৈধ ঃ

$$(p \supset q) \equiv [(p \cdot q) \equiv p]$$
$$(p \supset q) \supset [(p \cdot q) \equiv p]$$
$$[(p \cdot q) \equiv p] \supset (p \supset q)$$

৯. Fell Swoop পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈধতা নির্ণয় কর ঃ

$$(A \cdot \sim B) \supset [(\sim A \cdot \sim B) \vee (B \cdot \sim C) \vee (\sim B \cdot \sim C)]$$
$$(A \cdot \sim B) \supset [(A \cdot \sim C) \vee (C \cdot \sim D) \vee (D \cdot \sim E) \vee (E \cdot \sim B)]$$
$$\{[A \equiv (\sim B \vee \sim C)] \cdot [\sim B \equiv (\sim C \vee A)] \cdot [\sim C \equiv (A \vee \sim B)]\}$$
$$\supset (\sim B \vee \sim C)$$

১৬

সত্যশাখী পদ্ধতি
(Truth Tree Method)

১. ভূমিকা : বিরুদ্ধ অসিদ্ধি ও বৈধতা নির্ণয়

আমরা জানি যে

"ব ∴ ভ" বৈধ, "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য বা বৈধ, 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে

এসব কথার অর্থ

এমন হতে পারে না যে 'ব'-সত্য-এবং-'ভ'-মিথ্যা, মানে

এমন হতে পারে না যে "ব · ~ভ" সত্য।

এখানে "হতে পারে না যে" মানে এমন কোনো সত্যমূল্য (সত্যসর্ত) নেই যাতে ("ব · ~ভ" সত্য)। উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায়, যদি দেখানো যায় যে, এমন কোনো সত্যমূল্যবিন্যাস নেই যার মূল্যগুলি আরোপ করলে "ব · ~ভ" সত্য হয়, যদি দেখানো যায় সকল সম্ভাব্য সত্যসর্তেই "ব · ~ভ" মিথ্যা, তাহলে দাবী করা যায় "ব ∴ ভ" বৈধ, "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য, 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক। আর যদি দেখানো যায়, অন্তত একটি ক্ষেত্রে "ব · ~ভ" সত্য তাহলে দাবী করতে পারি : "ব ∴ ভ" বা "ব ⊃ ভ" অবৈধ, 'ব' 'ভ'কে প্রতিপাদন করে না।

উপরে যে বৈধতা পরীক্ষণ পদ্ধতির ইঙ্গিত দেওয়া হল তাকে বলে বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতি*। এ পদ্ধতি কেন উক্ত নামে অভিহিত হয় বুঝে নাও। কোনো যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে গিয়ে, কোনো বাক্য 'ব' অন্য কোনো বাক্য 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে গিয়ে, আসলে অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা করা হয়। "ব ∴ ভ" বৈধ কিনা তা নির্ণয় করতে গিয়ে প্রাকল্পিক 'ব ⊃ ভ'-এর বৈধতা পরীক্ষা করি। এবং এ বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা করতে গিয়ে আমরা পূর্বকল্প 'ব' আর অনুকল্পের নিষেধ '~ভ' নিয়ে "ব · ~ভ" সংযৌগিকটি গঠন করি। তার মানে, প্রথমে প্রাকল্পিকটির বিরুদ্ধ গঠন করা হয় (স্মরণীয় "ব ⊃ ভ"-এর বিরুদ্ধ হল "ব · ~ভ")। এখন যদি দেখা যায়, বিরুদ্ধ বাক্যটি অসিদ্ধ—মানে কোনো সত্যসর্তে সত্য নয়, স্বতমিথ্যা—তাহলে বিরুদ্ধের অসিদ্ধিহেতু, দাবী করি যে : "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য (স্মরণীয় যে স্বতমিথ্যা বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্য স্বতসত্য), দাবী করি যে : "ব ∴ ভ" বৈধ। আর যদি দেখা যায়, বিরুদ্ধ বাক্য "ব · ~ভ"

* যেহেতু আলোচ্য পদ্ধতিটি নির্ণয় পদ্ধতি, যেহেতু এর দ্বারা বিরুদ্ধের "সিদ্ধি"ও দেখানো যায়, সেজন্য এর নাম হওয়া উচিত ছিল—বিরুদ্ধ সিদ্ধি অসিদ্ধি পদ্ধতি।

অসিদ্ধ নয়, স্বতমিথ্যা নয়, যদি দেখা যায় এমন ক্ষেত্র আছে যাতে (যে সত্যমূল্যবিন্যাসে) বাক্যটি সত্য বলে গণ্য, তাহলে ঘোষণা করি—"ব ∴ ভ" বা "ব ⊃ ভ" অবৈধ।

এখন, বিরুদ্ধের অসিদ্ধি (বা সিদ্ধি) দেখানো যায় বিভিন্নভাবে, যেমন সত্যসারণী গঠন করে বা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে। একটা উদাহরণ।

ব ভ

প্রশ্ন : $(A \supset B) \cdot A \therefore B$ —এ যুক্তিটি কি বৈধ ?

$[(A \supset B) . A] \supset B$ —এ বচনটি কি স্বতসত্য ?

'$(A \supset B) . A$' —কি 'B'-কে প্রতিপাদন করে ?

উত্তর :

এ প্রশ্নের উত্তর পেতে পারি এভাবে। 'ব' ও 'ভ'-এর নিষেধকে সংযুক্ত করে পাই

$$(A \supset B) . A . \sim B$$

এবং আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে ও সত্যসারণী গঠন করে পাই যথাক্রমে

$$(A \supset B) \cdot A \cdot \sim B$$

$$(1 \supset B) \cdot 1 \cdot \sim B \qquad (0 \supset B) \cdot 0 \cdot \sim B$$

$$B \cdot \sim B \qquad 0$$

$$0$$

$$(A \supset B) \cdot A \quad \sim B$$

$$(1 \supset 1) \cdot 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$(1 \supset 0) \cdot 1 \cdot 1 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$(0 \supset 1) \cdot 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$(0 \supset 0) \cdot 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

বিরুদ্ধ বাক্যটি স্বতমিথ্যা, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তি ও বাক্য বৈধ, প্রদত্ত প্রথম বাক্যটি দ্বিতীয় বাক্যকে প্রতিপাদন করে। আর একটি উদাহরণ।

প্রশ্ন : $(A \supset B) \cdot B \quad \therefore \quad A$ —এ যুক্তিটি কি বৈধ ?

উত্তর : হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ সংযুক্ত করে, এবং লব্ধ বাক্যের আনুক্রমিক দ্বিশাখী-করণ করে পাই

$$(A \supset B) \cdot B \cdot \sim A$$

$$(1 \supset B) \cdot B \cdot 0 \qquad (0 \supset B) \cdot B \cdot 1$$

$$0 \qquad 1 \cdot B \cdot 1$$

$$B$$

$$1 \quad 0$$

দক্ষিণ শাখার বাম প্রশাখা দেখলে বোঝা যায় বিরুদ্ধ বাক্যটি স্বতমিথ্যা নয় (লক্ষ কর যদি $A=0$, $B=1$ হয় তাহলে বিরুদ্ধ বাক্যটি সত্য), সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।

২. বাধক বাক্য

যুক্তি বাক্য (মানে বচন) নয়, কাজেই যুক্তির "বিরুদ্ধ বাক্য"-এর কথা বলা যায় না, যেমন বলা যায় না : "$(A \supset B) \cdot B \cdot \sim A$" হল "$(A \supset B) \cdot B \;\therefore\; A$"—এর বিরুদ্ধ বাক্য। কিন্তু যুক্তির ক্ষেত্রে আমরা "বাধক বাক্য" বা "বাধক দৃষ্টান্ত"-এর কথা বলতে পারি। কোনো যুক্তির হেতুবাক্য ("ব") ও সিদ্ধান্তের নিষেধ ("∼ভ") যুক্ত করে যে সত্য সংযৌগিক বাক্য পাওয়া যায় তাই যুক্তিটির বাধক বাক্য (counter example)। কোনো যুক্তির

"ব ∴ ভ"-এর অনুষঙ্গী "ব · ~ভ" যদি কোনো সত্যসর্তে সত্য হয় তাহলে বলব : যুক্তিটির বাধক বাক্য আছে, আর যদি দেখি কোনো ক্ষেত্রেই "ব · ~ভ" সত্য নয় তাহলে বলব : যুক্তিটির বাধক বাক্য নেই। বলা বাহুল্য, যে যুক্তির বাধক বাক্য, (সংক্ষেপে—বাধক,) আছে সে যুক্তি অবৈধ, আর যে যুক্তির বাধক সম্ভব নয় (বাধক বাক্যটি স্বতমিথ্যা) সে যুক্তি বৈধ। আমরা এমনও বলতে পারি—

কোনো যুক্তি "ব ∴ ভ" বৈধ

এ কথার অর্থ

যুক্তিটির বাধক বাক্য নেই।

একটা উদাহরণ। ধরা যাক

"রাম কবি"—মিথ্যা, "রাম মানুষ"—সত্য, (তাহলে)

"রাম কবি ⊃ রাম মানুষ"—সত্য

এখন, (রাম কবি ⊃ রাম মানুষ) · রাম মানুষ ∴ রাম কবি

এ যুক্তির বাধক হল :

(রাম কবি ⊃ রাম মানুষ) · রাম মানুষ · ~রাম কবি।*

লক্ষণীয় এ বাক্যটি সত্য। আমরা অঙ্গবাক্যগুলির যে যে সত্যমূল্য ধরে নিয়েছি সে মূল্য অনুসারে

(রাম কবি ⊃ রাম মানুষ) · রাম মানুষ · ~রাম কবি

$(\quad 0 \supset 1 \quad) \cdot \quad 1 \quad \cdot 1$

$1 \cdot 1 \cdot 1$

1

বাধক আছে বলে প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।

আমরা দেখলাম, যুক্তির ক্ষেত্রে বিরুদ্ধ বাক্য (বা বচন)-এর কথা বলা যায় না, ঠিক ; কিন্তু বাধক বাক্যের কথা বলা যায়। আরও দেখলাম, কোনো যুক্তির বাধক দেখাতে পারলেই যুক্তিটির অবৈধতা প্রমাণ হয়ে যায়।

এখন, বাধক প্রদর্শন করতে হলে কোনো "ব · ~ভ" আকারের বাক্য বস্তুত গঠন করার দরকার নেই ; কিভাবে বাধক গঠন করা সম্ভব তা উল্লেখ করলেই চলে। যুক্তির অঙ্গবাক্যগুলি যে যে সত্যমূল্য গ্রহণ করলে "ব · ~ভ" সত্য হয় সে সত্যমূল্য উল্লেখ করলেই বাধক প্রদর্শনের কাজ হয়ে যায়। যথা, আমরা দেখেছি

"$(A \supset B) \cdot B \therefore A$"—এ যুক্তির বাধক সম্ভব, সম্ভব যদি

'A' মিথ্যা ও 'B' সত্য হয়।

কাজেই বলতে পারি $A=0$, $B=1$ হলেই উক্ত যুক্তির বাধক পাওয়া যায়। "বাধক" কথাটি ব্যাপক অর্থে ব্যবহার করে, যে সত্যমূল্য বিন্যাসে বাধক বাক্য গঠিত হতে পারে সে বিন্যাসকেই বাধক বলে উল্লেখ করা যায়। যথা বলা যায়, উক্ত যুক্তির বাধক হল

'A', 'B'-এর 01 সত্যমূল্য (যথাক্রমে)।

* এটি বাধক বাক্য, কেননা বাক্যটি সত্য।

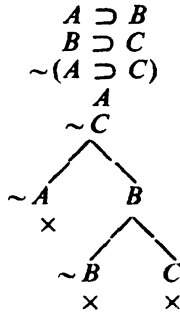
লক্ষণীয় অঙ্গগুলি যে সত্যমূল্য গ্রহণ করলে বাধক গঠিত হয় সে মূল্যসমষ্টিকেই এখানে বাধক বলে উল্লেখ করার প্রস্তাব করা হয়েছে।

৩. সত্যশাখী : কাণ্ডবাক্য ও শাখাবাক্য

উপরে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ও সত্যসারণীর সাহায্যে বিরুদ্ধ অসিদ্ধি (ও বিরুদ্ধ সিদ্ধি) প্রদর্শন করে বৈধতা পরীক্ষা করা হয়েছে। এখন আমরা আর একটি বৈধতা পরীক্ষণ-পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি। এ পদ্ধতিও বিরুদ্ধ অসিদ্ধি-পদ্ধতির এক বিশেষ রূপ। অন্যান্য বিরুদ্ধ অসিদ্ধির মত, আলোচ্য পদ্ধতিতেও কোনো যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত, বা প্রাকল্পিক বাক্যের বিরুদ্ধ দৃষ্টান্ত, সম্ভব কি অসম্ভব তা নির্ণয় করার চেষ্টা করা হয়। পরে দেখতে পাব, পদ্ধতিটি আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ বা সত্যসারণী পদ্ধতির চেয়ে অনেক বেশী সরল।

আলোচ্য পদ্ধতিকে সত্যশাখী পদ্ধতি বলে অভিহিত করা হয়। কেননা এ পদ্ধতিতে বিরুদ্ধ অসিদ্ধি (বা সিদ্ধি) প্রদর্শন একটি শাখীর (বা বৃক্ষের) আকার পরিগ্রহ করে—যে বৃক্ষের উপরদিকে কাণ্ড নিচের দিকে শাখা। যথা

$$A \supset B, B \supset C \quad \therefore \quad A \supset C$$

এ যুক্তিটির বৈধতা পরীক্ষার জন্য যে সত্যশাখী গঠন করা দরকার তা নিম্নোক্ত রূপ পরিগ্রহ করবে।

কি করে এ শাখীটি গঠিত হয় তা অচিরেই বোঝা যাবে। আপাতত আলোচ্য পদ্ধতির একটি বৈশিষ্ট্য লক্ষ কর। সত্যসারণীর বা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণের সাহায্যে বিরুদ্ধ অসিদ্ধি প্রদর্শন করতে হলে অঙ্গবাক্যের সত্যমূল্য উল্লেখ করার দরকার। কিন্তু আলোচ্য পদ্ধতিতে সত্যমূল্য উল্লেখ করা হয় না, উল্লেখ করা হয় অঙ্গবাক্য বা অঙ্গবাক্যের নিষেধ, শেষ পর্যন্ত—বর্ণপ্রতীক ও বর্ণপ্রতীকের নিষেধ, 'p', '$\sim r$' ইত্যাদি। যথা, লক্ষ করে থাকবে, উক্ত সত্যশাখীতে কোথাও সত্যমূল্য '1', '0'-এর উল্লেখ নেই।

অন্যান্য বিরুদ্ধ অসিদ্ধি পদ্ধতির মত, সত্যশাখী পদ্ধতিরও প্রথম পর্যায় হল হেতুবাক্য ('ব') ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ ('~ভ'-এর) একত্রীকরণ। তবে আলোচ্য 'ব', '~ভ' কোনো সংযৌগিকের আকারে গ্রথিত হয় না, কেবল একত্রিত হয়। "একত্রিত হয়" মানে উপর থেকে নিচে পর পর লিখিত হয়। হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ ভিন্ন ভিন্ন পঙ্‌ক্তিতে পর পর লিখিত হয়। উপরোক্ত সত্যশাখীর প্রথম তিনটি পঙ্‌ক্তি দ্রষ্টব্য। সাধারণ যুক্তিতেও

হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত পর পর লিখিত হয় এবং হেতুবাক্যগুলির মধ্যস্থ "এবং", (" · ") অগ্রাহ্য করা হয়। যথা

$(A \equiv B) \cdot (B \equiv C) \cdot (C \equiv D)$

$\therefore \; A \equiv D$ -এর বদলে লেখা হয়

$$A \equiv B$$
$$B \equiv C$$
$$C \equiv D$$
$$\therefore A \equiv D$$

প্রচলিত রীতি হল এই ঃ দুই বা ততোধিক হেতুবাক্য পর পর লিখিত হলে ধরে নিতে হবে —এরা একই সংযোগিকের বিভিন্ন অঙ্গ। সত্যশাখী গঠন করতে হলে উক্ত রীতি মেনে নিতে হবে ; শুধু তাই নয়—সিদ্ধান্তের নিষেধকেও একটি সংযোগী বলে গণ্য করতে হবে, এবং হেতু-বাক্যের নিচে লিখতে হবে। যথা, উপরোক্ত শাখীটির প্রথম তিন পঙ্‌ক্তিতে যা লিখিত আছে তা

$$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(A \supset C)$$

-এরই বিকল্প রূপ। আবার, যে রীতিতে সত্যশাখী গঠন করা হয় সে রীতি অনুসারে একই শাখার বিভিন্ন পঙ্‌ক্তিতে যে যে বাক্য লিখিত হয় তার প্রত্যেকটি একই সংযোগিকের বিভিন্ন অঙ্গ বলে গণ্য। যথা

$$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(A \supset C) \cdot A \cdot \sim C \cdot B \cdot C$$

বাক্যটিই উক্ত সত্যশাখীর দক্ষিণ শাখায় ব্যক্ত হয়েছে।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, সত্যশাখী গঠন করতে হলে সর্বপ্রথম হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ একত্রিত করতে হবে। যথা, সত্যশাখী দিয়ে "$A \supset B$, $B \supset C \;\therefore\; A \supset C$"—এ যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে গিয়ে প্রথমেই পাব ঃ

$$A \supset B$$
$$B \supset C$$
$$\sim(A \supset C)$$

এ তিনটি বাক্য আমাদের গঠনীয় সত্যশাখীর কাণ্ড। এ কাণ্ডের ভিত্তিতে শাখীটি ক্রমশ বর্ধিত হবে, শাখা প্রশাখা বিস্তার করবে। উক্তরূপ তালিকার প্রত্যেকটি বাক্যকে কাণ্ডবাক্য বলে অভিহিত করতে পারি। কাণ্ডের নিম্নভাগে যে সব বাক্য যুক্ত হবে সেগুলিকে শাখাবাক্য বলে অভিহিত করব।

কাণ্ড গঠন করার পর কাণ্ডের অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে কিনা তা বিচার করা হয়। প্রথমে তর্কের খাতিরে ধরে নেওয়া হয় যে প্রত্যেকটি কাণ্ডবাক্যই সত্য। যদি পরে দেখা যায়, কাণ্ডবাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে না তাহলে পূর্বকল্পনা পরিত্যাগ করে ঘোষণা করতে হবে ঃ না, বাক্যগুলি একসঙ্গে সত্য হতে পারে না, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ ("ব · ~ভ" সত্য হতে পারে না, সুতরাং "ব ∴ ভ" বৈধ)।

এখন, কাণ্ডবাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে, প্রত্যেকটি বাক্য বিশ্লেষণ করে বলার দরকার ঃ বাক্যটি সত্য, সুতরাং এর অমুক (অমুক) অঙ্গ সত্য, অমুক (অমুক) অঙ্গনিষেধ সত্য।

৪. সমার্থক অনুমান

আমরা যে বিশ্লেষণের কথা বলতে যাচ্ছি তা এক প্রকারের অনুমান—অমাধ্যম অনুমান, আরও নির্দিষ্টভাবে বলতে গেলে—সমার্থক অনুমান। অমাধ্যম অনুমান—কেননা, এরূপ অনুমানে কেবল একটি হেতুবাক্য থেকে সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয়, আর সমার্থক অনুমান—কেননা এরূপ অনুমানে কোনো হেতুবাক্য থেকে হেতুবাক্যের-সমার্থক-বাক্য নিষ্কাশন করা হয়। সমার্থতার নিয়ম অনুসারে এরূপ বিশ্লেষণ বা অনুমান সম্ভব।

আমরা বলেছি সত্যশাখী গঠন করতে হলে কাণ্ডবাক্যগুলি বিশ্লেষণ করা দরকার, মানে —এদের থেকে সমার্থক সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা দরকার। কিন্তু যে কোনো সমার্থক বাক্য নিষ্কাশন করলে চলবে না, কেবল (হেতুবাক্যের) সমার্থক সংযৌগিক বা বৈকল্পিক বাক্য নিষ্কাশন করতে হবে। ধরা যাক, একটি কাণ্ড বাক্য হল ঃ "$\sim(A \vee B)$"। তাহলে, "$\sim(p \vee q)$" সম "$\sim p \cdot \sim q$"—এ সূত্র অনুসারে অনুমান করতে পারি

$$\sim(A \vee B)$$
$$\therefore \quad \sim A \cdot \sim B$$

যোজক "·" ব্যবহার না করে সংযৌগিক ব্যক্তকরণ

আমরা এমন সংকেতলিপি কল্পনা করছি—যে লিপিতে সংযোগীগুলিকে পাশাপাশি অনুভূমিক আকারে না লিখে উল্লম্বভাবে (খাড়াখাড়ি ভাবে) লেখা হয় এবং সিদ্ধান্তসূচক "∴" চিহ্নটি অনুক্ত রাখা হয়। এ কল্পিত সংকেতলিপিতে উক্ত যুক্তিটি নিম্নোক্ত রূপ পরিগ্রহ করবে।

$$\sim(A \vee B)$$
$$\sim A$$
$$\cdot$$
$$\sim B$$

আরও কল্পনা করতে পারি, এ সংকেতলিপির বিধান অনুসারে—দুই বা ততোধিক বাক্য পর পর বিভিন্ন পঙ্‌ক্তিতে লিখলে বুঝতে হবে বাক্যগুলি সংযোগী। এ বিধান মেনে নিলে "·"-এরও আর প্রয়োজন থাকে না। সত্যশাখী পদ্ধতির একটি বৈশিষ্ট্য হল এই ঃ এ পদ্ধতিতে উক্ত কল্পিত লিপিতে সংযৌগিক বাক্য ব্যক্ত করা হয়। যথা

$\sim(A \vee B)$, $\therefore \sim A \cdot \sim B$ -এর পরিবর্তে লেখা হয় ঃ

$$\sim(A \vee B)$$
$$\sim A$$
$$\sim B$$

আবার, "$\sim(p \supset q)$" সম "$p \cdot \sim q$"। সুতরাং অনুমান করতে পারি

$$\begin{array}{c}\sim(A \supset B)\\ A\\ \sim B\end{array}$$

তারপর, "$p \cdot q$" সম "$p \cdot q$"। সুতরাং অনুমান করা যায়

$$\begin{array}{c}A \cdot B\\ A\\ B\end{array}$$

যে সব সমার্থতা সূত্র অনুসারে সমার্থক নিষ্কাশন করা হল সেগুলি যুক্তিবিধির আকারে সংগৃহীত হল।

যুক্তিবিধি

$$\begin{array}{c}\sim(p \vee q)\\ \sim p\\ \sim q\end{array} \qquad \begin{array}{c}\sim(p \supset q)\\ p\\ \sim q\end{array} \qquad \begin{array}{c}p \cdot q\\ p\\ q\end{array}$$

সত্যশাখী গঠন সম্বন্ধে আর একটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম। কোনো বাক্যকে নিষেধ করে যুগ্ম ঢেউ পাওয়া গেলে

যুগ্ম ঢেউ বর্জন করতে হবে।

যথা

$$\left.\begin{array}{c}\sim(\sim A \vee \sim B)\\ \sim\ \sim A\\ \sim\ \sim B\end{array}\right] \text{-এর পরিবর্তে লিখতে হবে } \left[\begin{array}{c}\sim(\sim A \vee \sim B)\\ A\\ B\end{array}\right.$$

যোজক "v" ব্যবহার না করে বৈকল্পিক ব্যক্তকরণ

সমার্থক অনুমানের আর একটি উদাহরণ। "$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$" —এ সূত্র অনুসারে অনুমান করতে পারি

$$\begin{array}{c}\sim(A \cdot B)\\ \therefore\ \sim A \vee \sim B\end{array}$$

কি করে যোজক "·" বাদ দিয়ে, কেবল দৈশিক বিন্যাসের বিশেষ রীতি মেনে সংযোগিক বাক্য ব্যক্ত করা যায় দেখেছি। সেরকম, যোজক "v" বাদ দিয়েও বৈকল্পিক বাক্য ব্যক্ত করা যায়। আমরা যে সংকেতলিপি কল্পনা করছি তার একটা বিধান হল : দুটি বাক্য একই পঙ্‌ক্তিতে অনুভূমিক আকারে, পাশাপাশি, লিখলে বুঝতে হবে বাক্য দুটি বিকল্প, একই বৈকল্পিকের অঙ্গ। আর কোনো বাক্যের নিচে একটা বড় মাপের উল্টানো "v", নিম্নমুখী দ্বিশূল বা দ্বিমুখী শাখা দিয়ে তার নিম্নপ্রান্তে বিকল্প দুটি লেখা হলে বুঝতে হবে ঐ বাক্য থেকে বিকল্প দুটি নিঃসৃত হয়েছে॥ এ বিধান অনুসারে

$$\left.\begin{array}{c}\sim(A \cdot B)\\ \therefore \sim A \vee \sim B\end{array}\right] \text{ এ যুক্তিটি এভাবে ব্যক্ত করতে হবে: } \begin{array}{c}\sim(A \cdot B)\\ \diagup\ \diagdown\\ \sim A \quad \sim B\end{array}$$

বস্তুত উক্ত সংকেতলিপিতেই সত্যশাখী রচনা করা হয়। আর একটি সমার্থক অনুমান। "$p \supset q$" সম "$\sim p \vee q$" এ সূত্র অনুসারে অনুমান করা যায় (উক্ত সংকেতলিপিতে অনুমানটি ব্যক্ত হল) :

$A \supset B$

$\sim A \quad B$

আবার, "$p \vee q$" সম "$p \vee q$"। সুতরাং, উক্ত লিপি ব্যবহার করে, অনুমান করতে পারি

উপরে সমার্থক অনুমানের যে দৃষ্টান্ত দেওয়া হল সেগুলিতে যথাক্রমে নিম্নোক্ত যুক্তিবিধি অনুসৃত হয়েছে।

যুক্তিবিধি

বলা বাহুল্য, এ যুক্তিবিধিগুলি প্রয়োগ করার সময়ও যুগ্ম ঢেউ বর্জন করতে হবে। যথা

$\sim(\sim A \cdot \sim B)$ — $\sim\sim A \quad \sim\sim B$ -এর পরিবর্তে লিখতে হবে : $\sim(\sim A \cdot \sim B)$ — $A \quad B$

এতক্ষণ আমরা যে অনুমানের কথা বলেছি তা হল অমাধ্যম অনুমান। সত্যশাখীতে মাধ্যম অনুমানের স্থান নেই। আবার, অমাধ্যম অনুমান দু রকম। প্রথমত, এক প্রকারের অমাধ্যম অনুমানের হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত সমার্থক—এরূপ অনুমানকে আমরা সমার্থক অনুমান বলে উল্লেখ করেছি। আর এক প্রকারের অমাধ্যম অনুমানে হেতুবাক্য সিদ্ধান্তের প্রতিপাদক, কিন্তু সমার্থক নয়। যথা : $A \cdot B \therefore A$, $A \cdot B \therefore B$। সত্যশাখীতে এরূপ অনুমানেরও স্থান নেই। বলা বাহুল্য, এ বিভাগে অনুমান বলতে বুঝছি সমার্থক বাক্যে রূপান্তর—আরও বিশদভাবে, সমার্থক সংযৌগিক বা বৈকল্পিক বাক্যে রূপান্তর।

সাধারণত আমরা : $A \cdot B \therefore A \cdot B$, $A \vee B \therefore A \vee B$—এ জাতীয় অনুমান করার প্রয়োজন বোধ করি না। কিন্তু সত্যশাখী গঠন করতে এরূপ অনুমানের সাহায্য নিতে হয়। যে অনুমানের কথা এ বিভাগে বলেছি তার প্রধান লক্ষ্য হল প্রত্যেক বাক্যকে (কাণ্ডবাক্য ও শাখাবাক্যকে) বিশ্লেষণ করে এর প্রত্যেকটি আণবিক অঙ্গ বা আণবিক অঙ্গের নিষেধ পৃথক-ভাবে দেখানো। কাজেই সত্যশাখী প্রসঙ্গে যা অনুমান বলে কথিত হয়েছে তাকে বিশ্লেষণ বলে বর্ণনা করলেই আলোচ্য অনুমানের বা রূপান্তরের যথার্থ পরিচয় দেওয়া হয়।

৫. সত্যশাখী গঠন

ধরা যাক, আমাদের সমস্যা হল : সত্যশাখী গঠন করে

$$A \supset B,\ B \supset C \therefore A \supset C$$

এ যুক্তির বৈধতা নির্ণয়। এটি আমাদের প্রথম উদাহরণ। প্রথম পর্যায়ে হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ একত্রিত করে কাণ্ডবাক্য গঠন করা হল।

উদাহরণ ১ (১ম পর্যায়)

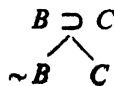
1. $A \supset B$
2. $B \supset C$
3. $\sim(A \supset C)$

এ বাক্য সমষ্টির প্রত্যেকটি বাক্যকে সত্য বলে ধরে নিয়ে তার থেকে যা জানা যায় তা উল্লেখ করতে হবে। কি ক্রমে বাক্যগুলি বিশ্লেষণ করতে হবে—প্রথমে কোন্‌টি তারপর কোন্‌টি—তার কোনো বাঁধাধরা নিয়ম নেই। বর্তমান ক্ষেত্রে সিদ্ধান্তের নিষেধ নিয়ে বিশ্লেষণ সুরু করা যাক। শেষোক্ত বাক্য সত্য হলে (মানে '$A \supset C$' মিথ্যা হলে) অবশ্যই 'A' সত্য ও 'C' মিথ্যা, অর্থাৎ অনুমান করতে পারি : $\sim(A \supset C) \therefore A \cdot \sim C$। প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে সিদ্ধান্তটি লিপিবদ্ধ করে পাই :

উদাহরণ ১ (২য় পর্যায়)

1. $A \supset B$
2. $B \supset C$
√3. $\sim(A \supset C)$
4. A [3]
5. $\sim C$ [3]

সর্বশেষ কাণ্ডবাক্যটির বাম পাশে একটা টিক্ চিহ্ন (√) দিয়ে বোঝানো হয়েছে, বাক্যটিকে বিশ্লেষণ করা হয়ে গেছে—'এ বাক্য সত্য' এ তথ্য থেকে যা সিদ্ধান্ত করা যায় তা লিপিবদ্ধ হয়েছে। আর ডান পাশে বন্ধনীর মধ্যে আছে কি করে 4 ও 5 সংখ্যক বাক্য পাওয়া গেল সে সম্বন্ধে "ভাষ্য"। যথা "[3]" মানে : 3 সংখ্যক বাক্য থেকে নিষ্কাশিত। পরবর্তী পর্যায়গুলিতেও ডান ধারে এরূপ ভাষ্য উল্লেখ করা হবে। এখনও শাখীটি একাধিক শাখা বিস্তার করে নি—কাণ্ড থেকে কেবল একটি ঋজু শাখার উদ্‌গম হয়েছে। এবার আর একটি কাণ্ডবাক্য নেওয়া যাক। দ্বিতীয়টি নেওয়া হল। বাক্যটি সত্য হলে 'B' মিথ্যা অথবা 'C' সত্য। মানে, অনুমান করতে পারি : $B \supset C \therefore \sim B \vee C$, প্রস্তাবিত সংকেত-লিপিতে—

```
  B ⊃ C
   / \
 ~B   C
```

দ্বিতীয় পর্যায়ে যা পেয়েছি তার নিচে উক্ত সিদ্ধান্ত, দ্বিশূল সহ, স্থাপন করে* পাই :

উদাহরণ ১ (৩য় পর্যায়)

1. $A \supset B$
√2. $B \supset C$
3. $\sim(A \supset C)$
4. A
5. $\sim C$
   ╱╲
6. $\sim B \quad C$ [2]

শাখা দুটি '$\sim C$'-এর নিচে স্থাপিত হয়েছে। এখন, এরূপ সংস্থাপনের যৌক্তিকতা সম্পর্কে সংশয় হতে পারে, মনে হতে পারে : শাখা দুটি ত '$B \supset C$'-এর নিচেই সন্নিবিষ্ট হওয়া উচিত ছিল ; '$\sim B$', 'C'—এদের ত '$\sim C$' থেকে পাই নি, তাহলে এদের '$\sim C$' তলাতে উল্লেখ করব কেন ? উত্তর :

কোনো হেতুবাক্য থেকে নিষ্কাশিত সিদ্ধান্ত অন্য বাক্যের নিচে উল্লেখ করলেও সত্যশাখীর যৌক্তিকতা ক্ষুণ্ণ হয় না। কেন হয় না, বুঝে নাও। সত্যশাখীতে যে বাক্যগুলি পর পর লিপিবদ্ধ হয় সেগুলি একই সংযৌগিকের অঙ্গ, এবং আমরা জানি, সংযৌগিকের অঙ্গগুলি ক্রমান্তরযোগ্য। এখন, গঠণীয় সত্যশাখীটির দ্বিতীয় পর্যায়ে আছে নিম্নোক্ত সংযৌগিক বাক্যটি

$$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(A \supset C) \cdot A \cdot \sim C\dagger$$

আর তৃতীয় পর্যায়ে আছে

(১) $(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(A \supset C) \cdot A \cdot \sim C \cdot (\sim B \vee C)\dagger$

এখন "$\sim B \vee C$"-কে সরাসরি "$B \supset C$"-এর নিচে স্থাপন করতাম তাহলে পেতাম

(২) $(A \supset B) \cdot \sim(A \supset C) \cdot A \cdot \sim C \cdot (B \supset C) \cdot (\sim B \vee C)$

(১) আর (২) সমার্থক, কাজেই (২)-এর পরিবর্তে (১) লেখা যায় ; মানে—তৃতীয় পর্যায়ে বাক্যগুলিকে নিম্নোক্ত প্রথম প্রকারে বিন্যস্ত না করে দ্বিতীয় প্রকারে বিন্যস্ত করা যায় :

$A \supset B$ $\sim(A \supset C)$ A $\sim C$ $B \supset C$ ╱╲ $\sim B \quad C$	$A \supset B$ $B \supset C$ $\sim(A \supset C)$ A $\sim C$ ╱╲ $\sim B \quad C$	['$B \supset C$' থেকে '╱╲' পেলাম ঠিক ; $\sim B \quad C$ কিন্তু, দেখা গেল, এ শাখা দুটি '$B \supset C$'-এরই তলদেশে স্থাপন করার প্রয়োজন নেই।]

যে রীতিতে সত্যশাখী গঠন করা হয় সে রীতি অনুসারে : কোনো কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করে যা পাওয়া যায় তাকে সত্যশাখী যে পর্যায়ে পৌঁছেছে সে পর্যায়ের সর্বনিম্ন বাক্যের তলায় স্থাপন করতে হয়।

---

* এবং বিশ্লেষিত বাক্যটিকে, 2-কে, '√' দিয়ে চিহ্নিত করে

† শাখীটির অঙ্গবাক্যগুলি উল্লম্বভাবে না লিখে অনুভূমিক আকারে লিখে, এবং বাক্যগুলির মধ্যে যে যোজক ("·") প্রচ্ছন্নভাবে থাকে তা দেখিয়ে সংযৌগিকটি পাওয়া গেল।

এবার আমাদের মূল উদাহরণের তৃতীয় পর্যায়ে ফিরে যাওয়া যাক। এ পর্যায়ে দুটি শাখা (সংযৌগিক বাক্য) পেলাম। শাখা দুটি* পৃথকভাবে দেখানো হল।

$$\begin{array}{ccc} A \supset B & \qquad & A \supset B \\ B \supset C & & B \supset C \\ \sim(A \supset C) & & \sim(A \supset C) \\ A & & A \\ \sim C & & \sim C \\ / & & \backslash \\ \sim B & & C \end{array}$$

ডানদিকের শাখাটি* লক্ষ কর। এ শাখায় আছে নিম্নোক্ত অঙ্গ(সংযোগী)গুলি ঃ

$$A \supset B, B \supset C, \sim(A \supset C), A, \sim C, C$$

বলা বাহুল্য, এ অঙ্গগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে না, কেননা 'C' এবং '$\sim C$' একসঙ্গে সত্য হতে পারে না। এ শাখায় যে বাক্যগুলি আছে সেগুলি, বা এদের মধ্য থেকে কোনো বাক্য, নিয়ে আলোচ্য যুক্তির বাধক বাক্য গঠন করা যায় না ; মানে—বলা যায় না যে আলোচ্য যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ যুগপৎ সত্য। কাজেই এ শাখা ধরে আর বাধক বাক্য সন্ধানের পথ নেই, কাজেই এ পথ বন্ধ করে দেওয়া যায়। কেননা, এ শাখার সঙ্গে আর যা-ই সংযুক্ত হোক না কেন, সংযোগী 'C', '$\sim C$' আছে বলে, শাখাটি** কখনও সত্য বলে গণ্য হতে পারে না। উক্ত পথটি বন্ধ হয়ে গেল, শাখার অগ্রভাগটি আর বর্ধিত হতে পারে না—এ কথা বোঝাবার জন্য শাখাগ্রে একটা "×" চিহ্ন স্থাপন করব। এভাবে শাখাগ্র বন্ধ করার রীতির কথা মনে রাখবে, মনে রাখবে

> যদি কোনো শাখায় কোনো বাক্য এবং বাক্যটির-নিষেধের উপস্থিতি দেখা যায় তাহলে শাখাটির তলদেশে '×' চিহ্ন দিতে হবে। এবং সত্যশাখীটি আরও পরিবর্ধিত করতে হলে '×'-চিহ্নিত শাখাটি অগ্রাহ্য করতে হবে।

তৃতীয় পর্যায়ে যে শাখীটি পেয়েছি তার দক্ষিণ শাখা বন্ধ করে দিয়ে পাই

উদাহরণ ১ (৪র্থ পর্যায়)

$$\begin{array}{ll} 1. & A \supset B \\ 2. & B \supset C \\ 3. & \sim(A \supset C) \\ 4. & A \\ 5. & \sim C \\ & \quad / \quad \backslash \\ 6. & \sim B \quad\; C \\ & \qquad\quad\; \times \end{array}$$

* আমরা কাণ্ড ও শাখার কথা বলেছি। এখন, কাণ্ডের প্রথম থেকে শাখাগ্র—এ সবটিকে শাখা বলে বর্ণনা করা হচ্ছে।

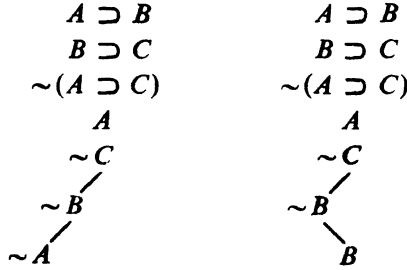
** 'শাখাটি' মানে—এ শাখাস্থিত বাক্যগুলি দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বাক্যটি।

এ পর্যায়ে যে শাখাটি মুক্ত সেটি ধরে অগ্রসর হওয়া যাক। যদি আলোচ্য যুক্তির কোনো বাধক বাক্য থাকে, তাহলে তা এ শাখাতেই পাওয়া যাবে। এ পর্যায়ে এখনও একটি কাণ্ড বাক্য (প্রথম বাক্যটি) অবিশ্লেষিত আছে। এ বাক্যটি সত্য হলে অবশ্যই 'A' মিথ্যা অথবা 'B' সত্য, মানে অনুমান করতে পারি : $A \supset B \therefore \sim A \vee B$। চতুর্থ পর্যায়ের মুক্ত শাখার নিচে এ সিদ্ধান্ত স্থাপন* করে পাই

উদাহরণ ১ (৫ম পর্যায়)

```
√1.      A ⊃ B
 2.      B ⊃ C
 3.    ~(A ⊃ C)
 4.        A
 5.      ~ C
         /  \
 6.   ~B     C
     /  \    ×
 7. ~A   B          [1]
```

এখন যে দুটি শাখা পেলাম সেগুলি আলাদা আলাদাভাবে দেখানো হল

```
    A ⊃ B            A ⊃ B
    B ⊃ C            B ⊃ C
  ~(A ⊃ C)         ~(A ⊃ C)
      A                A
     ~C               ~C
     /                /
   ~B               ~B
   /                  \
 ~A                    B
```

প্রথম শাখায় আছে নিম্নোক্ত সংযোগীগুলি

$$A \supset B, B \supset C, \sim(A \supset C), A, \sim C, \sim B, \sim A$$

এ সংযোগীগুলি একসঙ্গে সত্য হতে পারে না—'A' ও '$\sim A$' আছে বলে। কাজেই এ শাখাতেও বাধক বাক্য পাওয়া গেল না—দেখানো গেল না যে হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত-নিষেধ যুগপৎ সত্য হতে পারে। এ শাখা পথে বাধক বাক্য পাওয়া সম্ভব নয়, শাখাটি সত্য নয়, এ কথা বোঝাবার জন্য শাখাগ্রে একটি '×' স্থাপন করার দরকার। দ্বিতীয় শাখাটির অঙ্গবাক্যগুলি হল :

$$A \supset B, B \supset C, \sim(A \supset C), A, \sim C, \sim B, B$$

স্পষ্টতই এ বাক্যগুলিও একসঙ্গে সত্য হতে পারে না, কাজেই এ শাখার শেষেও '×' দেবার দরকার।

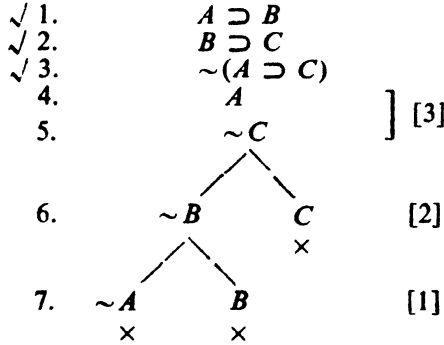
* এবং প্রথম কাণ্ডবাক্য 1-কে '√' দিয়ে চিহ্নিত করে

বোঝা গেল, কোনো শাখাপথেই আলোচ্য যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত পাওয়া সম্ভব নয়। কাজেই সিদ্ধান্ত করা যায় : আলোচ্য যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত নেই, সুতরাং যুক্তিটি বৈধ। এবার শেষোক্ত শাখা দুটির নিচে '×' স্থাপন করলে পূর্ণাঙ্গ সত্যশাখীটি পাওয়া যাবে। শাখীটির পূর্ণাঙ্গ রূপ—

উদাহরণ ১ (৬ষ্ঠ ও সর্বশেষ পর্যায়)

√ 1. $A \supset B$
√ 2. $B \supset C$
√ 3. $\sim(A \supset C)$
4. A] [3]
5. $\sim C$

6. $\sim B$ C [2]
(×)

7. $\sim A$ B [1]
(×) (×)

উদাহরণ ২

সমস্যা : $(\sim A \vee B) \supset C \quad \therefore \quad C \vee \sim A$ —এ যুক্তিটি কি বৈধ ?

সমাধান :

প্রথম পর্যায়

1. $(\sim A \vee B) \supset C$
2. $\sim(C \vee \sim A)$

এ পর্যায়ে কেবল হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ পর পর উল্লেখ করা হল। এবং ধরে নেওয়া হল উক্ত সংযোগী দুটির উভয়ই সত্য ('ব'ও সত্য '~ভ'ও সত্য)।

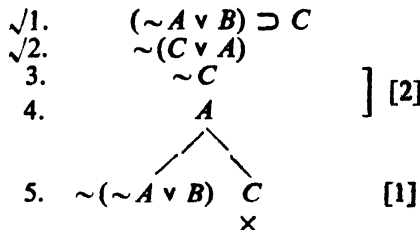
দ্বিতীয় পর্যায়

1. $(\sim A \vee B) \supset C$
√2. $\sim(C \vee \sim A)$
3. $\sim C$] [2] [যুগ্ম ঢেউ বর্জন করা হল]
4. A

"$\sim(p \vee q) \quad \therefore \quad \sim p \cdot \sim q$" এ যুক্তিবিধি অনুসারে এখানে (2) থেকে সিদ্ধান্ত করা হয়েছে। পরবর্তী পর্যায়ে প্রথম কাণ্ড বাক্যটি বিশ্লেষণ করা হল।

তৃতীয় পর্যায়

√1. $(\sim A \vee B) \supset C$
√2. $\sim(C \vee A)$
3. $\sim C$] [2]
4. A

5. $\sim(\sim A \vee B)$ C [1]
(×)

এখানে (1) থেকে (5) নিষ্কাশন করা হয়েছে : $p \supset q \therefore \sim p \vee q$—এ যুক্তিবিধি অনুসারে। আর স্ববিরোধিতা দেখা দিয়েছে বলে দক্ষিণ শাখাপথটি বন্ধ করে দেওয়া হল ('$\sim C$' এবং 'C'-এর উপস্থিতি লক্ষণীয়)। বাক্য বিশ্লেষণ এখনও সম্পূর্ণ হয় নি ; পঞ্চম পঙ্‌ক্তির শাখাবাক্য "$\sim(\sim A \vee B)$"-কে বিশ্লেষণ করার দরকার। পরবর্তী পর্যায়ে এ বাক্যটিকে বিশ্লেষণ করা হল।

চতুর্থ পর্যায়

```
√1.      (~A ∨ B) ⊃ C
√2.      ~(C ∨ ~A)
 3.          ~C
 4.           A
            /   \
√5. ~(~A ∨ B)    C
 6.       A      ×      [5]   [ যুগ্ম ঢেউ বর্জন করা হল ]
 7.      ~B             [5]
```

এখন এমন কোনো কাণ্ডবাক্য বা শাখাবাক্য নেই যা বিশ্লেষণ করার দরকার। মনে রাখবে—সব কাণ্ডবাক্য ও শাখাবাক্যের বিশ্লেষণের নিষ্পত্তি হলে, অর্থাৎ সব কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষিত হলে এবং সব শাখার শেষ প্রান্তে কেবল আণবিক বাক্য ও আণবিক বাক্যের নিষেধে পৌঁছালে, বুঝতে হবে সত্যশাখী গঠনের কাজ সম্পূর্ণ হয়েছে। বলা বাহুল্য, উক্ত শাখীটি আলোচ্য যুক্তির পূর্ণাঙ্গ সত্যশাখী। লক্ষণীয় এ সত্যশাখীর বামধারের শাখাটি মুক্ত আছে। এ কথার তাৎপর্য : আলোচ্য যুক্তিটির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ একসঙ্গে সত্য হতে পারে, মানে—একসঙ্গে হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে। এ কথার অর্থ : যুক্তিটির বাধক দৃষ্টান্ত সম্ভব। তার মানে যুক্তিটি অবৈধ।

আমরা বলেছি, আলোচ্য যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত সম্ভব। কি করে সম্ভব তা বুঝে নাও। মুক্ত শাখাটিতে আছে নিম্নোক্ত সংযোগীগুলি (নিচের দিক থেকে)—

$$\sim B,\ A,\ A,\ \sim C$$

এ তালিকায় যৌগিক* অঙ্গবাক্যের (পঞ্চম পঙক্তির বামধারের শাখাবাক্য, ও কাণ্ডবাক্যগুলির) কোনো উল্লেখ নেই। এ প্রসঙ্গে এরূপ বাক্যের উল্লেখের কোনো দরকার নেই, কেননা এসব বাক্যকে বিশ্লেষণ করেই অযৌগিক বাক্যগুলি পেয়েছি। সাধারণভাবে বলা যায় : কোনো শাখায় অবস্থিত সংযোগীগুলি (কাণ্ডবাক্য ও নিষ্কাশিত বাক্য) যুগপৎ সত্য হতে পারে কি পারে না তা নির্ণয় করতে হলে কেবল শাখাস্থিত আণবিক বাক্য বা এদের নিষেধ যুগপৎ সত্য হতে পারে কিনা তা বিচার করলেই চলে, যৌগিক* বাক্যগুলি অগ্রাহ্য করা যায়। এখন আলোচ্য শাখাতে আছে : $\sim B, A, A, \sim C$—এ কথা এভাবে ব্যক্ত করতে পারি : এ মুক্ত শাখাটিতে আছে—

$$A,\ \sim B,\ \sim C$$

---

* এখানে 'যৌগিক' বলতে বুঝছি "$\sim$" ছাড়া অন্য যোজক দিয়ে গঠিত বাক্য।

(দুটি 'A'-এর একটি অগ্রাহ্য করা হল, কেননা "$A \cdot A$" সম "A", আর সংযোগীগুলিকে ক্রমান্তরকরণ করে সাজানো হল)। এ বাক্যগুলি সত্য হলে, অর্থাৎ 'A' সত্য, 'B' মিথ্যা ও 'C' মিথ্যা হলে প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে। তাহলে এ যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত হল :

'ABC'-এর 100 সত্যমূল্য (যথাক্রমে)।

এ মূল্য আরোপ করলে দেখবে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

A	B	C	$(\sim A \vee B) \supset C$	$C \vee \sim A$
1	0	0	$(0 \quad \vee 0) \supset 0$	$0 \vee 0$
			1	0

আলোচ্য যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত যে সম্ভব তা আর একভাবে দেখানো হল। হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধকে সংযোগী হিসাবে সংযুক্ত করে উক্ত সত্যমূল্য আরোপ করা হল।

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & [(\sim A \vee B) \supset C] \cdot \sim(C \vee \sim A) \\ 1 & 0 & 0 & [(0 \quad \vee 0) \supset 0] \cdot \sim(0 \vee 0) \\ & & & 1 \cdot 1 \\ & & & 1 \end{array}$$

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যায়

যে যুক্তির সত্যশাখীতে কোনো মুক্ত শাখা নেই সে যুক্তি বৈধ,

যে যুক্তির সত্যশাখীতে অন্তত একটি মুক্ত ('×'-মুক্ত) শাখা আছে সে যুক্তি অবৈধ।

আর দেখা গেল

> বাধক দৃষ্টান্ত নির্দেশ করতে হলে—মুক্ত শাখাতে যে একাঙ্গ বাক্যগুলি আছে তাদের সত্যমূল্য (অনিষেধিত বাক্যের মূল্য 1, আর নিষেধিত বাক্যের মূল্য 0) একত্রিত করতে হয়।

যথা, আমরা বলেছি দ্বিতীয় উদাহরণের যুক্তিটির বাধক দৃষ্টান্ত হল : 'ABC'-এর সত্যমূল্য 100 ॥

উদাহরণ ৩

যুক্তি : $A \supset B,\ B \therefore A$

সত্যশাখী :

√1. $A \supset B$
2. B
3. $\sim A$

$\sim A$ ⟋⟍ B [1]

উদাহরণ ৪

যুক্তি : $\sim C \supset D \quad \therefore \quad D \supset C$

সত্যশাখী :

√1. $\sim C \supset D$
√2. $\sim(D \supset C)$
3. D] [2]
4. $\sim C$]
5. C ⟋⟍ D [1]
×

এখানে দুটি শাখাই মুক্ত
∴ প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।
যুক্তিটির বাধক দৃষ্টান্ত হল :
'AB'-এর সত্যমূল্য 01 ॥

এখানে একটি শাখা মুক্ত
∴ প্রদত্ত যুক্তিটি অবৈধ।
যুক্তিটির বাধক দৃষ্টান্ত হল :
'CD'-এর সত্যমূল্য 01 ॥

(৩) সংখ্যক সত্যশাখীটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে একাধিক শাখায় একই বাধক দৃষ্টান্ত প্রদর্শিত হতে পারে। উপরে যে যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রদর্শিত হল তাদের সত্যশাখী লক্ষ করলে এ ধারণা হতে পারে যে কেবল এক বিশেষ মূল্যবিন্যাস নিয়েই কোনো যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত দেখানো যায়। এ ধারণা যে ভ্রান্ত নিম্নোক্ত উদাহরণটি লক্ষ করলেই তা বোঝা যাবে।

উদাহরণ ৫

যুক্তি : $A \vee B \quad \therefore \quad A \cdot B$

সত্যশাখী :

√1. $A \vee B$
√2. $\sim(A \cdot B)$
3. $\sim A \qquad \sim B$ [2]
4. $A \quad B \qquad A \quad B$ [1]
× ×

দুটি মুক্ত শাখায় দুটি ভিন্ন বাধক দৃষ্টান্ত দেখানো হয়েছে।
বাম ধারের মুক্তশাখা অনুসারে বাধক দৃষ্টান্ত হল : 'AB'-এর মূল্য 01
ডান ধারের মুক্তশাখা অনুসারে বাধক দৃষ্টান্ত হল : 'AB'-এর মূল্য 10 ॥

আবার, বাধক দৃষ্টান্ত দেখাতে হলে সব আণবিক অঙ্গের সত্যমূল্য উল্লেখের প্রয়োজন নেই। মানে যে শাখায় বাধক দৃষ্টান্ত দর্শিত হয় তাতে সব আণবিক অঙ্গবাক্য বা তার নিষেধ থাকবে এমন কথা নেই। নিম্নোক্ত অপেক্ষাকৃত জটিল উদাহরণটি লক্ষ কর।

উদাহরণ ৬

যুক্তি : $A \supset (\sim B \cdot C), B \supset (A \cdot \sim C) \quad \therefore \quad C \supset B$

সত্যশাখী :

প্রথম মুক্তশাখায় প্রদর্শিত বাধক দৃষ্টান্ত হল

'ABC'-এর সত্যমূল্য 001

এ সত্যমূল্য আরোপ করে দেখানো হল তিনটি কাণ্ডবাক্য একসঙ্গে সত্য হতে পারে।

$$\begin{array}{lllll} A\,B\,C & [A \supset (\sim B \cdot C)] & \cdot\ [B \supset (A \cdot \sim C)] & \cdot & \sim(C \supset B) \\ 0\,0\,1 & [0 \supset (1 \quad \cdot 1)] & \cdot\ [0 \supset (0 \cdot 0)] & \cdot & \sim(1 \supset 0) \\ & \quad 1 & \cdot \quad 1 & \cdot & \quad 1 \end{array}$$

দ্বিতীয় মুক্তশাখায় আছে : "$C, \sim B, \sim B, \sim B, C$" মানে—"$\sim B$", "$C$"। তাহলে এ শাখায় প্রদর্শিত বাধক দৃষ্টান্তটি হল

'BC'-এর সত্যমূল্য 01

এ শাখাতে 'A'-এর অনুপস্থিতি লক্ষণীয়। এ উদাহরণ থেকে বোঝা গেল, সব অঙ্গবাক্যের মূল্য দেওয়া না থাকলেও বাধক দৃষ্টান্ত গঠন করা যায় ; বোঝা গেল, সব শাখাতে সব একাঙ্গী বাক্য থাকবে এমন কথা নেই। আলোচ্য শাখায় 'A' নেই ; 'A' সত্য হোক কি মিথ্যা হোক উক্ত শাখীর কাণ্ডবাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে। 'B', 'C'-এর উক্ত সত্যমূল্য আরোপ করে দেখানো হল হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ সত্য হতে পারে।

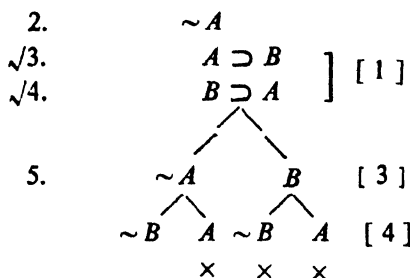
$$\begin{array}{lllll} A\ B\ C & [A \supset (\sim B \cdot C)] & \cdot\ [B \supset (A \cdot \sim C)] & \cdot & \sim(C \supset B) \\ \quad 0\ 1 & [A \supset (1 \cdot 1)] & \cdot\ [0 \supset (A \cdot 0\ )] & \cdot & \sim(1 \supset 0) \\ & A \supset 1 & \cdot \quad 1 & \cdot & \sim(0) \\ & \quad 1 & \cdot \quad 1 & \cdot & \quad 1 \\ & & \quad 1 & & \end{array}$$

দেখা গেল যে : একই সত্যশাখীর একাধিক মুক্ত শাখা থাকতে পারে, এবং একই অবৈধ যুক্তির বাধক দৃষ্টান্ত ভিন্নভাবে গঠিত হতে পারে।

৬. আরো দুটি যুক্তিবিধি

এতক্ষণ আমরা "— ≡ —" আকারের বাক্য সযত্নে পরিহার করে এসেছি। কোনো যুক্তিতে যদি দ্বিপ্রাকল্পিক থাকে তাহলে তার সত্যশাখী গঠন করব কি করে? উত্তর : "$p \equiv q$" সম "$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$" এ সূত্র অনুসারে দ্বিপ্রাকল্পিকটির পরিবর্তে সমার্থক সংযৌগিক ব্যবহার করে, উল্লিখিত যুক্তিবিধি অনুসারে সত্যশাখী গঠন করা যায়।

উদাহরণ

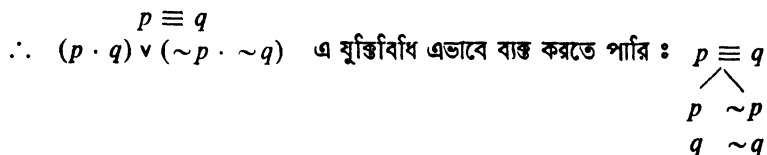
যুক্তি : $A \equiv B \quad \therefore \quad A$

অবৈধ, বাধক দৃষ্টান্ত : A B
0 0

কিন্তু সরাসরি " ≡ " সম্বন্ধেও যুক্তিবিধি রচনা করা যায়। আমরা জানি "$p \equiv q$" সম "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"। সুতরাং অনুমান করতে পারি : $p \equiv q \quad \therefore \quad (p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$। আরও জানি যে "ভাষায়" সত্যশাখী গঠন করা হয় সে ভাষায় সংযোগীগুলি উল্লম্বভাবে লেখা হয় আর বিকল্পগুলি অনুভূমিক আকারে লেখা হয়। কাজেই

$$p \equiv q$$
$$\therefore \quad (p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$$

এ যুক্তিবিধি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :

$p \equiv q$

p	$\sim p$
q	$\sim q$

আবার, "$\sim(p \equiv q)$" সম "$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$", সুতরাং অনুমান করা যায় : $\sim(p \equiv q) \quad \therefore \quad (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$। আর

$$\sim(p \equiv q)$$
$$\therefore \quad (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$$

এ যুক্তিবিধি এভাবে ব্যক্ত করা যায় :

$\sim(p \equiv q)$

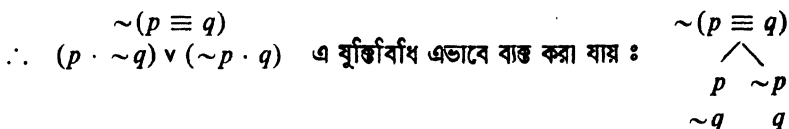
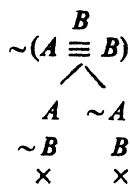
p	$\sim p$
$\sim q$	q

উদাহরণ

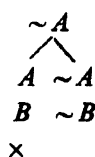
যুক্তি : $A, B \quad \therefore \quad A \equiv B$

শাখী : A
B
$\sim(A \equiv B)$

A	$\sim A$
$\sim B$	B
×	×

বৈধ

যুক্তি : $A \equiv B \quad \therefore \quad A$

শাখী : $A \equiv B$
$\sim A$

A	$\sim A$
B	$\sim B$
×	

অবৈধ ; বাধক দৃষ্টান্ত : A B
0 0

যুক্তিবিধির তালিকা

প্রথমে ছয়টি যুক্তিবিধি উল্লেখ করা হয়েছে, তারপর আরো দুটি। এ আটটি যুক্তিবিধি পুনর্বিন্যাস করে নিচে একত্র করলাম।

$p \cdot q$
p
q

$p \vee q$
／＼
p q

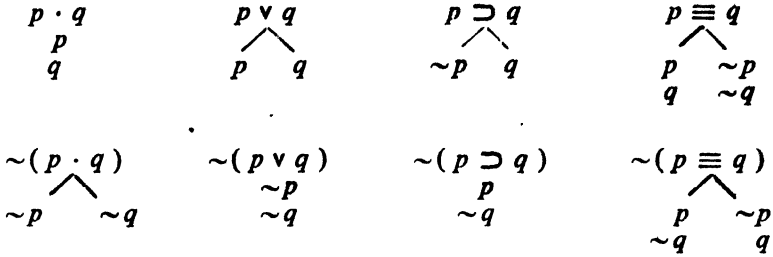
$p \supset q$
／＼
$\sim p$ q

$p \equiv q$
／＼
p $\sim p$
q $\sim q$

$\sim(p \cdot q)$
／＼
$\sim p$ $\sim q$

$\sim(p \vee q)$
$\sim p$
$\sim q$

$\sim(p \supset q)$
p
$\sim q$

$\sim(p \equiv q)$
／＼
p $\sim p$
$\sim q$ q

৭. সত্যশাখী গঠনের নিয়ম ঃ পুনরাবৃত্তি

কি করে সত্যশাখী গঠন করতে হয় তা শিখেছ বলে ধরে নিতে পারি। তবু সত্যশাখী গঠনের নিয়মগুলির পুনরাবৃত্তি করা হল।

১. প্রথমে হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধকে পর পর বিভিন্ন পঙ্‌ক্তিতে লেখ (এ বাক্যগুলি গঠনীয় শাখীর কাণ্ডবাক্য)।

২. যুগ্ম ঢেউ সব সময় বর্জন করতে হবে।

৩. যদি কাণ্ড বাক্যগুলির মধ্যে কোনো অঙ্গবাক্য ও তার নিষেধ থাকে তাহলে সর্বশেষ বাক্যের নিচে '×' চিহ্ন দাও (প্রমাণিত হল যুক্তিটি বৈধ)*। যদি না থাকে, তাহলে

৪. যে কোনো কাণ্ডবাক্য নিয়ে বিশ্লেষণ সুরু কর। বিশ্লেষণ করে যা পাবে তা যুক্তিবিধি অনুসারে কাণ্ডবাক্যগুলির নিচে লেখ—অর্থাৎ যদি সংযোগী পাও তাহলে উল্লম্ব আকারে আর বিকল্প পেলে '／＼' আকারে।
ক খ

অনেকাঙ্গ কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করে যে শাখাবাক্য পাবে, হতে পারে তাও অনেকাঙ্গ ; এ অনেকাঙ্গ শাখাবাক্য বিশ্লেষণ করে যা পাবে তা শাখাবাক্যটির নিচে লিখতে হবে।

এখন, কোনো শাখায় যদি কোনো বাক্য ও তার নিষেধ থাকে তাহলে শাখাটি বন্ধ করে দাও। যদি কোনো শাখাই মুক্ত না থাকে তাহলে যুক্তিটি বৈধ। আর যদি কোনো শাখা মুক্ত থাকে, তাহলে—

* উদাহরণ—যুক্তি ঃ $A, A \supset B \quad \therefore A$

সত্যশাখী ঃ
A
$A \supset B$
$\sim A$
×

৫. অন্য একটি কাণ্ডবাক্য নাও। একে বিশ্লেষণ করে যা পাবে তা প্রত্যেকটি মুক্ত শাখার নিচে লেখ। দেখ কোনো শাখা মুক্ত আছে কিনা। যদি না থাকে তাহলে যুক্তিটি বৈধ। যদি থাকে, আর একটি কাণ্ডবাক্য নাও এবং একে বিশ্লেষণ করে প্রত্যেকটি মুক্ত শাখার নিচে লেখ। এভাবে এগিয়ে যাও।

৬. সব সময় শাখাপথগুলির উপর নজর রাখবে। যদি কোনো শাখায় কোনো আণবিক বাক্য ও তার নিষেধ লক্ষ কর তাহলে শাখাটি বন্ধ করে দেবে, মানে পরবর্তী পর্যায়ে এর নিচে আর কিছুই লিখবে না।

৭. যদি সব অনেকাঙ্গ বাক্য বিশ্লেষণ করে থাক, এবং যদি দেখ প্রত্যেকটি শাখার শেষান্তে আণবিক বাক্য বা আণবিকের-নিষেধ তাহলে বুঝবে শাখী গঠনের কাজ সুসম্পন্ন হয়েছে।

উপরে যে নিয়মগুলি উল্লেখ করা হল এদের কোনো কোনোটি সম্পর্কে আমাদের কিছু বক্তব্য আছে। নিয়মগুলি বিপরীতক্রমে নেওয়া হল।

(৭) সম্পর্কে মন্তব্য

প্রত্যেকটি অনেকাঙ্গ বাক্য বিশ্লেষণের প্রয়োজন নাও হতে পারে। যদি কোনো বাক্য বিশ্লেষণ করার পূর্বেই সব শাখাপথ বন্ধ হয়ে যায় তাহলে সত্যশাখী গঠনের কাজ শেষ হয়ে গেল। এ কথার অর্থ: বৈধতা প্রদর্শন করতে হলে সব কাণ্ডবাক্য (বা শাখাবাক্য) বিশ্লেষণ করতে হবে এমন কথা নেই; কোনো কাণ্ডবাক্য (বা শাখাবাক্য) অগ্রাহ্য করেও বৈধতা প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ

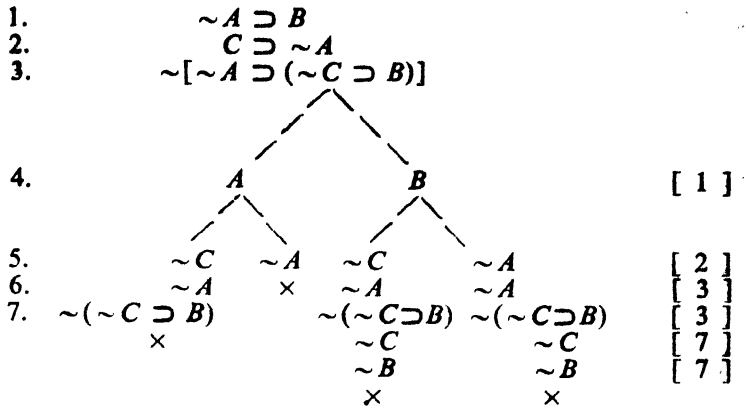
যুক্তি: $\sim A \supset B,\ C \supset \sim A \quad \therefore \quad \sim A \supset (\sim C \supset B)$

সত্যশাখী:

√1.	$\sim A \supset B$	
2.	$C \supset \sim A$	
√3.	$\sim[\sim A \supset (\sim C \supset B)]$	
4.	$\sim A$	[3]
√5.	$\sim(\sim C \supset B)$	[3]
6.	$\sim C$	[5]
7.	$\sim B$	[5]
	$A \quad B$	[1]
	× ×	

লক্ষণীয়, এখানে দ্বিতীয় কাণ্ডবাক্যটি বিশ্লেষণ না করেই প্রমাণ করা হল যে যুক্তিটি বৈধ। উপরোক্ত উদাহরণটি নিয়ে অন্যভাবে সত্যশাখী গঠন করা যাক।

1. $\sim A \supset B$
2. $C \supset \sim A$
3. $\sim[\sim A \supset (\sim C \supset B)]$

4.	A		B		[1]
5.	$\sim C$	$\sim A$	$\sim C$	$\sim A$	[2]
6.	$\sim A$	×	$\sim A$	$\sim A$	[3]
7.	$\sim(\sim C \supset B)$		$\sim(\sim C \supset B)$	$\sim(\sim C \supset B)$	[3]
	×		$\sim C$	$\sim C$	[7]
			$\sim B$	$\sim B$	[7]
			×	×	

এখানে বাম ধারের শাখাবাক্য "$\sim(\sim C \supset B)$"-এর বিশ্লেষণের প্রয়োজন হল না।

এ কথাটা বোঝার দরকার ঃ যে হেতুবাক্য বিশ্লেষণ করার পূর্বেই সব শাখা বন্ধ হয়ে যায় সে হেতুবাক্য প্রদত্ত যুক্তির বৈধতা প্রতিষ্ঠা করার পক্ষে অপরিহার্য নয়, সে বাক্য যুক্ত না হলেও প্রদত্ত সিদ্ধান্ত বৈধভাবে নিঃসৃত হত। এরূপ পরিহার্য বাক্য কি করে বৈধ যুক্তিতে স্থান পেতে পারে তা বুঝে নাও।

কোনো হেতুবাক্য 'ক' থেকে যদি বৈধভাবে 'ভ' নিঃসৃত হয় তাহলে 'ক'-এর সঙ্গে অন্য যেকোনো বাক্য সংযোগী হিসাবে যুক্ত করে যে বাক্য পাব তার থেকেও "ভ" বৈধভাবে নিঃসৃত হবে। তার মানে

যদি "ক ∴ ভ" বৈধ হয় তাহলে—

ক · খ ∴ ভ

ক · খ · গ ∴ ভ

ক · খ · গ · … ∴ ভ

এ যুক্তিগুলিও অবশ্যই বৈধ। অনুরূপভাবে,

যদি "ক ⊃ ভ" স্বতসত্য হয় তাহলে—

(ক · খ) ⊃ ভ

(ক · খ · গ) ⊃ ভ

(ক · খ · গ · …) ⊃ ভ

এ সব প্রাকল্পিক বাক্যও স্বতসত্য।

কোনো প্রাকল্পিক বাক্য সত্য হতে পারে তিনটি সত্যসর্তে ঃ 11, 01, 00। এখন, নিম্নোক্ত সমীকরণগুলি লক্ষ করলে বুঝবে কোনো সত্য প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্পের সঙ্গে সংযোগী হিসাবে যা-ই যুক্ত কর না কেন, প্রাকল্পিকটির সত্যতা অক্ষুণ্ন থাকবে।

$1 \supset 1 = 1$	$(1 \cdot P) \supset 1 = P \supset 1 = 1$
$0 \supset 1 = 1$	$(0 \cdot P) \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$
$0 \supset 0 = 1$	$(0 \cdot P) \supset 0 = 0 \supset 0 = 1$

তাহলে বলতে পারি

যদি প্রমাণ করা যায় যে "ক ∴ ভ" বৈধ তাহলে আরও দাবী করতে পারি ঃ 'ক'-এর সঙ্গে অন্য কোনো বাক্য সংযোগী হিসাবে নিয়ে যে যুক্তি গঠন করা হয়েছে তাও বৈধ।

উদাহরণ ঃ আমরা জানি

$A \cdot B \quad \therefore \quad A$ বৈধ

সুতরাং দাবী করতে পারি

$A \cdot B, \quad A \supset (B \supset C) \quad \therefore \quad A$

এ যুক্তিটিও বৈধ। এ যুক্তি দুটির সত্যশাখী তুলনা কর।

$\surd A \cdot B$	$\surd A \cdot B$
$\sim A$	$A \supset (B \supset C)$
A	$\sim A$
B	A
×	B
	×

উপরে যা বলা হল তা এভাবে ব্যক্ত করা যেত।

যদি "ক · ~ভ" স্বতমিথ্যা হয় তাহলে—

ক · খ · ~ভ

ক · খ · গ · ~ভ

ক · খ · গ · ··· ~ভ

এ সবও স্বতমিথ্যা। এর থেকে বোঝা যায়,

কোনো যুক্তির সিদ্ধান্তের-নিষেধ ও কোনো একটি (বা একাধিক) নির্বাচিত হেতুবাক্য সংযোগী হিসাবে নিয়ে যদি দেখানো যায় যে সংযৌগিক বাক্যটি স্বতমিথ্যা তাহলে দাবী করতে পারি ঃ প্রমাণ হয়ে গেল যে যুক্তিটি বৈধ।

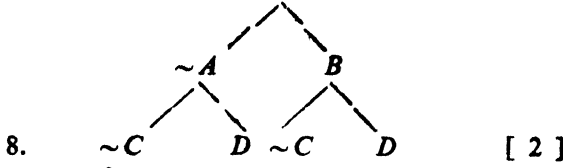
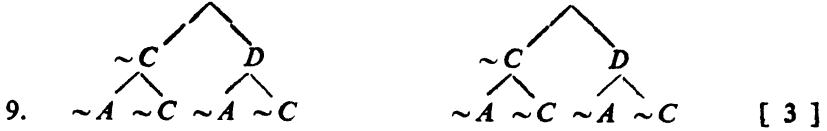
(৫) সম্বন্ধে মন্তব্য

"প্রত্যেকটি মুক্তশাখার নিচে"-এ বাক্যাংশের গুরুত্ব বুঝে নেবার দরকার। কোনো পর্যায়ে পৌঁছাবার পর যদি কোনো কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করতে হয় তাহলে বিশ্লেষণলব্ধ বাক্যগুলিকে ঐ পর্যায়ের সব মুক্ত শাখার নিচে স্থাপন করতে হবে। উদাহরণ

√1.	$A \supset B$	
√2.	$C \supset D$	
√3.	$A \supset \sim C$	
√4.	$\sim(\sim B \vee \sim C)$	
5.	B	[4]
6.	C	
7.	$\sim A \quad B$	[1]

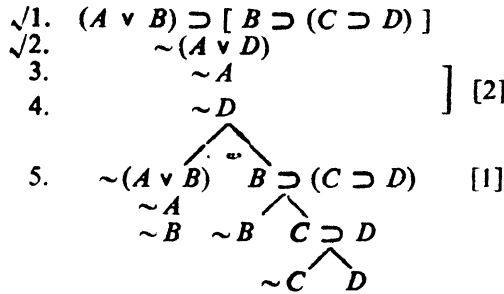
এখন 2 সংখ্যক কাণ্ডবাক্যকে বিশ্লেষণ করে পাই

$\sim C \quad D$

এ শাখা দুটিকে সপ্তম পর্বের দুটি মুক্ত শাখার প্রত্যেকটির নিচে স্থাপন করতে হবে, এভাবে—

আর 3 সংখ্যক কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করে পাই দুটি শাখা—এক শাখা প্রান্তে '~A' অন্য শাখার প্রান্তে '~C'। এ শাখা দুটি অষ্টম পর্বের প্রত্যেকটি মুক্তশাখার নিচে লিখতে হবে এভাবে—

আমরা বলতে চেয়েছি ঃ কোনো কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করে যা পাওয়া যাবে তাকে পূর্ব-পর্যায়ে-গঠিত প্রত্যেক শাখার তলদেশে স্থাপন করতে হবে। এ নিয়মটি কেবল কাণ্ডবাক্য সংক্রান্ত নিয়ম, শাখাবাক্য সম্বন্ধে এ নিয়ম খাটে না।

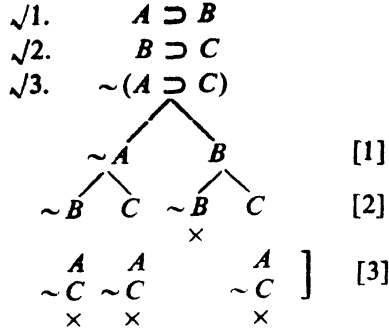
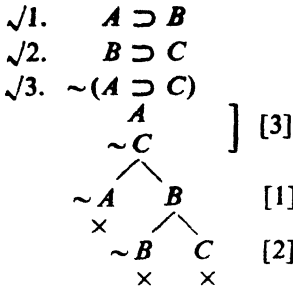
কোনো শাখাবাক্য বিশ্লেষণ করে যা পাওয়া যাবে তা কেবল ঐ শাখাবাক্যের নিচেই যুক্ত হবে—অন্য কোনো শাখার নিচে যুক্ত হবে না। উদাহরণ

√1. $(A \vee B) \supset [B \supset (C \supset D)]$
√2. $\sim(A \vee D)$
3. $\sim A$] [2]
4. $\sim D$

5. $\sim(A \vee B)$ $B \supset (C \supset D)$ [1]
$\sim A$
$\sim B$ $\sim B$ $C \supset D$
$\sim C$ D

এখানে পঞ্চম পর্বের বাম ধার বিশ্লেষণ করে যা পেয়েছি তা বাম ধারের শাখার তলাতেই লেখা হল, ডান ধারের শাখায় যুক্ত হল না। আবার ডান শাখার বিশ্লেষণলব্ধ বাক্যগুলি বাম শাখার নিচে যুক্ত হল না। আবার শাখাবাক্য '$C \supset D$' থেকে যে সিদ্ধান্ত করা হয়েছে তা কেবল '$C \supset D$'-এর নিচে স্থাপিত হল।

(৪) সম্পর্কে মন্তব্য ঃ শাখী খর্বকারীকরণ

যে কোনো কাণ্ডবাক্য নিয়ে বিশ্লেষণের কাজ সুরু করতে পার, ঠিক। তবে প্রথমে এমন বাক্য বেছে নেওয়া ভাল যে বাক্য বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায় সংযোগী—উল্লম্বভাবে স্থাপনীয় বাক্য। এ কায়দায় বিশ্লেষণ সুরু করলে কাজের সুবিধা হয়—সত্যশাখীর শাখা বিস্তার কিছুটা সীমিত রাখা যায়। আর যদি প্রথমেই এমন সব কাণ্ডবাক্য বেছে নাও যাদের বিশ্লেষণ করলে পাবে বিকল্প—একাধিক শাখান্তে স্থাপনীয় বাক্য—তাহলে সত্যশাখীকে অহেতুক শাখাবিস্তার করতে হয়। নিচে একই যুক্তির সত্যশাখী দুভাবে গঠিত হল। এদের তুলনা করলে, যে কায়দার কথা বলছি তার উৎকর্ষ বুঝতে পারবে।

```
√1.     A ⊃ B                 √1.      A ⊃ B
√2.     B ⊃ C                 √2.      B ⊃ C
√3.   ~(A ⊃ C)                √3.    ~(A ⊃ C)
        A    ] [3]                    /    \
       ~C    ]                      ~A      B          [1]
       /  \                        /  \    /  \
     ~A    B       [1]           ~B   C  ~B    C       [2]
      ×   /  \                             ×
        ~B    C    [2]            A    A         A  ]
         ×    ×                  ~C   ~C        ~C  ]  [3]
                                  ×    ×         ×
```

প্রথম দৃষ্টান্তে প্রথমে 3-সংখ্যক বাক্য (যে বাক্য বিশ্লেষণ করে সংযোগী পাওয়া যাবে) বিশ্লেষণ করা হয়েছে। আর দ্বিতীয়টিতে প্রথমে বিশ্লেষণ করা হয়েছে 1-সংখ্যক বাক্য—যা বিশ্লেষণ করে পাওয়া যাবে বিকল্প—মানে একাধিক শাখা।

আর একটি নির্দেশ। এ নির্দেশটি পালন করলে সত্যশাখীকে খর্বকায় করে রাখা যায়, শাখী অহেতুক শাখা প্রশাখা বৃদ্ধি করতে পারে না।

তোমার প্রধান লক্ষ্য হবে শাখা বন্ধ করা (ষষ্ঠ নিয়ম দ্রষ্টব্য)। কি করে শাখা বন্ধ করা যায় সেদিকে সব সময় নজর রাখবে। মুক্ত শাখার প্রান্তে কি বাক্য আছে তা লক্ষ করবে এবং কাণ্ডবাক্যগুলির কোন্‌টি বিশ্লেষণ করলে মুক্তশাখান্ত বাক্যের কোনোটির নিষেধ পাওয়া যাবে তা লক্ষ করবে। যে কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করলে কোনো শাখান্ত বাক্যের নিষেধ পাওয়া যায়, সব সময় সে বাক্যটি বেছে নেবে।

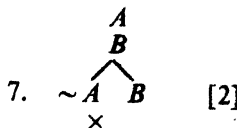
উদাহরণ। নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর।

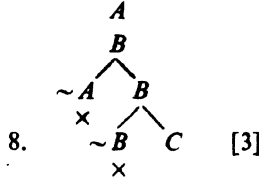
1. $C \supset D$
2. $A \supset B$
3. $B \supset C$
4. $\sim(\sim A \vee \sim B)$

প্রথমেই চতুর্থ বাক্যটি বিশ্লেষণ করা হল, কেননা এ বাক্য বিশ্লেষণ করে পাব সংযোগী। এ বাক্যটি বিশ্লেষণ করে পেলাম

5. A
6. B

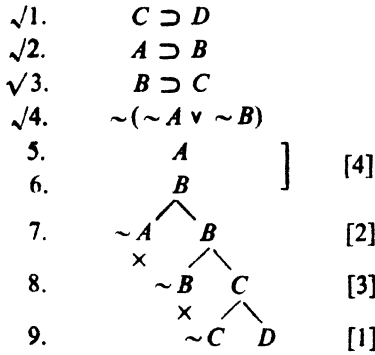
এখন লক্ষ করছি দ্বিতীয় কাণ্ডবাক্য বিশ্লেষণ করলে '$\sim A$' পাওয়া যায় এবং (পঞ্চম পঙ্‌ক্তিতে 'A' আছে বলে) একটি শাখা বন্ধ করে দেওয়া যায়। প্রথম কাণ্ডবাক্যকে বিশ্লেষণ করে পেতাম '$\sim C \vee D$', এবং পঞ্চম পঙ্‌ক্তির নিচে '$\sim C$', 'D' বসালে কোনো শাখাই বন্ধ হত না। কাজেই এ পর্যায়ে প্রথম বাক্যটি বেছে নিলে কোনো সুবিধা হত না। এজন্য দ্বিতীয়টি বেছে নিলাম। এ বিশ্লেষণের ফল যুক্ত করে পাই

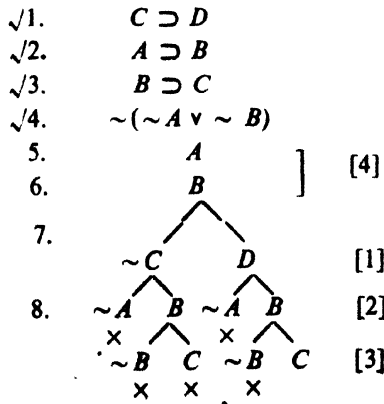
```
          A
          B
         / \
7.     ~A   B      [2]
        ×
```

এখন একটি মুক্ত শাখার নিচে আছে 'B'। এবার তৃতীয় কাণ্ডবাক্যটি নিলে '$\sim B$' পেতে পারি। এজন্য তৃতীয় বাক্যটি বেছে নিলাম। এ বাক্য বিশ্লেষণ করে বিশ্লেষণ-ফল মুক্ত শাখার নিচে যুক্ত করে পাই

```
              A
              B
             / \
          ~A    B
           ×   / \
8.           ~B   C      [3]
              ×
```

সর্বশেষে 1-সংখ্যক বাক্যটি বিশ্লেষণ করে পাই

```
  / \
~C   D
```

সত্যশাখীটি তাহলে নিম্নোক্তরূপ গ্রহণ করল ঃ

```
√1.        C ⊃ D
√2.        A ⊃ B
√3.        B ⊃ C
√4.      ~(~A ∨ ~B)
 5.           A        ]    [4]
 6.           B        ]
             / \
 7.        ~A   B           [2]
            ×  / \
 8.          ~B   C         [3]
              ×  / \
 9.            ~C   D       [1]
```

যদি এভাবে শাখা বন্ধ করার দিকে নজর না রাখতাম, হেতুবাক্যগুলি যে ক্রমে লিপিবদ্ধ আছে সে ক্রম অনুসরণ করতাম, তাহলে শাখীটি কী রূপ পরিগ্রহ করত, দেখ।

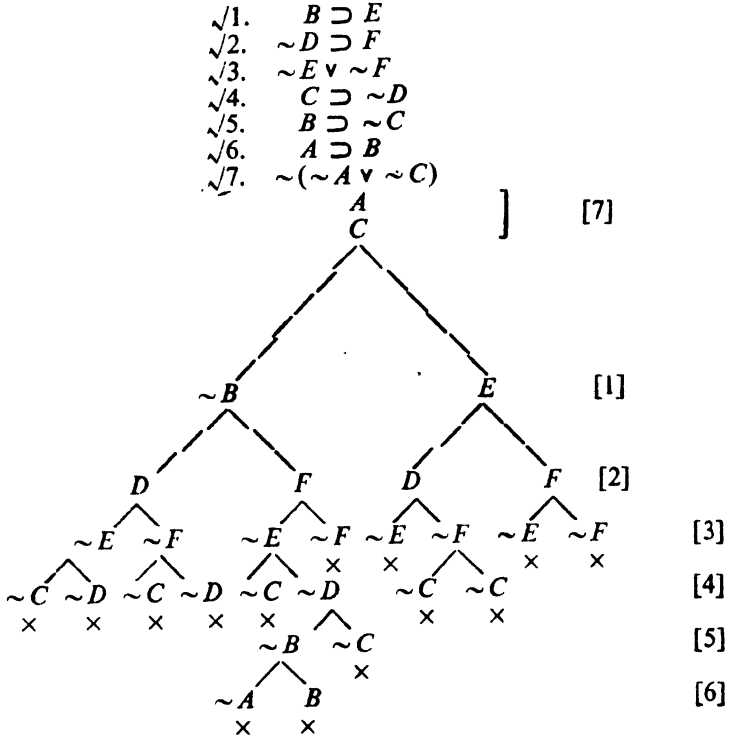
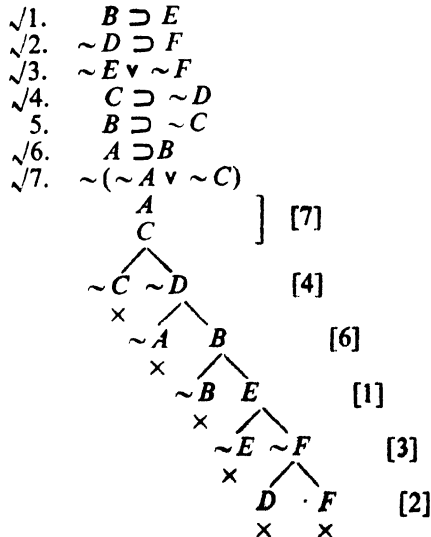
```
√1.        C ⊃ D
√2.        A ⊃ B
√3.        B ⊃ C
√4.      ~(~A ∨ ~ B)
 5.           A             ]    [4]
 6.           B             ]
             / \
 7.         /   \
         ~C       D              [1]
         / \     / \
 8.    ~A   B  ~A   B            [2]
        ×  / \  ×  / \
         ~B   C  ~B   C          [3]
          ×   ×   ×
```

আর একটি উদাহরণ। নিম্নোক্ত সত্যশাখীটি লক্ষ কর।

$\surd$1. $B \supset E$
$\surd$2. $\sim D \supset F$
$\surd$3. $\sim E \vee \sim F$
$\surd$4. $C \supset \sim D$
$\surd$5. $B \supset \sim C$
$\surd$6. $A \supset B$
$\surd$7. $\sim(\sim A \vee \sim C)$

```
                         A
                         C                      [7]
                  /              \
               ~B                  E            [1]
             /    \              /    \
           D        F          D        F       [2]
          / \      / \        / \      / \
        ~E   ~F  ~E   ~F    ~E   ~F  ~E   ~F    [3]
                       ×     ×         ×    ×
       / \   / \   / \           / \
     ~C ~D ~C ~D ~C  ~D        ~C  ~C           [4]
      ×  ×  ×  ×  ×  / \        ×   ×
                   ~B   ~C                      [5]
                   / \   ×
                 ~A   B                         [6]
                  ×   ×
```

এ শাখীটিকে খর্বকায় করা যায় এভাবে—

$\surd$1. $B \supset E$
$\surd$2. $\sim D \supset F$
$\surd$3. $\sim E \vee \sim F$
$\surd$4. $C \supset \sim D$
5. $B \supset \sim C$
$\surd$6. $A \supset B$
$\surd$7. $\sim(\sim A \vee \sim C)$

```
        A
        C                 [7]
       / \
     ~C   ~D              [4]
      ×   / \
        ~A   B            [6]
         ×  / \
          ~B   E          [1]
           ×  / \
            ~E   ~F       [3]
             ×   / \
                D   F     [2]
                ×   ×
```

এখানে 5-সংখ্যক কাণ্ডবাক্যটি বিশ্লেষণের কোনো প্রয়োজন হল না।

আরোও একটু সতর্কভাবে চললে শাখীটিকে নিম্নোক্ত রূপে আরও খর্বকার করা যেত।

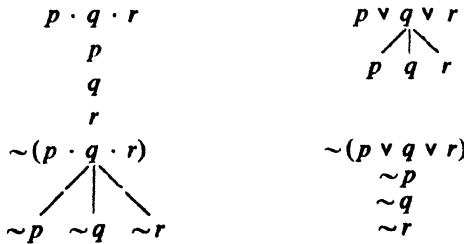
1. $B \supset E$
2. $\sim D \supset F$
3. $\sim E \vee \sim F$
4. $C \supset \sim D$
√5. $B \supset \sim C$
√6. $A \supset B$
√7. $\sim(\sim A \vee \sim C)$

A] [7]
C

$\sim A$ B [6]
×
$\sim B$ $\sim C$ [5]
× ×

এখানে কাণ্ডবাক্য 1, 2, 3, 4 বিশ্লেষণ করার কোনো প্রয়োজন হল না। এটাই আলোচ্য যুক্তির ক্ষুদ্রতম সত্যশাখী।

৮. বহুপ্রশাখাবিশিষ্ট সত্যশাখী

এতক্ষণ আমরা যে সব যুক্তির বৈধতা আলোচনা করেছি তার অন্তর্গত সংযৌগিক ও বৈকল্পিক বাক্যে দুটির বেশী অঙ্গবাক্য নেই। দুই অঙ্গবিশিষ্ট সংযৌগিককে বিশ্লেষণ করে দুটি পঙ্‌ক্তিতে, আর অনুরূপ বৈকল্পিককে বিশ্লেষণ করে দুইবাহুবিশিষ্ট শাখার আকারে ব্যক্ত করেছি। কিন্তু কোনো সংযৌগিকে দুটির বেশী সংযোগী আর বৈকল্পিকে দুটির বেশী বিকল্প থাকতে পারে। এরূপ বাক্য বিশ্লেষণ করব কি করে। সংযৌগিক ও বৈকল্পিক বাক্যে তিনটি করে অঙ্গ থাকলে কিভাবে বিশ্লেষণ করতে হয় তা দেখান হল।

আরো বেশী অঙ্গবাক্য বিশিষ্ট বাক্যকে অনুরূপভাবে বিশ্লেষণ করতে হবে। যথা

উদাহরণ ৭

যুক্তি : $\sim A \vee B \vee C,\ C \vee D \vee \sim B \quad \therefore \quad \sim A \vee C \vee D$

সত্যশাখী :

$\surd 1.\quad \sim A \vee B \vee C$

$\surd 2.\quad C \vee D \vee \sim B$

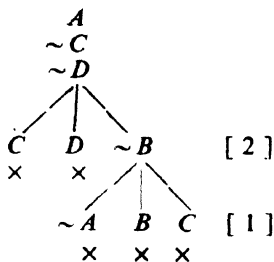
$\surd 3.\quad \sim(\sim A \vee C \vee D)$

A

$\sim C$

$\sim D$

$C \quad D \quad \sim B \qquad [2]$

$\times \quad \times$

$\sim A \quad B \quad C \qquad [1]$ যুক্তিটি বৈধ।

$\times \quad \times \quad \times$

উদাহরণ ৮

যুক্তি : $(M \supset D) \cdot (S \supset \sim D) \cdot (\sim R \vee \sim M \vee D),\ M \vee \sim P \vee D$

$\therefore \sim R \vee \sim M \vee \sim S$

সত্যশাখী :

$\surd 1.\quad (M \supset D) \cdot (S \supset \sim D) \cdot (\sim R \vee \sim M \vee D)$

$\surd 2.\quad M \vee \sim P \vee D$

$\surd 3.\quad \sim(\sim R \vee \sim M \vee \sim S)$

4. R

5. M [3]

6. S

$\surd 7.\quad M \supset D$

$\surd 8.\quad S \supset \sim D$ [1]

$\surd 9.\quad \sim R \vee \sim M \vee D$

$M \qquad \sim P \qquad D \qquad [2]$

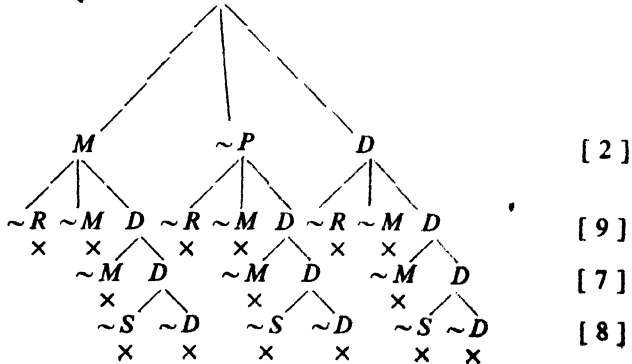
$\sim R \ \sim M \ D \quad \sim R \ \sim M \ D \quad \sim R \ \sim M \ D \qquad [9]$

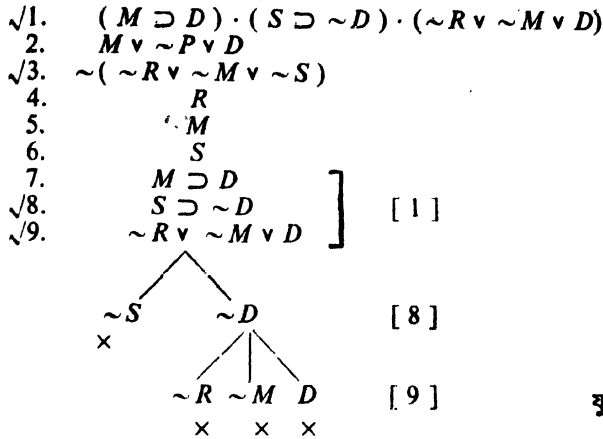
$\times \ \times \qquad \times \ \times \qquad \times \ \times$

$\sim M \ D \quad \sim M \ D \quad \sim M \ D \qquad [7]$

$\times \qquad \times \qquad \times$

$\sim S \ \sim D \quad \sim S \ \sim D \quad \sim S \ \sim D \qquad [8]$

$\times \ \times \quad \times \ \times \quad \times \ \times$

একটু ভেবেচিন্তে অগ্রসর হলে শাখীটির পরিবর্তে নিম্নোক্তরূপ খর্বকায় শাখী গঠন করা যেত।

উদাহরণ ৮′

যুক্তিটি বৈধ।

এখানে 2 আর 7 বিশ্লেষণের কোনো প্রয়োজন হল না।

৯. সত্যশাখী ঃ সংযৌগিক ও বৈকল্পিকের গুরুত্ব

একটা কথা। 'ক ⊃ খ' থেকে যেমন "~ক v খ" অনুমান করা যায়, তেমনি "ক v খ" থেকে "~ক ⊃ খ" অনুমান করা যায়। কিন্তু সত্যশাখী গঠন করতে গিয়ে "ক v খ" থেকে "~ক ⊃ খ" অনুমান করি না কেন? সেরূপ, "ক ≡ খ ∴ (ক ⊃ খ) · (খ ⊃ ক)"—এ অনুমানটি বৈধ। কিন্তু সত্যশাখী গঠন করতে গিয়ে "ক ≡ খ" থেকে "(ক ⊃ খ) · (খ ⊃ ক)" অনুমান করি না কেন? সত্যশাখীতে যে "ভাষা"য় অনুমিত বা বিশ্লেষণলব্ধ সমার্থক বাক্য ব্যক্ত করা হয় সে ভাষার স্বরূপ বুঝে থাকলে এ প্রশ্নের উত্তর দিতে পারবে। উত্তরটি এই ঃ

এ ভাষা হল দৈশিক বিন্যাসের ভাষা। আমরা জানি, এ ভাষার বিধান অনুসারে ঃ দুটি বাক্য উপরে নিচে পরপর লিখলে বুঝতে হবে, এরা সংযোগী—এদের মধ্যে একটা প্রচ্ছন্ন "·" আছে। আর একই পঙ্‌ক্তিতে ডাইনে বাঁয়ে দুটি বাক্য লিখিত হলে বুঝতে হবে, এরা বিকল্প—এদের মধ্যে একটা প্রচ্ছন্ন "v" আছে। এখন একটি দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রের, সমতল ক্ষেত্রের, উপর কেবল দুভাবে বাক্যবিন্যাস হতে পারে—উল্লম্ব আকারে (উপরে নিচে) আর অনুভূমিক আকারে (ডাইনে-বামে)। এর থেকে বোঝা যায়, সত্যশাখীতে বাক্য-বিশ্লেষণ অংশে সংযৌগিক আর বৈকল্পিক ভিন্ন অন্য প্রকার বাক্যের স্থান থাকতে পারে না, যোজক "·" আর "v" ছাড়া অন্য যোজকের* স্থান থাকতে পারে না। এজন্য প্রত্যেক

* অন্য দ্বৈতাঙ্গী যোজকের। কিন্তু একাঙ্গী যোজক "~"-এর স্থান আছে। এ যোজকটিকে রাখার ব্যবস্থা করা হয় একে আণবিক অঙ্গের সঙ্গে যুক্ত রেখে। দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে কোনো তৃতীয় প্রকারের দৈশিক মাত্রা দিয়ে "~" ব্যক্ত করা যেত না।

অনেকাঙ্গ বাক্যকে সমার্থক সংযৌগিক বা বৈকল্পিক বাক্যের আকারে ব্যক্ত করা হয়। বস্তুত সত্যশাখীতে যে বিশ্লেষণ করা হয় তার একটি প্রধান লক্ষ্য হল প্রত্যেক অনেকাঙ্গ বাক্য বিশ্লেষণ করে একাঙ্গ সংযোগী বা একাঙ্গ বিকল্পে পৌছানো। কাজেই সত্যশাখীতে সংযৌগিক ও বৈকল্পিক বাক্য ভিন্ন অন্য কোনো প্রকারের বাক্যনিষ্কাশন করা হয় না। কাজেই সত্যশাখী কেবল দুভাবে বর্ধিত হয় (নিম্নমুখী) ঋজু একবাহু শাখার আকারে (সংযোগীর উল্লম্ব বিন্যাসের আকারে) অথবা তির্যক অনেকবাহু শাখার আকারে (বিকল্পের অনুভূমিক বিন্যাসের আকারে)।

১০. সত্যশাখী : বাক্যের বৈধতা ও সংগতি নির্ণয়

সত্যশাখী পদ্ধতি প্রয়োগ করে এতক্ষণ আমরা কেবল যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করেছি। বলা বাহুল্য, এ পদ্ধতি প্রয়োগ করে

কোনো বাক্য স্বতসত্য বা বৈধ কিনা

কোনো প্রদত্ত বাক্য অন্য কোনো প্রদত্ত বাক্যকে প্রতিপাদন করে কিনা

কোনো দুটি প্রদত্ত বাক্য সমার্থক কিনা, আবার

কোনো বাক্য সমষ্টির অন্তর্গত বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি আছে কিনা

তা নির্ণয় করা যায়।

বাক্যের বৈধতা নির্ণয় : যে বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করতে চাই তার নিষেধ নিয়ে সত্যশাখী গঠন করতে হবে। গঠিত শাখীটিতে যদি কোনো মুক্ত শাখা থাকে তাহলে বাক্যটি অবৈধ, আর যদি কোনো মুক্ত শাখা না থাকে তাহলে বাক্যটি বৈধ, স্বতসত্য। উদাহরণ

প্রশ্ন : $(A \supset B) \supset [(A \cdot C) \supset (B \cdot C)]$ —এ বাক্যটি কি স্বতসত্য ?

উত্তর :

$\sim\{(A \supset B) \supset [(A \cdot C) \supset (B \cdot C)]\}$ [প্রদত্ত বাক্যের নিষেধ]

$A \supset B$

$\sim[(A \cdot C) \supset (B \cdot C)]$

$A \cdot C$

$\sim(B \cdot C)$

A

C

$\sim B$ $\sim C$ ×

$\sim A$ × B ×

এ শাখীতে কোনো মুক্ত শাখা নেই, সুতরাং বাক্যটি স্বতসত্য

প্রশ্ন : $(A \supset B) \supset [(A \supset C) \supset (B \supset C)]$ —এ বাক্যটি কি স্বতসত্য ?

উত্তর :

$\sim\{(A \supset B) \supset [(A \supset C) \supset (B \supset C]\}$ [প্রদত্ত বাক্যের নিষেধ]

$A \supset B$

$\sim[(A \supset C) \supset (B \supset C)]$

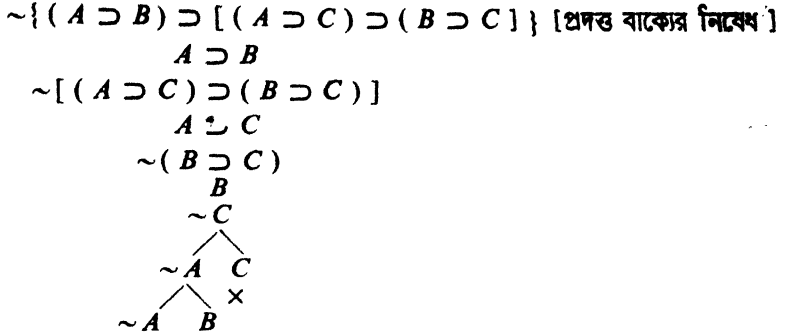
$A \supset C$

$\sim(B \supset C)$

B

$\sim C$

$\sim A \quad\quad C$ ×

$\sim A \quad\quad B$

শাখীটিতে মুক্ত শাখা আছে, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি স্বতসত্য নয়।

প্রতিপত্তি নির্ণয় : কোনো বাক্য 'ব' অন্য কোনো বাক্য 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে কিনা তা নির্ণয় করতে হলে 'ব' 'ভ' দিয়ে প্রাকল্পিক 'ব ⊃ ভ' গঠন করতে হয় এবং 'ব ⊃ ভ'-এর বৈধতা পরীক্ষা করতে হয়। উদাহরণ

প্রশ্ন : "$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$"—এ বাক্যটি কি "$(A \vee C) \supset (B \vee D)$"-কে প্রতিপাদন করে ?

উত্তর : প্রথম বাক্যটিকে পূর্বকল্প আর দ্বিতীয়টিকে অনুকল্প করে পাই

$$[(A \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(A \vee C) \supset (B \vee D)]$$

এবং এ বাক্যের নিষেধ নিয়ে সত্যশাখী গঠন করে পাই

$\sim\{[(A \supset B) \cdot (C \supset D)] \supset [(A \vee C) \supset (B \vee D)]\}$

$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$

$\sim[(A \vee C) \supset (B \vee D)]$

$A \vee C$

$\sim(B \vee D)$

$\sim B$

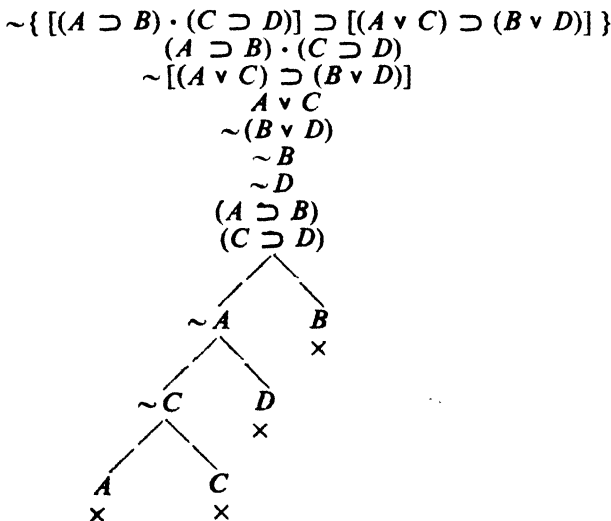
$\sim D$

$(A \supset B)$

$(C \supset D)$

$\sim A \quad\quad B$
×

$\sim C \quad\quad D$
×

$A \quad\quad C$
× ×

শাখীটিতে মুক্ত শাখী নেই, সুতরাং প্রদত্ত প্রথম বাক্যটি প্রদত্ত দ্বিতীয় বাক্যের প্রতিপাদক।

সমার্থতা নির্ণয়ঃ কোনো বাক্য 'ব' অন্য বাক্য 'ভ'-এর সমার্থক কিনা তা নির্ণয় করতে হলে দ্বিপ্রাকল্পিক 'ব ≡ ভ' গঠন করে 'ব ≡ ভ'-এর বৈধতা পরীক্ষা করতে হয়।

উদাহরণ

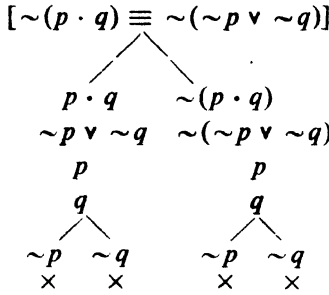
প্রশ্ন : "$p \cdot q$" আর "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" কি সমার্থক?

উত্তর : প্রদত্ত বাক্য দুটি নিয়ে দ্বিপ্রাকল্পিক গঠন করে পাই

$$(p \cdot q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$$

এবং এ বাক্যের নিষেধ নিয়ে সত্যশাখী গঠন করে পাই

$$[\sim(p \cdot q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)]$$

$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q)$
$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
p	p
q	q
$\sim p$ × / $\sim q$ ×	$\sim p$ × / $\sim q$ ×

এতে কোনো মুক্ত শাখা নেই, সুতরাং প্রদত্ত বাক্য দুটি সমার্থক।

সংগতি নির্ণয়

> যদি কোনো বাক্যসমষ্টি এমন হয় যে, বাক্যগুলি অন্তত একটি ক্ষেত্রে—মানে অন্তত একটি সত্যসর্তবিন্যাসে—যুগপৎ সত্য হতে পারে, তাহলে বলা হয়ঃ বাক্যগুলির মধ্যে অবিরোধিতা বা সংগতি আছে।

আর যদি এমন কোনো ক্ষেত্র না থাকে—মানে যদি এমন হয় যে, কোনো সত্যসর্তেই বাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে না—তাহলে বলা হয়ঃ বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি নেই, বাক্যগুলির সংযোগ স্ববিরোধী।

এখন, সত্যশাখী পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রদত্ত বাক্যসমষ্টির সংগতি অসংগতি অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়। এ পদ্ধতির সাহায্যে সংগতি অসংগতি নির্ণয় করতে হলে প্রদত্ত বাক্যগুলিকে অবিকৃত রেখে—মানে কোনোটিকে নিষেধ না করে—সত্যশাখী গঠন করতে হয়। যদি গঠিত শাখীতে কোনো মুক্তশাখা থাকে তাহলে প্রমাণিত হল যে বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি আছে। আর যদি কোনো মুক্ত শাখা না থাকে তাহলে প্রমাণিত হল যে বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি নেই, মানে বাক্যগুলির সংযোগ হল স্ববিরোধী।

উদাহরণ

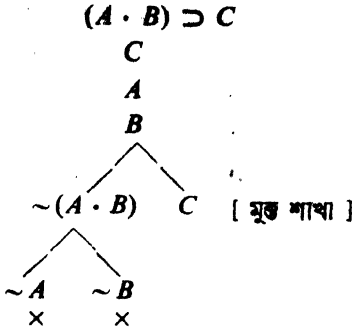
প্রশ্ন : $(A \cdot B) \supset C, \quad C, \ A, \ B$

—এ বাক্যগুলির মধ্যে কি সংগতি আছে?

উত্তর :

$$(A \cdot B) \supset C$$
$$C$$
$$A$$
$$B$$

$\sim(A \cdot B)$ C [মুক্ত শাখা]

$\sim A$ × $\sim B$ ×

এ শাখীর একটি শাখা মুক্ত, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি বর্তমান।

প্রশ্ন : $A \supset B, \; B \supset C, \; C \supset D, \; A, \sim D$

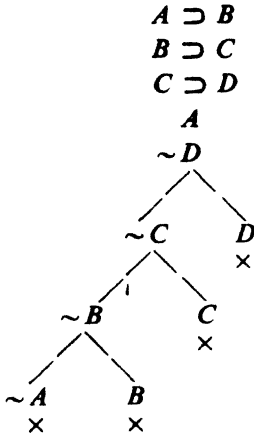
—এ বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি আছে কি ?

উত্তর :

$$A \supset B$$
$$B \supset C$$
$$C \supset D$$
$$A$$
$$\sim D$$

$\sim C$ D ×

$\sim B$ C ×

$\sim A$ × B ×

এ শাখীতে কোনো শাখাই মুক্ত নয়, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি নেই, মানে প্রদত্ত বাক্যগুলির সংযোগ স্ববিরোধী।

১১. পরগাছা ছাঁটাই

সত্যশাখী গঠন করতে গিয়ে আমরা অনেক সময় বিভিন্ন পঙ্‌ক্তির পাশে 1, 2, প্রভৃতি ক্রমিক সংখ্যা ব্যবহার করেছি। আর কোন্ পঙ্‌ক্তি কোন্ অনেকাঙ্গ পঙ্‌ক্তি বিশ্লেষণ করে পেয়েছি তা বোঝাবার জন্য বিভিন্ন শাখাবাক্যের ডান দিকে "ভাষ্য" যোগ করেছি [1], [2] প্রভৃতি দিয়ে। সত্যশাখী গঠনের কাজ শেখাবার জন্য এসব সংকেতের প্রয়োজন

ছিল। এখন আমরা সত্যশাখী রচনা করতে শিখে গেছি। কাজেই এসব সংখ্যা দিয়ে শাখীকে ভারাক্রান্ত করবার দরকার নেই। এখন থেকে সত্যশাখীর পঙ্‌ক্তি সংখ্যা, "ভাষ্য" এসব বর্জন করতে পার। তবে প্রত্যেকটি অনেকাঙ্গ বাক্য যে বিশ্লেষণ করা হয়েছে এ সম্বন্ধে যদি নিশ্চিত হতে চাও তাহলে, যখনই কোনো বাক্য বিশ্লেষণ করবে তখনই বাক্যটির বাম পাশে একটা "√" চিহ্ন দেবে। ক্রমিক সংখ্যা, "ভাষ্য" এসব পরগাছা ছাঁটাই করলে সত্যশাখী অনেক ছিমছাম আকার ধারণ করে। পূর্ববর্তী বিভাগে যে সত্যশাখী গঠন করা হয়েছে সেগুলিও পরগাছামুক্ত। আরও দুটি পরগাছা-ছাঁটাই-করা শাখী :

$A \supset B \therefore (C \supset A) \supset (C \supset B)$

$A \supset B$
$\sim[(C \supset A) \supset (C \supset B)]$
$C \supset A$
$\sim(C \supset B)$
C
$\sim B$

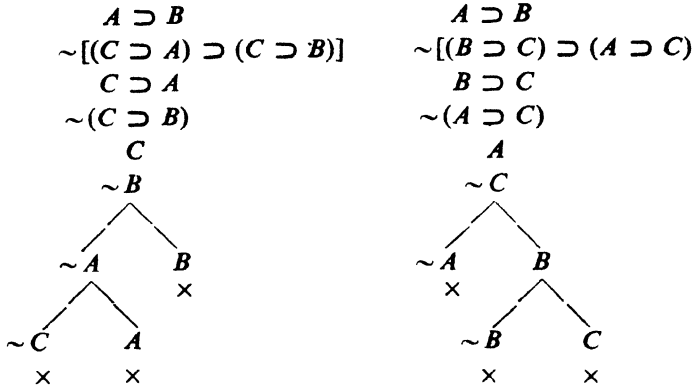
$\sim A$ | B ×

$\sim A$ → $\sim C$ ×, A ×

$A \supset B \therefore (B \supset C) \supset (A \supset C)$

$A \supset B$
$\sim[(B \supset C) \supset (A \supset C)$
$B \supset C$
$\sim(A \supset C)$
A
$\sim C$

$\sim A$ × | B

B → $\sim B$ ×, C ×

বলা বাহুল্য, উপরোক্ত যুক্তি দুটি বৈধ।

অনুশীলনী

১. সত্যশাখী গঠন করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি বৈধ :

(i) $(A \supset B) \supset C \quad \therefore \quad \sim C \supset A$

(ii) $(A \supset B) \supset A \quad \therefore \quad A$

(iii) $A \equiv B, A \vee B \quad \therefore \quad A \cdot B$

(iv) $(A \cdot B) \supset C, \sim A \supset D \quad \therefore \quad B \supset (C \vee D)$

(v) $A \supset B, C \supset D \quad \therefore \quad (A \vee C) \supset (B \vee D)$

২. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বাধক দৃষ্টান্ত দাও — মানে বল, কোন সত্যমূল্যবিন্যাসে হেতুবাক্য সত্য আর সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয়।

(i) $A \supset B,\ C \supset D,\ \sim A \vee \sim C \quad \therefore \quad \sim B \vee \sim D$

(ii) $\sim A \supset B \quad \therefore \quad B \supset A$

(iii) $(A \supset B) \supset B \quad \therefore \quad A$

(iv) $A \supset (\sim B \cdot C),\ B \supset (A \cdot \sim C) \quad \therefore \quad \sim B \supset \sim C$

৩. সত্যশাখী গঠন করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

(i) $(p \supset q) \supset [(r \supset p) \supset (r \supset q)]$

(ii) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

(iii) $p \equiv [p \vee (p \cdot q)]$

(iv) $p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$

(v) $[p \supset (q \equiv r)] \equiv [(p \supset q) \equiv (p \supset r)]$

৪. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি পঙ্‌ক্তির বাক্যগুলির মধ্যে সংগতি আছে কি নেই তা নির্ণয় কর :

(i) $(A \supset B),\ \sim A,\ B \vee C$

(ii) $A \supset B,\ C \supset D,\ \sim A \vee \sim C,\ \sim B \vee \sim D$

(iii) $A,\ A \supset B,\ B \supset C,\ \sim C$

(iv) $(A \supset B) \supset C,\ \sim C \supset A$

(v) $A \vee B,\ A \equiv B,\ \sim A \vee \sim B$

৫. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা নির্ণয় কর (সত্যশাখী গঠন করে) :

(1) $(A \vee B) \supset C \quad \therefore \quad C \vee A$

(2) $A \supset (B \supset C),\ A \cdot C \quad \therefore \quad B$

(3) $A \vee (B \cdot C),\ (A \vee B) \supset D \quad \therefore \quad C \cdot D$

(4) $\sim A \vee B,\ A \supset C,\ B \supset (C \supset E) \quad \therefore \quad A \supset E$

(5) $A \supset (B \vee C),\ B \supset C \quad \therefore \quad A \supset C$

(6) $(A \vee B) \supset (C \cdot D) \quad \therefore \quad A \supset C$

(7) $A \equiv (B \supset C),\ B \equiv (\sim A \cdot \sim C),\ C \equiv (A \vee \sim B),\ B \therefore A \vee C$

(8) $A \supset (B \cdot C),\ (B \vee C) \supset D \quad \therefore \quad A \supset D$

(9) $A \vee B,\ (A \vee D) \supset (C \cdot E),\ C \quad \therefore \quad B$

(10) $\{[(A \vee B) \cdot (A \vee \sim B)] \vee (\sim A \cdot B)\} \equiv B \therefore (A \cdot C) \vee (A \cdot \sim C)$

৬. সত্যশাখী গঠন করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি প্রতিপত্তি বাক্য :

(1) $[(A \supset B) \cdot (A \supset C)] \supset [A \supset (B \equiv C)]$

(2) $(A \supset B) \supset \{(A \supset C) \equiv [A \supset (B \cdot C)]\}$

(3) $(B \supset \sim C) \supset \{[(A \vee B) \cdot C] \equiv (A \cdot C)]\}$

(4) $(A \vee B) \supset \{[A \vee (B \supset C)] \supset (A \vee C)\}$

(5) $[(A \vee B) \supset (A \vee C)] \supset [A \vee (B \supset C)]$

৭. সত্যশাখী গঠন করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি সমার্থতা বাক্য :

(1) $[A \supset (B \supset C)] \equiv \{A \supset [B \supset (A \cdot C)]\}$

(2) $[(A \supset B) \supset (A \supset C] \equiv [A \supset (B \supset C)]$

(3) $[(A \vee C) \equiv (B \vee C)] \equiv [C \vee (A \equiv B)]$

(4) $[A \cdot (B \supset C)] \equiv \{A \supset [B \supset (A \cdot C]\}$

(5) $[(A \vee B \vee C) \supset D] \equiv [(A \supset D) \cdot (B \supset D) \cdot (C \supset D)]$

১৭

বিহিতাকার
(Normal Forms)

১. সত্যসারণী থেকে সমার্থতা উদ্ধার

সত্যসারণীতে শিরোনাম হিসাবে 'p', 'q', '$p \vee q$' ইত্যাদি ব্যবহার করে এদের নিচে '1', '0' লেখা হয়। যেমন '$p \vee q$'-এর সারণী দিতে গিয়ে লিখি

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
.....	.....	.....

এখানে দ্বিতীয় সারণীসারিতে 'p'-এর নিচে '1' লিখে বলা হয়েছে : 'p' সত্য ; এবং " 'p' সত্য"-এর পরিবর্তে লেখা যায় 'p'। আবার 'q'-এর নিচে '0' লিখে বলা হয়েছে : 'q' মিথ্যা ; এবং " 'q' মিথ্যা"-এর বদলে লেখা যায় '$\sim q$'। কাজেই "$p \vee q$"-এর সারণী এভাবেও লেখা যেত

		$p \vee q$
p	q	1
p	$\sim q$	1
$\sim p$	q	1
$\sim p$	$\sim q$	0

p	q	$p \vee q$
p	$\sim q$	$p \vee q$
$\sim p$	q	$p \vee q$
$\sim p$	$\sim q$	$\sim(p \vee q)$

মৌল সত্যসারণীর আকরস্তম্ভে প্রত্যেক সারিতে যে দুটি প্রতীক থাকে তাদের মধ্যে একটা প্রচ্ছন্ন "এবং" থাকে, আর দণ্ডায়মান রেখার বাম ও ডান ধারে প্রতীক সমষ্টির মধ্যে থাকে একটা প্রচ্ছন্ন "যদি—তাহলে—"। যথা, উক্ত সারণীর প্রথম সারিটি একটি প্রাকল্পিক বাক্য। বাক্যটি এই :

যদি 'p' সত্য এবং 'q' সত্য হয় তাহলে '$p \vee q$' সত্য।

বাক্যটি এভাবেও ব্যক্ত করতে পারতাম

$$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$$

এ কথার তাৎপর্য হল এই : প্রত্যেক মৌল সারণীর প্রত্যেকটি সারিকে একটি প্রাকল্পিক বাক্যের আকারে ব্যক্ত করা যেত। "$p \vee q$"-এর সারণী কিভাবে লেখা যেত তা দেখানো হল।

$$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$$
$$(p \cdot \sim q) \supset (p \vee q)$$
$$(\sim p \cdot q) \supset (p \vee q)$$
$$(\sim p \cdot \sim q) \supset \ \sim(p \vee q)$$

এ সারণীর প্রত্যেকটি বাক্য বৈধ, কেননা এগুলি বিশ্লেষক বাক্য—" v " (আর " · ")-এর সংজ্ঞা থেকে নিঃসৃত। এ কথার মানে—বাক্যগুলি প্রতিপাত্ত বাক্য।

আমরা দেখলাম, সত্যসারণীর আকরস্তম্ভের প্রত্যেক সারিতে যে প্রতীকসমষ্টি থাকে তাদের সংযৌগিক বাক্য বলে গণ্য করা যায়। এরূপ বাক্যকে সত্যসর্ত* বাক্য বলে উল্লেখ করব। এবং 'ব' দিয়ে সত্যসর্ত বাক্য বোঝাব।

"সত্যসর্ত বাক্য" কথাটি বারবার প্রয়োগ করতে হবে। কথাটির মানে ভাল করে বুঝে নাও। সত্যসারণীর আকরস্তম্ভে থাকে সত্যমূল্য বিন্যাস ঃ 11, 10, ইত্যাদি। এখন যদি কোনো বর্ণ প্রতীকের (যথা 'p'-এর) নিচে '1' থাকে তাহলে '1'-এর জায়গায় ঐ প্রতীক ('p') বসিয়ে, আর যদি কোনো বর্ণপ্রতীকের (যথা 'q'-এর) নিচে '0' থাকে তাহলে '0'-এর পরিবর্তে ঐ প্রতীকের নিষেধ ('$\sim q$') বসিয়ে এবং এভাবে কোনো আকরসারির প্রত্যেক সত্যমূল্যের বদলে সত্যসারণীর আকরস্তম্ভের শিরোনামের বর্ণপ্রতীক বা তার নিষেধ নিয়ে এবং প্রয়োজনীয় সংখ্যক " · " দিয়ে এদের যুক্ত করে যে সংযৌগিক বাক্য পাওয়া যায় তাকে বলে ঐ সারির সত্যসর্ত বাক্য—মানে ঐ সারিতে প্রচ্ছন্ন সত্যসর্ত বাক্য। "সত্যসর্ত বাক্য"-এর বদলে "আকরবাক্য" কথাটিও ব্যবহার করা যায়।
উদাহরণ ঃ

p	q	r	s	
1	1	1	1	
1	1	1	0	
1	1	0	1	

এখানে প্রথম সারিতে যে সত্যসর্ত বাক্য প্রচ্ছন্ন আছে তা হল ঃ $p \cdot q \cdot r \cdot s$, দ্বিতীয় সারিকে আকরবাক্যে রূপান্তরিত করলে পাই ঃ $p \cdot q \cdot r \cdot \sim s$, আর তৃতীয় সারির অনুষঙ্গী সত্যসর্ত বাক্য হল ঃ $p \cdot q \cdot \sim r \cdot s$।

এখন, কোনো বাক্য 'ভ' যদি কেবল একটি সত্যসর্তে হয় তাহলে বলা যায় ঃ সে সত্যসর্ত বাক্য 'ব' সত্য হলে এবং কেবল 'ব' সত্য হলে, 'ভ' সত্য। অর্থাৎ বলা যায় ঃ (ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব), বা ব ≡ ভ ; এ রকম ক্ষেত্রে সত্যসারণীতে '⊃'-এর পরিবর্তে " ≡ " ব্যবহার করা দরকার। এখন, সারণীকৃত সংজ্ঞা থেকে নিঃসৃত হয় বলে, এরূপ দ্বিপ্রাকল্পিক বৈধ, মানে ঃ 'ব' equiv 'ভ'।

উদাহরণ : "$p \downarrow q$" সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' মিথ্যা এবং 'q' মিথ্যা হয়। কাজেই " $\supset$ ", " $\equiv$ " ব্যবহার করে "$p \downarrow q$"-এর সারণী এভাবে লিখতে পারি :

$$(p \cdot q) \supset \sim(p \downarrow q)$$
$$(p \cdot \sim q) \supset \sim(p \downarrow q)$$
$$(\sim p \cdot q) \supset \sim(p \downarrow q)$$
$$(\sim p \cdot \sim q) \equiv (p \downarrow q)$$

আবার, কোনো বাক্য 'ভ' যদি কেবল একটি সত্যসর্তেই মিথ্যা হয় তাহলে বলা যায় : যদি সে সত্যসর্ত বাক্য 'ব' সত্য হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে 'ভ' মিথ্যা, মানে বলা যায় : ব ≡ ~ ভ। তাহলে "$p \vee q$"-এর সারণী এভাবে লিখতে পারি।

"$p \vee q$"-এর সারণী

$$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$$
$$(p \cdot \sim q) \supset (p \vee q)$$
$$(\sim p \cdot q) \supset (p \vee q)$$
$$(\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$$

বলা বাহুল্য প্রথম তিনটি বাক্য প্রতিপত্তি বাক্য, আর শেষেরটি সমার্থতা বাক্য। এবার অন্য সারণীগুলি " $\supset$ " দিয়ে, " $\equiv$ " দিয়ে লেখা যাক।

"$q \supset p$"-এর সারণী	"$p \supset q$"-এর সারণী	"$p \mid q$"-এর সারণী
$(p \cdot q) \supset (q \supset p)$	$(p \cdot q) \supset (p \supset q)$	$(p \cdot q) \equiv \sim(p \mid q)$
$(p \cdot \sim q) \supset (q \supset p)$	$(p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \supset q)$	$(p \cdot \sim q) \supset (p \mid q)$
$(\sim p \cdot q) \equiv \sim(q \supset p)$	$(\sim p \cdot q) \supset (p \supset q)$	$(\sim p \cdot q) \supset (p \mid q)$
$(\sim p \cdot \sim q) \supset (q \supset p)$	$(\sim p \cdot \sim q) \supset (p \supset q)$	$(\sim p \cdot \sim q) \supset (p \mid q)$

সত্যসারণীর একই সারির আকরস্তম্ভ-অংশ (পূর্বকল্প) আর ফলস্তম্ভ-অংশ (অনুকল্প)-এর সম্বন্ধ বুঝলাম। বুঝলাম, এদের সম্বন্ধ হয় প্রতিপত্তির সম্বন্ধ নয়ত সমার্থতার সম্বন্ধ। এখন প্রশ্ন : বিভিন্ন সারির মধ্যে কী সম্বন্ধ ? সারণীগুলিতে দু রকম সারি দেখি : কতগুলিতে ফলস্তম্ভে থাকে '1' বা* 'ভ' আকারের বাক্য, আর কতগুলিতে থাকে '0' বা** '~ভ' আকারের বাক্য। উক্ত প্রশ্নের জবাবে এখন বলতে পারি

যে সারিগুলির অনুকল্প অভিন্ন সেগুলির মধ্যে একটা প্রচ্ছন্ন " · " আছে।

উদাহরণ : "$p \vee q$"-এর সারণীটির প্রথম তিনটি প্রাকল্পিক বাক্যের মধ্যে দুটি " · " প্রচ্ছন্ন আছে। কাজেই এ সারি তিনটি এভাবে লিখতে পারি

$$[(p \cdot q) \supset (p \vee q)] \cdot [(p \cdot \sim q) \supset (p \vee q)] \cdot [(\sim p \cdot q) \supset (p \vee q)] \quad [১]$$

এখন, যুক্তিবিজ্ঞানের একটি সূত্র হল :

"(ব$_১$ ⊃ ভ) · (ব$_২$ ⊃ ভ) · (ব$_৩$ ⊃ ভ)…" equiv "(ব$_১$ ∨ ব$_২$ ∨ ব$_৩$ ∨ …) ⊃ ভ"

"$(P \supset S) \cdot (Q \supset S) \cdot (R \supset S)\ldots$" সম "$(P \vee Q \vee R \vee \cdots) \supset S$"

* '1' না লিখে : $(p \vee q)$, $(p \supset q)$—ইত্যাদি লিখলে পাই

** '0' না লিখে : $\sim(p \vee q)$, $\sim(p \supset q)$—ইত্যাদি লিখলে পাই

এ সূত্র (এটিও সঞ্চালনের সূত্র) অনুসারে [১]-কে এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)] \supset (p \vee q)$ [২]

তাহলে "$p \vee q$"-এর সারণীতে প্রথম তিনটি সারির প্রাকল্পিক বাক্যের বদলে [২] লিখতে পারি। নিচে "$p \vee q$"-এর দুটি সারণী দেওয়া হল। সারণী দুটি তুলনা কর।

"$p \vee q$"-এর সারণী

১ম সারি : $(p \cdot q) \supset (p \vee q)$
২য় সারি : $(p \cdot \sim q) \supset (p \vee q)$
৩য় সারি : $(\sim p \cdot q) \supset (p \vee q)$ $[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)] \supset (p \vee q)$
[১ম, ২য়, ৩য় সারি]
৪র্থ সারি : $(\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$ $(\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$

ডানদিকের সারণীটি লক্ষ করলে দেখবে—এখন বলতে পারি : "$p \vee q$" কেবল একটি সত্য-সর্তেই সত্য হতে পারে, পারে—যদি এবং কেবল যদি "$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$" সত্য হয়। তাহলে ডান ধারের সারণীটির প্রথম পঙক্তিতে "$\supset$"-এর বদলে "$\equiv$" ব্যবহার করা যায় এবং সারণীটি এভাবে লেখা যায় :

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \equiv (p \vee q)$$
$$(\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$$

এখন অন্যান্য সত্যাপেক্ষকের সারণীকে উক্তরূপে লিখতে পারি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে পূর্বেকার রূপটিও বামে দেখানো হল।

"$q \supset p$"-এর সারণী

১. $(p \cdot q) \supset (q \supset p)$
২. $(p \cdot \sim q) \supset (q \supset p)$ $(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \equiv (q \supset p)$
৩. $(\sim p \cdot q) \equiv \sim(q \supset p)$ [১, ২, ৪ সারি]
৪. $(\sim p \cdot \sim q) \supset (q \supset p)$ $(\sim p \cdot q) \equiv \sim(q \supset p)$

"$p \supset q$"-এর সারণী

১. $(p \cdot q) \supset (p \supset q)$
২. $(p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \supset q)$ $(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \equiv (p \supset q)$
৩. $(\sim p \cdot q) \supset (p \supset q)$ [১, ৩, ৪ সারি]
৪. $(\sim p \cdot \sim q) \supset (p \supset q)$ $(p \cdot \sim q) \equiv \sim(p \supset q)$

"$p \mid q$"-এর সারণী

১. $(p \cdot q) \equiv \sim(p \mid q)$
২. $(p \cdot \sim q) \supset (p \mid q)$ $(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \equiv (p \mid q)$
৩. $(\sim p \cdot q) \supset (p \mid q)$ [২, ৩, ৪ সারি]
৪. $(\sim p \cdot \sim q) \supset (p \mid q)$ $(p \cdot q) \equiv \sim(p \mid q)$

ডান ধারের সারণীগুলি যে আকারের সে আকারের সারণীকে আমরা দ্বিপঙ্‌ক্তি সারণী বলে উল্লেখ করব। লক্ষণীয়, এরূপ সারণীর দ্বিপ্রাকল্পিকগুলি বৈধ, সুতরাং এগুলি সমার্থতা বাক্য বলে গণ্য। উক্ত দ্বিপঙ্‌ক্তি সারণীগুলির দ্বিতীয় পঙ্‌ক্তিতে যে সমার্থতা পেলাম তা একত্র সংগ্রহ করা যাক।

"$\sim(p \mid q)$" সম "$p \cdot q$"
"$\sim(p \supset q)$" সম "$p \cdot \sim q$"
"$\sim(q \supset p)$" সম "$\sim p \cdot q$"
"$\sim(p \vee q)$" সম "$\sim p \cdot \sim q$"

একটি যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্র : যদি '$\sim P$' 'Q'-এর সমার্থক হয় তাহলে 'P' '$\sim Q$'-এর সমার্থক* । মানে

"'$\sim P$' সম 'Q'" equiv "'P' সম '$\sim Q$'"

এ সূত্র অনুসারে উক্ত তালিকাটি এভাবে লেখা যায়

"$p \mid q$" সম "$\sim(p \cdot q)$"
"$p \supset q$" সম "$\sim(p \cdot \sim q)$"
"$q \supset p$" সম "$\sim(\sim p \cdot q)$"
"$p \vee q$" সম "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"**

এবার "$p \equiv q$"-এর সারণীকে দ্বিপঙ্‌ক্তি সারণীতে রূপান্তরিত করা যাক।

'$p \equiv q$'-এর সারণী

$(p \cdot q) \supset (p \equiv q)$ $[(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)] \equiv (p \equiv q)$ [১, ৪ সারি]
$(p \cdot \sim q) \supset \sim(p \equiv q)$ $[(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)] \equiv \sim(p \equiv q)$
$(\sim p \cdot q) \supset \sim(p \equiv q)$ [২, ৩ সারি]
$(\sim p \cdot \sim q) \supset (p \equiv q)$

উক্ত দ্বিপঙ্‌ক্তি সারণী থেকে পাই

"$p \equiv q$" সম "$\sim[(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)]$"

(দ্বিতীয় পঙ্‌ক্তির ডান ধারের "$\sim$"-কে বামে এনে ও "$\equiv$" এর পরিবর্তে "সম" লিখে তারপর ক্রমান্তর করে)।

মৌল সারণীগুলির প্রথম পঙ্‌ক্তি থেকে যে সমার্থতা বাক্য পাই তা একত্রিত হল

"$p \mid q$" সম "$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"
"$p \supset q$" সম "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"
"$q \supset p$" সম $(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"
"$p \vee q$" সম "$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$"

* ১৩৬ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

** এ সমার্থতা বাক্যগুলির ডান ধার নিষেধ করে "সম"-এর বদলে "বিরুদ্ধ" লেখা যায় (এবং তাহলে সমার্থতার তালিকাটি বিরুদ্ধতার তালিকায় রূপান্তরিত হয়)। কেননা, যদি 'P' সম '$\sim Q$' হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে 'P' 'Q'-এর বিরুদ্ধ, মানে—"'P' সম '$\sim Q$'" equiv "'P' বিরুদ্ধ 'Q'"। ৫৫ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

তাছাড়া '$p \equiv q$'-এর সারণী থেকে পাই

"$p \equiv q$" সম "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"

"$p \cdot q$"-এর সত্যসারণী সম্বন্ধে এতক্ষণ কিছু বলিনি। এর সত্যসারণী থেকে জানা যায় যে এ বাক্যটি তিনটি ক্ষেত্রে মিথ্যা। এ ক্ষেত্রগুলি একত্র করে পাই

$$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \equiv \sim (p \cdot q)$$

আর উক্ত বাক্য থেকে পাই

"$p \cdot q$" সম "$\sim [\, (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)\,]$"

"$\sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim (\sim p \cdot q) \cdot \sim (\sim p \cdot \sim q)$" [ডি মরগেন]

"$(\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$" [ডি মরগেন]

সেরকম "$p \equiv q$" সম "$\sim [\, (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)\,]$"

"$\sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim (\sim p \cdot q)$"

"$(\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$"

উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে

১. কোনো বাক্য যদি একাধিক সত্যসর্তে সত্য হয় তাহলে বাক্যটিকে বৈকল্পিক আকারে ব্যক্ত করা যায়—যে বৈকল্পিকের প্রত্যেকটি বিকল্প সংযৌগিক।

উদাহরণ : "$p \equiv q$"-এর বদলে লেখা যায় : "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"

"$p \supset q$"-এর বদলে লেখা যায় : "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$

উক্তরূপ সমার্থক বাক্য পেতে হলে—

যে সত্যসর্ত বাক্যগুলি সত্য হলে প্রদত্ত বাক্য সত্য হয় সে সত্যসর্ত বাক্যগুলি বিকল্প হিসাবে নিয়ে একটি বৈকল্পিক বাক্য গঠন কর।

২. কোনো বাক্য যদি একাধিক সত্যসর্তে মিথ্যা হয় তাহলে বাক্যটিকে সংযৌগিক আকারে ব্যক্ত করা যায়—যে সংযৌগিকের প্রত্যেকটি সংযোগী (প্রাতিকল্পিক বাক্য, বা) বৈকল্পিক বাক্য।

উদাহরণ : "$p \equiv q$"-এর বদলে লেখা যায় : "$\sim (\sim p \cdot q) \cdot \sim (p \cdot \sim q)$"

[সংযোগীগুলি প্রাতিকল্পিক]

বা "$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$"

[সংযোগীগুলি বৈকল্পিক]

"$p \cdot q$"-এর বদলে লেখা যায় :

$$\sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim (\sim p \cdot q) \cdot \sim (\sim p \cdot \sim q)$$

বা $(\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$

উক্তরূপ (শেষোক্তরূপ) সমার্থক বাক্য পেতে হলে—

যে সত্যসর্ত বাক্যগুলি মিথ্যা হলে প্রদত্ত বাক্য মিথ্যা হয়, সে সত্যসর্ত বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকে নিষেধ করে, এ নিষেধিত বাক্যগুলিকে সংযুক্ত করে একটি সংযৌগিক গঠন কর, তারপর নিষেধিত বাক্যে ডি মরগেন প্রয়োগ করে এগুলিকে বৈকল্পিকে রূপান্তরিত কর।

আবার এটাও সহজবোধ্য যে

(৩) যদি কোনো বাক্য কেবল একটি সত্যসর্তে সত্য হয় তাহলে বাক্যটিকে সংযৌগিক আকারে (সত্যসর্ত বাক্য দিয়ে) ব্যক্ত করা যায়, যায়—

যে অনন্য সত্যসর্তে প্রদত্ত বাক্যটি সত্য তার অনুষঙ্গী সত্যসর্তবাক্য প্রদত্ত বাক্যটির পরিবর্তে লিখে।

উদাহরণ :

"$p \downarrow q$" সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'p' মিথ্যা ও 'q' মিথ্যা হয় "($p \downarrow q$"-এর সারণী দেখ)। সুতরাং "$p \downarrow q$"-এর পরিবর্তে লিখতে পারি : $\sim p \cdot \sim q$ (এটা "$p \downarrow q$"-এর সারণীর চতুর্থ আকরবাক্য)।

(৪) যদি কোনো বাক্য কেবল একটি সত্যসর্তে মিথ্যা হয় তাহলে বাক্যটিকে বৈকল্পিক আকারে (সত্যসর্ত বাক্যের নিষেধ নিয়ে) ব্যক্ত করা যায়, যায়—

যে অনন্য সত্যসর্তে প্রদত্ত বাক্যটি মিথ্যা তার অনুষঙ্গী সত্যসর্তবাক্যের নিষেধ নিয়ে এবং ডি মরগেন সূত্র প্রয়োগ করে যুগ্মনিষেধ বর্জন করে।

উদাহরণ :

"$p \supset q$"-এর সারণীর কেবল দ্বিতীয় সারির সত্যসর্তে বাক্যটি মিথ্যা। এ সারির আকরবাক্য হল : "$p \cdot \sim q$", সুতরাং "$p \supset q$"-এর পরিবর্তে লেখা যায় : '$\sim (p \cdot \sim q)$' বা '$\sim p \vee q$'। সেরূপ,

"p / q" সম "$\sim (p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$" ('p / q'-এর সারণী দেখ)

"$q \supset p$" সম "$\sim (\sim p \cdot q)$" সম "$p \vee \sim q$" ('$q \supset p$'-এর সারণী দেখ)

২. সারণীকৃত বর্ণনা থেকে বাক্য উদ্ধার

নিম্নোক্ত অসম্পূর্ণ সারণীটি লক্ষ কর।

p	q	—
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

সারণীটি কোন্ বাক্যের সত্যসারণী তা উহ্য রাখা হয়েছে ; এখানে একটি শীর্ষবিহীন* সারণী দেওয়া হয়েছে। এরূপ অসম্পূর্ণ সারণীকে আমরা সত্যাপেক্ষকের বর্ণনা বলে উল্লেখ করব। প্রশ্ন হল, উপরোক্ত সারণীটি কোন্ বাক্যের বর্ণনা ? উপরে যা বলা হয়েছে তা বুঝে থাকলে অনুক্ত বাক্যটি সহজেই উদ্ধার করতে পারবে। উক্ত প্রশ্নের উত্তরে বলা যায় অনুক্ত বাক্যটি নিম্নোক্ত বাক্য বা এর সমার্থক কোনো বাক্য :

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \qquad (১)$$

* এখানে শীর্ষ বলতে বুঝাচ্ছি : ফলস্তম্ভের শীর্ষদেশে যে বাক্য থাকে সে বাক্য

অথবা বলা যায়, অনুক্ত বাক্যটি নিম্নোক্ত বাক্যের সমার্থক

$$\sim(\sim p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$$

বা $\quad (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q) \qquad$ (২)

(১) পেয়েছি যে সত্যসর্তবাক্য সত্য হলে অনুক্ত বাক্যটি সত্য সেগুলিকে নিয়ে বৈকল্পিক গঠন করে, আর (২) পেয়েছি যে সর্তসত্য বাক্য মিথ্যা হলে অনুক্ত বাক্যটি মিথ্যা সেগুলির নিষেধ নিয়ে সংযৌগিক গঠন করে এবং সংযোগীগুলিতে ডি মরগেন প্রয়োগ করে।

(১) ও (২)-এর সত্যসারণী গঠন করলে দেখবে, উপরোক্ত ফলস্তম্ভটিই পাওয়া যাবে।

p	q	–
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

এ বর্ণনাটি কোন্ বাক্যের বর্ণনা ? উত্তর ঃ যে একক সত্যসর্তবাক্য সত্য হলে অনুক্ত বাক্যটি সত্য তা উল্লেখ করে পাই ঃ

$$\sim p \cdot q \qquad (১)$$

সুতরাং সারণীটি "$\sim p \cdot q$" বা এর সমার্থক কোনো বাক্যের সত্যসারণী। একথাও বলতে পারতাম ঃ সারণীটি

$$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$$

বা $\quad (\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \vee q) \qquad$ (২)

-এর সত্যসারণী।

(১) ও (২) সমার্থক, এদের সত্যসারণী গঠন করে দেখ ; উভয়ক্ষেত্রে ফলস্তম্ভে পাবে ঃ 0010 ॥ দেখা গেল, শীর্ষবিহীন সত্যসারণী বা সারণীকৃত বর্ণনা থেকে অনুক্ত বাক্য উদ্ধার করা যায় দুভাবে। করা যায়, ঠিক। তবে নিম্নোক্ত বিধানটি মেনে চললে হ্রস্বতর বাক্য পাবে।

দেখবে, অনুক্ত বাক্যটি মিথ্যা হয় এরূপ ক্ষেত্র অপেক্ষাকৃত কম, নাকি সত্য হয় এরূপ ক্ষেত্র কম। যে ক্ষেত্রগুলি কম সেগুলি অনুসারে অনুক্ত বাক্য উদ্ধার করবে। উদাহরণ

p	q	r	–
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

লক্ষণীয়, অনুক্ত বাক্যটি পাঁচটি ক্ষেত্রে সত্য, তিনটি ক্ষেত্রে মিথ্যা। '0'-এর ক্ষেত্রগুলির অনুষঙ্গী সত্য-সর্তবাক্য নিষেধ করে এবং নিষেধিত বাক্যগুলিকে সংযোগী হিসাবে ব্যবহার করে পাই

$$\sim(p \cdot q \cdot r) \cdot \sim(p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

বা $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee r)$ (১)

আর যদি '1'-এর ক্ষেত্রগুলির অনুষঙ্গী সত্যসর্তবাক্যগুলি দিয়ে বৈকল্পিক গঠন করতাম তাহলে পেতাম, নিম্নোক্ত দীর্ঘতর বাক্যটি ঃ

$$(p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r) \quad (২)$$

এবার নিম্নোক্ত সারণীকৃত বর্ণনা দুটি লক্ষ কর।

p	q	r	–
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

p	q	r	–
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

স্পষ্টতই প্রথম বর্ণনাটি একটি স্বতসত্য বাক্যের বর্ণনা, আর দ্বিতীয়টি স্বতমিথ্যা বাক্যের। এরূপ ক্ষেত্রে অনুক্ত বাক্য উদ্ধার করতে হলে সব সত্যসর্তবাক্য উল্লেখ করার দরকার নেই। বলার দরকার নেই : প্রথম বর্ণনাটি নিম্নোক্ত বাক্যের বর্ণনা

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee$$
$$(\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

(১)

বলার দরকার নেই : দ্বিতীয় বর্ণনাটি নিম্নোক্ত বাক্যের বর্ণনা

$$\sim(p \cdot q \cdot r) \cdot \sim(p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(\ldots\ldots$$

বা $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot$
$(p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$ (1)

আরো সংক্ষেপে বলতে পারি—

প্রথম শীর্ষবিহীন সারণীটি নিম্নোক্ত বাক্যের সত্যসারণী

$$p \vee \sim p \vee q \vee r \qquad (১')$$

আর দ্বিতীয়টি নিম্নোক্ত বাক্যের

$$p \cdot \sim p \cdot q \cdot r \qquad (1')$$

(লক্ষণীয় (১) ও (১') সমার্থক, (1) ও (1') সমার্থক। স্বতসত্য বাক্য মাত্রই পরস্পরের সমার্থক, সেরূপ সব স্বতমিথ্যা বাক্য সমার্থক।) তাহলে সাধারণভাবে বলতে পারি—

কোনো বর্ণনা থেকে যদি বোঝা যায় যে বর্ণিত বাক্যটি স্বতসত্য তাহলে বাক্যটিকে

$$p \vee \sim p \vee \cdots$$

আকারে,

আর যদি বোঝা যায় বাক্যটি স্বতমিথ্যা তাহলে বাক্যটিকে

$$p \cdot \sim p \cdot \cdots$$

আকারে, ব্যক্ত করা যায়।

৩. সরলীকরণ : বৈধতা অবৈধতা ও সমার্থতা প্রমাণ

দেখলাম, কোনো দীর্ঘ বৈকল্পিক বা সংযৌগিক বাক্যকে অনেক সরল আকারে ব্যক্ত করা যায়। যথা, উপরোক্ত (১)-এর পরিবর্তে অপেক্ষাকৃত সরল (১′) লিখতে পারি। কি করে জটিল বাক্যকে অপেক্ষাকৃত সরল বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় তা নিচে দেখানো হল। এরূপ রূপান্তর সমার্থতা প্রমাণ বলে গণ্য। আবার, রূপান্তর করে যদি স্বতসত্য বাক্য বলে স্বীকৃত বাক্যে পৌঁছাই তাহলে বুঝতে হবে মূল বাক্যটি বৈধ, আর যদি স্বতমিথ্যা বা পরতসাধ্য বাক্য বলে স্বীকৃত বাক্যে পৌঁছাই তাহলে অবশ্যই বাক্যটি অবৈধ। কাজেই এরূপ রূপান্তর বাক্যের বৈধতা অবৈধতা প্রমাণ বলে গণ্য। সরলীকরণে যে সব সূত্র ব্যবহারের প্রয়োজন সেগুলি একত্র সংগৃহীত হল। প্রথম আটটি সূত্র অধ্যায় ১৫ বিভাগ ৫-এতে আলোচিত হয়েছে (২৭৪ পৃঃ দ্রষ্টব্য)।

(১)	প্রতিপাদ্য-সংযোগী বর্জন	"$p \cdot (p \vee q)$"	সম	"p"
(২)	প্রতিপাদক-বিকল্প বর্জন	"$p \vee (p \cdot q)$"	সম	"p"
(৩)	সংকোচনের সূত্র	"$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$"	সম	"p"
(৪)	সংকোচনের সূত্র	"$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$"	সম	"p"
(৫)	স্বতসত্য (সংযোগী) বর্জন	"$p \cdot (q \vee \sim q)$"	সম	"p"
(৬)	স্বতমিথ্যা (বিকল্প) বর্জন	"$p \vee (q \cdot \sim q)$"	সম	"p"
(৭)	আত্তীকরণের সূত্র	"$p \cdot (\sim p \vee q)$"	সম	"$p \cdot q$"
(৮)	আত্তীকরণের সূত্র	"$p \vee (\sim p \cdot q)$"	সম	"$p \vee q$"
(৯)	পুনরুক্তি সংকোচন*	"$p \cdot p$"	সম	"p"
(১০)	পুনরুক্তি সংকোচন*	"$p \vee p$"	সম	"p"
(১১)	যুগ্ম ঢেউ বর্জন	"$\sim \sim p$"	সম	"p"
(১২)	ডি মরগেন্	"$\sim (p \vee q)$"	সম	"$\sim p \cdot \sim q$"
(১৩)	ডি মরগেন্	"$\sim (p \cdot q)$"	সম	"$\sim p \vee \sim q$"
(১৪)	সংকোচক সঞ্চালন	"$(p \cdot q) \vee (p \cdot r)$"	সম	"$p \cdot (q \vee r)$"
(১৫)	সংকোচক সঞ্চালন	"$(p \vee q) \cdot (p \vee r)$"	সম	"$p \vee (q \cdot r)$"

---

* আমাদের পূর্বপরিচিত নাম ঈষৎ পরিবর্তিত হল। এ সূত্র দুটি সাধারণভাবে ব্যক্ত করা যায় এরূপে :

(৯′) অভিন্ন সংযোগীগুলির একটি রেখে অন্যগুলি বর্জন করা যায়। মানে "প · ফ · ব · প · ভ · প ···" এর বদলে লেখা যায় : "প · ফ · ব · ভ ··"।

(১০′) অভিন্ন বিকল্পগুলির একটিকে রেখে অন্যগুলি বর্জন করা যায়। মানে "প ∨ ফ ∨ ব ∨ প ∨ ভ ∨ প ∨···" এর বদলে লেখা যায় : "প ∨ ফ ∨ ব ∨ ভ ∨···"

নিচে সরলীকরণের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল। মনে রাখতে হবে প্রত্যেকটি অবরোহিত বাক্য পূর্ববর্তী বাক্যের সমার্থক।

(1)

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ ১

$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)] \vee [(\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$ ২ [১-এর যূথীকরণ]

$[(p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [\sim p \cdot (q \vee \sim q)]$ ৩* [২-তে সংকোচক সঞ্চালন]

$p \vee \sim p$ ৪ [৩ থেকে স্বতসত্য বর্জন]

এ সরলীকরণ থেকে প্রমাণ হল ১ ও ৪ সমার্থক। আবার ৪ বৈধ, সুতরাং প্রমাণিত হল ১-ও বৈধ।

(2)

$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$

$(\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$ [ডি মরগেন ও যুগ্ম ঢেউ বর্জন]

$[(\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)] \cdot [(p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)]$ [যূথীকরণ]

$[\sim p \vee (\sim q \cdot q)] \cdot [p \vee (\sim q \cdot q)]$** [সংকোচক সঞ্চালন]

$\sim p \cdot p$

$p \cdot \sim p$

প্রদত্ত বাক্য আর এর রূপান্তর সমার্থক। আবার, "$p \cdot \sim p$" স্বতমিথ্যা, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটিও স্বতমিথ্যা।

(3)

$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r)$
$\vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$

$\{[(p \cdot q) \cdot r] \vee [(p \cdot q) \cdot \sim r]\} \vee \{[(p \cdot \sim q) \cdot r] \vee [(p \cdot \sim q) \cdot \sim r]\}$
$\vee \{[(\sim p \cdot q) \cdot r] \vee [(\sim p \cdot q) \cdot \sim r]\} \cdot \{[(\sim p \cdot \sim q) \cdot r)]$
$\vee [(\sim p \cdot \sim q) \cdot \sim r)]\}$

$\{(p \cdot q) \cdot (r \vee \sim r)\} \vee \{(p \cdot \sim q) \cdot (r \vee \sim r)\} \vee \{(\sim p \cdot q) \cdot (r \vee \sim r)\}$
$\cdot \{(\sim p \cdot \sim q) \cdot (r \vee \sim r)\}$

$\{p \cdot q\} \vee \{p \cdot \sim q\} \vee \{\sim p \cdot q\} \vee \{\sim p \cdot \sim q\}$

$[\underline{\{p \cdot q\} \vee \{p \cdot \sim q\}}] \vee [\underline{\{(\sim p \cdot q)\} \vee \{\sim p \cdot \sim q\}}]$

$p \vee \sim p$ [সংকোচন †]

* সংকোচনের সূত্র প্রয়োগ করে ২ থেকে সরাসরি ৪ নিষ্কাশন করা যেত ; কাজেই পঙ্‌ক্তিটি বাদ দেওয়া যেত।

** সংকোচনের সূত্র প্রয়োগ করলে এ পঙ্‌ক্তিটি বাদ দেওয়া যেত।

† কোন অংশের সংকোচন করা হল রেখায়িত তা দেখানো হল। প্রথম অংশের সঙ্কুচিত রূপ 'p' আর দ্বিতীয় অংশের '$\sim p$'।

(4)

$$\sim(p \cdot q \cdot r) \cdot \sim(p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot r) \cdot \sim(p \cdot \sim q \cdot \sim r) \cdot$$
$$\sim(\sim p \cdot q \cdot r) \cdot \sim(\sim p \cdot q \cdot \sim r) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r)$$
$$\cdot \sim(\sim p \cdot \sim p \cdot \sim r)$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r)$$
$$\cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$$

$$\{ [(\sim p \vee \sim q) \vee \sim r] \cdot [(\sim p \vee \sim q) \vee r] \} \cdot \{ [(\sim p \vee q) \vee \sim r] \cdot$$
$$[(\sim p \vee q) \vee r \} \cdot \{ [(p \vee \sim q) \vee \sim r] \cdot [(p \vee \sim q) \vee r]\} \cdot$$
$$\{ [(p \vee q) \vee \sim r] \cdot [(p \vee q) \vee r] \}$$

$$[\sim p \vee \sim q \vee (\sim r \cdot r)] \cdot [\sim p \vee q \vee (\sim r \cdot r)] \cdot [(p \vee \sim q) \vee (\sim r \cdot r)] \cdot$$
$$[p \vee q \vee (\sim r \cdot r)]$$

$$\underline{[\sim p \vee \sim q] \cdot [\sim p \vee q]} \cdot \underline{[p \vee \sim q] \cdot [p \vee q]}$$

$\sim p \cdot p$ (সংকোচন)

$p \cdot \sim p$

(5)

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$$
$$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)] \vee (\sim p \cdot q)$$
$$[\underline{p \cdot (q \vee \sim q)}] \vee (\sim p \cdot q)$$
$$\underline{p \vee (\sim p \cdot q)}$$

$p \vee q$ [আত্তীকরণ]

নিষ্কাশিত সমার্থকটি পরতসাধ্য, সুতরাং প্রথম বাক্যটিও পরতসাধ্য।

(6)

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot$$
$$(p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot \{ [(\sim p \vee q) \vee \sim r] \cdot [(\sim p \vee q) \vee r] \} \cdot$$
$$\{ [(p \vee \sim q) \vee \sim r] \cdot [(p \vee \sim q) \vee r] \} \cdot \{ [(p \vee q) \vee \sim r] \cdot [(p \vee q) \vee r] \}$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot \{ (\sim p \vee q) \vee (\sim r \cdot r) \} \cdot \{ (p \vee \sim q) \vee (\sim r \cdot r) \} \cdot$$
$$\{ (p \vee q) \vee (\sim r \cdot r) \}$$

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot \{ \sim p \vee q \} \cdot \underline{\{ p \vee \sim q \} \cdot \{ p \vee q \}}$$

$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot \{ \sim p \vee q \} \cdot p$ [সংকোচন]

$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot \underline{p \cdot \{ \sim p \vee q \}}$

$(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot p \cdot q$ [আত্তীকরণ]

$q \cdot \{\underline{p \cdot [\sim p \vee (\sim q \vee r)}]\}$

$q \cdot \{p \cdot (\sim q \vee r)\}$ [আত্তীকরণ]

$p \cdot \{\underline{q \cdot (\sim q \vee r)}\}$

$p \cdot q \cdot r$ [আত্তীকরণ]

সর্বশেষ বাক্যটি স্পষ্টতই পরতসাধ্য, সুতরাং প্রথম বাক্যটিরও পরতসাধ্য, সুতরাং অবৈধ।

৪. বুলীয় বিস্তার (Boolean Expansion)

প্রদত্ত বাক্যের সরলীকরণ করে আমরা বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করার চেষ্টা করেছি। অনেক ক্ষেত্রে এরূপ সরলীকরণের কোনো প্রয়োজন হয় না ; বাক্যের অঙ্গগুলির সংখ্যা গুণেই বলে দেওয়া যায় বাক্যটি স্বতসত্য,স্বতমিথ্যা নাকি পরতসাধ্য। কি করে তা সম্ভব তাই নিচে ব্যাখ্যা করা হল। আমরা দেখেছি সত্যাপেক্ষ বাক্যকে

I $(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (— \cdot —) \vee \cdots$
$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r) \vee (— \cdot — \cdot —) \vee \cdots$, অথবা

II $(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (— \vee —) \cdot \cdots$
$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (— \vee — \vee —) \cdot \cdots$

আকারে ব্যক্ত করা যায়। উক্ত আকারের বাক্য বুলীয় বিস্তার (Boolean Expansion) নামে খ্যাত। প্রথম প্রকারের বাক্যকে বলে বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার, আর দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যকে সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার।

৫. বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার (Alternative Boolean Expansion)

এরূপ বাক্যের নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষণীয়। এরূপ বাক্যে—

"~", " . ", " v " ছাড়া অন্য কোনো যোজক থাকে না,

কোথাও যূথনিষেধ* থাকে না, থাকে কেবল আণবিক নিষেধ,**

প্রত্যেকটি বিকল্প ভিন্ন ভিন্ন,

প্রত্যেকটি বিকল্প একটি সংযৌগিক বাক্য

প্রত্যেক বিকল্পে থাকে প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক বা তার নিষেধ—মানে
এমন হতে পারে না যে একটি বিকল্পে আছে দুটি প্রতীক (যথা : p, q) আর একটিতে তিনটি (যথা : p, q, r)।

বর্ণ প্রতীকগুলি (সংযোগীগুলি) প্রত্যেক বিকল্পে থাকে একই ক্রমে—মানে
এমন হতে পারে না যে একটি বিকল্পে প্রথমে 'p', আর একটিতে প্রথমে 'q' বা '$\sim q$'।

উক্তরূপ বিকল্পকে আমরা নিখুঁত বিকল্প বলে অভিহিত করব।

কোনো বাক্যের সত্যসারণী থেকে কি করে বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার উদ্ধার করতে হয় তা আমরা জানি। জানি —যে সত্যসর্ত বাক্যগুলি সত্য হলে কোনো বাক্য 'ব' সত্য, সে বাক্যগুলি দিয়ে বৈকল্পিক বাক্য গঠন করলে 'ব'-এর বিস্তার পাওয়া যায়। এখন ধরা যাক, প্রদত্ত বাক্য 'ব' স্বতসত্য। তাহলে বাক্যটির সত্যসারণী থেকে এর বুলীয় বিস্তার

* অনেকাঙ্গ বাক্যের নিষেধ, যথা : $\sim(p \vee q)$

** একাঙ্গ বাক্যের নিষেধ, যথা : $\sim p$, $\sim q$।

পেতে হলে প্রত্যেকটি সম্ভাব্য সত্যাসর্ত বাক্য বিকল্প হিসাবে উল্লেখ করতে হবে। যথা :

	$p \vee \sim p \vee q$
$p \cdot q$	1
$p \cdot \sim q$	1
$\sim p \cdot q$	1
$\sim p \cdot \sim q$	1

এ সারণী থেকে পাই নিম্নোক্ত বিস্তারটি :

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ (১)

এখন, উক্ত সত্যসারণী যদি দেওয়া নাও থাকত, (১) কোন্ বাক্যের বুলীয় বিস্তার তা যদি বলা নাও থাকত, তাহলেও কেবল (১)-এর অন্তর্গত বিকল্পগুলির সংখ্যা গণনা করেই বলতে পারতাম (চারটি বিকল্প আছে বলে) মূল বাক্যটি বা তার বুলীয় বিস্তার বৈধ। কেননা : দুটি (স্বতন্ত্র) অঙ্গ বিশিষ্ট বাক্যের ক্ষেত্রে সম্ভাব্য সত্যমূল্য বিন্যাস হল চারটি (2^n) আর (১)-এতে চারটি সম্ভাব্য সত্যাসর্ত বাক্যেরই উল্লেখ আছে। সাধারণভাবে বলতে পারি— যদি কোনো বাক্য স্বতসত্য হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে বাক্যটির বুলীয় বিস্তারে সকল সম্ভাব্য সত্যাসর্ত বাক্য বিকল্প হিসাবে উপস্থিত থাকতে পারে ; মানে, যদি কোনো সত্যাসর্ত বাক্য অনুপস্থিত থাকে, অন্তত একটিও অনুপস্থিত থাকে, তাহলে বাক্যটি পরতসাধ্য। কাজেই সূত্রাকারে বলতে পারি—

> যে বাক্যে, বা যে বাক্যের বুলীয় বিস্তারে, n সংখ্যক (স্বতন্ত্র) বর্ণ প্রতীক, সে বাক্যের বুলীয় বিস্তারে যদি 2^n নিখুঁত বিকল্প থাকে তাহলে সে বাক্যটি, বা বিস্তারটি, স্বতসত্য, আর যদি 2^n-এর চেয়ে কম সংখ্যক বিকল্প থাকে তাহলে বাক্যটি, বা বিস্তারটি, পরতসাধ্য।

উদাহরণ :

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

এ বুলীয় বিস্তারে ৮টি বিকল্প, 2^n বিকল্প ($n=3$), সুতরাং এ বাক্যটি বৈধ।

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$$

এ বাক্যে 2^n বিকল্প ($n=2$) নেই, সুতরাং বাক্যটি স্বতসত্য নয়, পরতসাধ্য।

বিস্তার থেকে মূল বাক্য উদ্ধার : মনে করা যাক, একটি বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার দেওয়া আছে, কিন্তু কোন্ বাক্যের বিস্তার তা বলা হয় নি। তোমাকে মূল বাক্যটি উদ্ধার করতে হবে। এ সমস্যার সমাধান অতি সহজ। যদি 'ব' বাক্যকে বিস্তার করে 'ভ' পাওয়া যায় তাহলে 'ভ'-কে সরলীকরণ করে 'ব' পাওয়া যায়। উদাহরণ : ৩৩৩ পৃষ্ঠায় (1) ও (3) দ্রষ্টব্য ; এখানে প্রত্যেকটি রূপান্তরের সর্বশেষ বাক্য বিস্তার করে প্রথম বাক্যটি পাওয়া যায়, আর প্রথমটিকে সরলীকরণ করে সর্বশেষটি পাওয়া গেছে। তবে সব সময় সরলীকরণের

বাক্যের অন্তর্গত প্রত্যেকটি।

প্রয়োজন হয় না। যদি বিস্তারটি স্বতসত্য হয় (এতে 2^n বিকল্প থাকে) তাহলে সরাসরি বলতে পারি বিস্তারটি "$p \vee \sim p$" আকারের বাক্যের বিস্তার। আর যদি বিস্তারটি পরতসাধ্য হয় (2^n-এর কম সংখ্যক বিকল্প থাকে) তাহলে বিস্তারটি সরলীকরণ না করে, এতে যে বিকল্প অনুপস্থিত তার নিষেধকে সরলীকরণ করলেই মূল বাক্য পাওয়া যায়। আরো বিশদভাবে—

> 'ব'-এর বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তারে যে সত্যসর্ত বাক্য বা বাক্যগুলি অনুপস্থিত 'ব' বা তার বিস্তারটি সে সত্যসর্ত বাক্যের নিষেধের, বা সত্যসর্ত বাক্যগুলি দিয়ে গঠিত বিকল্পের নিষেধের, সমার্থক।

উদাহরণ ১ : $(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$—কোন্ বাক্যের বিস্তার ? উত্তর : এতে "$\sim p \cdot q$" সম্ভাবনাটি নেই, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$\sim(\sim p \cdot q)$"-এর বা "$p \vee \sim q$"-এর সমার্থক। সুতরাং বলতে পারি প্রদত্ত বাক্যটি "$p \vee \sim q$"-এর বিস্তার।

উদাহরণ ২ : $(p \cdot q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee$
$(\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$

এখানে "$p \cdot q \cdot r$" সত্যসর্ত বাক্যটি নেই, সুতরাং বাক্যটি "$\sim(p \cdot q \cdot r)$" বা "$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$"-এর সমার্থক।

সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$"-এর বৈকল্পিক বিস্তার।

উদাহরণ ৩ : $(p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee$
$(\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$

এখানে "$p \cdot q \cdot r$" এবং "$p \cdot q \cdot \sim r$" অনুপস্থিত, সুতরাং বাক্যটি
"$\sim[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r)]$"-এর বা
"$(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)$"-এর বা
[দুবার ডি মরগেন প্রয়োগ]

"$\sim p \vee \sim q \vee (r \cdot \sim r)$"-এর বা
"$\sim p \vee \sim q$" -এর সমার্থক

সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$\sim p \vee \sim q$"-এর বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার।

বৈকল্পিক বিস্তার সম্পর্কে আর একটি কথা। উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে—কোনো স্বতমিথ্যা বাক্যের (যথা "$p \cdot \sim p \cdot q$"-এর) বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার সম্ভব নয়। কেননা, কোনো বাক্যের বৈকল্পিক বিস্তার পেতে হলে যে সত্যসর্ত বাক্য সত্য হলে বাক্যটি সত্য, সে সত্যসর্ত বাক্য উল্লেখ করতে হয় ; কিন্তু স্বতমিথ্যা বাক্য কোনো সত্যসর্তেই সত্য নয়, কাজেই এরূপ বাক্যের বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার সম্ভব নয়। যথা, "$p \cdot \sim p \cdot q$"-এর বিস্তার করতে হলে : $(p \cdot q)$, $(p \cdot \sim q)$, $(\sim p \cdot q)$, $(\sim p \cdot \sim q)$—এ ক্ষেত্রগুলির কোনোটি উল্লেখ করা যাবে না।

৬. সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার (Conjunctive Boolean Expansion)

৩৩৫ পৃষ্ঠায় II চিহ্নিত বাক্যগুলি লক্ষ কর। এগুলি বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তারের আকার। এরূপ বাক্যে—

“~”, “·”, “v” ছাড়া অন্য কোনো যোজক থাকে না,
কোথাও যূথনিষেধ থাকে না, থাকতে পারে কেবল আণবিক নিষেধ
প্রত্যেকটি সংযোগী ভিন্ন ভিন্ন
প্রত্যেকটি সংযোগী একটি বৈকল্পিক বাক্য
প্রত্যেক সংযোগীতে থাকে প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক
বর্ণপ্রতীকগুলি প্রত্যেক বিকল্পে একই ক্রমে থাকে।

উক্তরূপ সংযোগীকে আমরা নিখুঁত সংযোগী বলে অভিহিত করব।

কোনো বাক্যের সত্যসারণী থেকে কি করে সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার উদ্ধার করতে হয় তা আমরা জানি। জানি যে—যে সত্যসর্ত বাক্য সত্য হলে কোনো বাক্য ‘ব’ মিথ্যা সে সত্যসর্ত-বাক্যগুলি নিষেধ করে নিষেধিত বাক্যগুলি নিয়ে একটি সংযৌগিক গঠন করলে ও সংযোগী-গুলিতে ডি মরগেন প্রয়োগ করলে ‘ব’-এর সংযৌগিক বিস্তার পাওয়া যায়। ধরা যাক ‘ব’ একটি স্বতমিথ্যা বাক্য, যথা : $p \cdot \sim p \cdot q$। এ বাক্যের সংযৌগিক বিস্তার পেতে হলে প্রত্যেকটি সম্ভাব্য সত্যসর্তবাক্য নিষেধ করে এভাবে অগ্রসর হতে হবে :

$$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot q) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q)$$
$$(\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$$

এখানে শেষোক্ত বাক্যটি “$p \cdot \sim p \cdot q$”-এর সংযৌগিক বিস্তার। এরূপ বিস্তারে প্রত্যেকটি সংযোগী আসলে এক একটি সত্যসর্তবাক্যের নিষেধ। কেবল স্বতমিথ্যা বাক্যই সকল সম্ভাব্য সত্যসর্তে মিথ্যা। কাজেই বোঝা যায়—কোনো সংযৌগিক বিস্তারে যদি সকল সত্যসর্তবাক্যের নিষেধ থাকে,—মানে, সকল সম্ভাব্য সত্যসর্তবাক্য নিষেধ করে যতগুলি বৈকল্পিক পাওয়া যায় ততগুলি বৈকল্পিক বাক্য সংযোগী হিসাবে থাকে, তাহলে এবং কেবল তাহলে মূল বাক্য বা এর সংযৌগিক বিস্তার স্বতমিথ্যা। তার মানে—

> যে বাক্যে, বা যে বাক্যের সংযৌগিক বুলীয় বিস্তারে, n সংখ্যক (স্বতন্ত্র) বর্ণপ্রতীক সে বাক্যের বুলীয় বিস্তারে যদি 2^n নিখুঁত সংযোগী থাকে তাহলে সে বাক্যটি বা বিস্তারটি স্বতমিথ্যা, আর যদি 2^n-এর চেয়ে কম সংখ্যক সংযোগী থাকে তাহলে বাক্যটি পরতসাধ্য।

উদাহরণ ১ : $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot$
$(\sim p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$

এ বাক্যে 2^n (এখানে $n=3$) সংযোগী আছে, সুতরাং বাক্যটি স্বতমিথ্যা। “$p \cdot \sim p \cdot q \cdot r$”-এর সত্যসারণী গঠন করে দেখ, আকরস্তম্ভে যে সত্যসর্তবাক্য পাবে উক্ত সংযোগীগুলি তাদের নিষেধ।

উদাহরণ ২ : $(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot$
$(p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$

এখানে তিনটি বর্ণপ্রতীক, সুতরাং 2^n হল ৮, কিন্তু এতে আছে ৭টি সংযোগী ; সুতরাং বাক্যটি পরতসাধ্য।

আমরা বলেছি কোনো বাক্য 'ব'-এর সংযৌগিক বিস্তারে যদি 2^n-এর চেয়ে কম সংখ্যক সংযোগী থাকে তাহলে 'ব' বাক্যটি পরতসাধ্য। এরূপ পরতসাধ্য 'ব' সম্বন্ধে একটি সূত্র উল্লেখ করা যায় :

> 'ব'-এর সংযৌগিক বিস্তারে যে (সত্যসর্তবাক্য-নিষেধ-জ্ঞাপক) বৈকল্পিক বাক্য অনুপস্থিত 'ব' বা তার বিস্তারটি সে বৈকল্পিকের নিষেধের, বা বৈকল্পিকগুলি দিয়ে গঠিত সংযৌগিকের নিষেধের, সমার্থক।

বিস্তার থেকে মূল বাক্য উদ্ধার : ধরা যাক, কোনো সংযৌগিক বিস্তার দেওয়া আছে ; বিস্তারটি কোন্ বাক্যের বিস্তার তা উদ্ধার করতে হবে। এ কাজ করতে পারি দুভাবে : প্রদত্ত বাক্যকে সরলীকরণ করে (৩৩৩-'৪ পৃষ্ঠায় (2) ও (6) দ্রষ্টব্য), বা উক্ত সূত্র অনুসারে—অনুপস্থিত অঙ্গের নিষেধের সরলীকরণ করে।

উদাহরণ ১ : $(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$—কোন্ বাক্যের বিস্তার? উত্তর : এতে "$\sim p \vee q$" নেই, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$\sim(p \vee q)$"-এর বিস্তার। আবার, এ বাক্যটি "$p \cdot \sim q$"-এর সমার্থক, সুতরাং বলতে পারি প্রদত্ত বাক্যটি "$p \cdot \sim q$"-এর সংযৌগিক বিস্তার।

উদাহরণ ২ : $(\sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot$
$(p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$

এখানে নেই "$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$" সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$\sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$" বা "$p \cdot q \cdot r$"-এর সমার্থক। সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$p \cdot q \cdot r$"-এর সংযৌগিক বিস্তার।

উদাহরণ ৩ : $(\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot$
$(p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r)$

এখানে "$\sim p \vee \sim q \vee \sim r$" এবং "$\sim p \vee \sim q \vee r$" অনুপস্থিত, সুতরাং বাক্যটি

"$\sim[(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)]$"—এর, বা
"$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r)$" —এর, বা
"$p \cdot q \cdot (r \vee \sim r)$" —এর, বা
"$p \cdot q$" —এর সমার্থক।

সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি "$p \cdot q$"-এর বুলীয় বিস্তার।

সংযৌগিক বিস্তার সম্পর্কে আর একটি কথা। উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে—কোনো স্বতসত্য বাক্যের (যথা "$p \vee \sim p \vee q$"-এর) সংযৌগিক বুলীয়

বিস্তার সম্ভব নয়। কেননা, কোনো বাক্যের সংযোগিক বিস্তার পেতে হলে যে সত্যসর্ত-বাক্য সত্য হলে বাক্যটি মিথ্যা তা উল্লেখ করতে হয়, কিন্তু স্বতসত্য বাক্য কোনো সত্যসর্তেই মিথ্যা নয়। যথা "$p \vee \sim p \vee q$"-এর বিস্তার পেতে হলে: $\sim(p \cdot q)$, $\sim(p \cdot \sim q)$, $\sim(\sim p \cdot q)$, $\sim(\sim p \cdot \sim q)$ বা যথাক্রমে: $(\sim p \vee \sim q)$, $(\sim p \vee q)$, $(p \vee \sim q)$, $(p \vee q)$ —এ ক্ষেত্রগুলির কোনোটি উল্লেখ করা যাবে না।

৭. সত্যসারণীর সাহায্য না নিয়ে বুলীয় বিস্তার গঠন করা

বুলীয় বিস্তারণ একটি নির্ণয় পদ্ধতি—এ পদ্ধতি প্রয়োগ করে কোনো বাক্য স্বতসত্য কি স্বতমিথ্যা নাকি পরতসাধ্য তা নির্ণয় করা যায়। প্রশ্ন উঠতে পারে—এ পদ্ধতির কী প্রয়োজন? যে সত্যসারণী থেকে বুলীয় বিস্তার উদ্ধার করা হয় সে সারণী থেকেই ত জানা যায় সারণীকৃত বাক্যটি বৈধ না অবৈধ। তাহলে কোনো বাক্যের বুলীয় বিস্তার করে কী লাভ? এ প্রশ্নের উত্তর হল এই। বুলীয় বিস্তার পদ্ধতি সহজবোধ্য করবার জন্য এতক্ষণ সত্যসারণীর সাহায্য নিয়েছি, কিন্তু সত্যসারণী গঠন না করেও বুলীয় বিস্তার পাওয়া যায়। কাজেই সত্যসারণীর সাহায্য না নিয়েও বুলীয় বিস্তার দিয়ে বাক্যের বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করা যায়।

সত্যসারণীর সাহায্য না নিয়ে কি করে স্বতন্ত্রভাবে বুলীয় বিস্তার পাওয়া যায় নিচে তাই ব্যাখ্যা করা হল। ৩৩৩-'৪ পৃষ্ঠায় যে রূপান্তরগুলি দেওয়া আছে সেগুলিকে বিপরীতক্রমে—নিচের দিক থেকে উপরের দিকে—পড়লে* বুঝতে পারবে কি করে স্বতন্ত্রভাবে বুলীয় বিস্তার পাওয়া যায়।

স্বতন্ত্রভাবে বুলীয় বিস্তার পেতে হলে—সঞ্চালন, যূথীবিযূথীকরণ, ক্রমান্তরকরণ পুনরুক্তি সংকোচ প্রভৃতি সূত্র প্রয়োগের প্রয়োজন। সরলীকরণ প্রসঙ্গে যে সমার্থতা সূত্রগুলি উল্লেখ করা হয়েছে তাদের কয়েকটি বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। এদের নাম ঈষৎ পরিবর্তন করে উল্লেখ করা হল।

প্রসারক সঞ্চালন: "$p \cdot (q \vee r)$" সম "$(p \cdot q) \vee (p \cdot r)$"
প্রসারক সঞ্চালন: "$p \vee (q \cdot r)$" সম "$(p \vee q) \cdot (p \vee r)$"
স্বতসত্য সংযুক্তি: "p" সম "$p \cdot (q \vee \sim q)$"
স্বতমিথ্যা যোজনা: "p" সম "$p \vee (q \cdot \sim q)$"

শেষোক্ত সূত্র দুটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার পেতে হলে স্বতসত্য সংযুক্তির প্রয়োজন, আর সংযোগিক বুলীয় বিস্তার পেতে হলে দরকার স্বতমিথ্যা যোজনা।

বৈকল্পিক বিস্তার

কোনো বাক্যের বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার পেতে হলে নিম্নোক্ত নির্দেশগুলি অনুসরণ করবে:

(১) বাক্য রূপান্তরের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে প্রদত্ত বাক্যটিকে "ব ∨ ভ ∨ ম ∨ ..."আকারে

* প্রদত্ত "ভাষ্য" বাদ দিয়ে পড়বে। বিপরীত ক্রমে লিখলে অন্য ভাষ্যের দরকার হত

রূপান্তরিত করবে (এখানে 'ব', 'ভ' প্রভৃতি হয় একবর্ণ প্রতীক, নয় একবর্ণের নিষেধ, নয়ত সংযৌগিক বাক্য)। তারপর

(২) যে বিকল্পটি সংযৌগিক বাক্য তাতে যদি বিস্তারণীয় বাক্যের অন্তর্ভুক্ত সব বর্ণপ্রতীকই বর্তমান থাকে তাহলে তাকে অপরিবর্তিত রাখবে, এবং অন্য প্রত্যেকটি প্রতীকের সঙ্গে স্বতসত্য সংযুক্তি করবে।

যথা, "$(p \cdot \sim q \quad \vee \sim p \vee q$"—এখানে প্রথম বিকল্পে '$p$', '$q$' এ দুটি প্রতীকই আছে, কাজেই এ বিকল্পটি অপরিবর্তিত রাখতে হবে। আর "$\sim p \vee q$"-এর '$\sim p$'-এর সঙ্গে '$q \vee \sim q$', এবং 'q'-এর সঙ্গে '$p \vee \sim p$' সংযুক্ত করতে হবে, মানে '$\sim p \vee q$'-এর পরিবর্তে লিখতে হবে

$$[\sim p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [q \cdot (p \vee \sim p)]$$

তোমার লক্ষ্য হবে—কোনো বিকল্পে যদি কোনো একটি বর্ণপ্রতীক অনুপস্থিত থাকে, তাহলে বিকল্পটিতে ঐ প্রতীকটির অনুপ্রবেশ করানো। স্বতসত্য সংযুক্তি করে, দরকার হলে একাধিকবার সংযুক্তি করে, এ অনুপ্রবেশ ঘটানো যায়। যেমন

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q) \vee r$$

এখানে দ্বিতীয় বিকল্পে 'r' নেই, কাজেই এ বাক্যটির সঙ্গে "$r \vee \sim r$" সংযুক্তি করতে হবে এভাবে : $(p \cdot \sim q) \cdot (r \vee \sim r)$। তৃতীয় বিকল্পে '$q$' নেই, কাজেই এর সঙ্গে '$q \vee \sim q$' সংযুক্তি করে পাব : "$r \cdot (q \vee \sim q)$" বা "$(r \cdot q) \vee (r \cdot \sim q)$"। এদের কোনোটিতে '$p$' নেই কাজেই প্রত্যেকটির সঙ্গে '$p \vee \sim p$' সংযুক্তি করতে হবে এভাবে

$$r \cdot q \cdot (p \vee \sim p) \qquad r \cdot \sim q \cdot (p \vee \sim p)$$

এভাবে যে কোনো বাক্যে (বিকল্পে) যে কোনো প্রতীকের অনুপ্রবেশ ঘটানো যাবে। তারপর

(৩) সঞ্চালন, যূথীবিযূথীকরণ, ক্রমান্তরকরণ, পুনরুক্তি সংকোচ প্রভৃতি সূত্র প্রয়োগ করবে।

উদাহরণ ১

$p \vee q$

$[\ p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [q \cdot (p \vee \sim p)]$ [স্বতসত্যসংযুক্তি]

$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)] \vee [(q \cdot p) \vee (q \cdot \sim p)$ [প্রসারক সঞ্চালন]

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (q \cdot p) \vee (q \cdot \sim p)$ [বিযূথীকরণ]

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q)$ [(সংযোগীর) ক্রমান্তরকরণ]

$\underline{(p \cdot q) \vee (p \cdot q)} \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$ [(বিকল্পের) ক্রমান্তরকরণ]

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$ [পুনরুক্তি সংকোচ]

এ বিস্তারে 2^n বিকল্প নেই, সুতরাং মূল বাক্যটি অবৈধ। (এখানে 2^n-এর $n=2$)

উদাহরণ ২

$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$

$\sim[(p \supset q) \cdot p] \vee q$ ['$\supset$'-এর সংজ্ঞা]

$\sim(p \supset q) \vee \sim p \vee q$ [ডি মরগেন, বিযূথীঃ]

$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p \vee q$ ['$\supset$'-এর সংজ্ঞা]

$(p \cdot \sim q) \vee \sim p \vee q$ [ডি মরগেন, নির্নিঃ]

$(p \cdot \sim q) \vee [\sim p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [q \cdot (p \vee \sim p)]$ [স্বতসত্য সংযুক্তি]

$(p \cdot \sim q) \vee [(\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)] \vee [(q \cdot p) \vee (q \cdot \sim p)]$ [প্রসারক সঞ্চালন]

$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (q \cdot p) \vee (q \cdot \sim p)$ [বিযূথীকরণ]

$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q)$ [(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee \underline{(\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q)} \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [(বিকল্প) ক্রমান্তরকরণ]

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [পুনরুক্তি সংকোচ]

এ বৈকল্পিক বিস্তারে 2^n বিকল্প ($n=2$) আছে, সুতরাং মূল বাক্যটি বৈধ।

উদাহরণ ৩

$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

$[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee r)] \supset (\sim p \vee r)$

$\sim[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee r)] \vee (\sim p \vee r)$

$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r) \vee (\sim p \vee r)$

$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee (\sim p \vee r)$

$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee \sim p \vee r$

সর্বশেষ বিকল্প দুটি লক্ষণীয়। এদের কোনোটিতে 'q' নেই, সুতরাং এদের মধ্যে 'q'-এর অনুপ্রবেশ দরকার। এদের প্রত্যেকটির সঙ্গে "$q \vee \sim q$" সংযুক্তি করে পাই

$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee [\sim p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [r \cdot (q \vee \sim q)]$

$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (r \cdot q) \vee (r \cdot \sim q)$

[প্রসারক সঞ্চালন ও বিযূথীকরণ]

মূল বাক্যে তিনটি বর্ণপ্রতীক ঃ p, q, r। আর উক্ত বিকল্পগুলির প্রত্যেকটিতে দুটি করে। যে বিকল্পে যে প্রতীকটি অনুপস্থিত সে বিকল্পে সেই-প্রতীকটি-দিয়ে-গঠিত-স্বতসত্য-বাক্য সংযুক্তি করে পাই

$[p \cdot \sim q \cdot (r \vee \sim r)] \vee [q \cdot \sim r \cdot (p \vee \sim p)] \vee [\sim p \cdot q \cdot (r \vee \sim r)] \vee [\sim p \cdot \sim q \cdot (r \vee \sim r)] \vee [r \cdot q \cdot (p \vee \sim p)] \vee [r \cdot \sim q \cdot (p \vee \sim p)]$

$(p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (q \cdot \sim r \cdot p) \vee (q \cdot \sim r \cdot \sim p) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (r \cdot q \cdot p) \vee (r \cdot q \cdot \sim p) \vee (r \cdot \sim q \cdot p) \vee (r \cdot \sim q \cdot \sim p)$

$$\underset{\text{১}}{(p \cdot \sim q \cdot r)} \vee \underset{\text{২}}{(p \cdot \sim q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{৩}}{(p \cdot q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{৪}}{(\sim p \cdot q \cdot \sim r)} \vee$$
$$\underset{\text{৫}}{(\sim p \cdot q \cdot r)} \vee \underset{\text{৬}}{(\sim p \cdot q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{৭}}{(\sim p \cdot \sim q \cdot r)} \vee \underset{\text{৮}}{(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)} \vee$$
$$\underset{\text{৯}}{(p \cdot q \cdot r)} \vee \underset{\text{১০}}{(\sim p \cdot q \cdot r)} \vee \underset{\text{১১}}{(p \cdot \sim q \cdot r)} \vee \underset{\text{১২}}{(\sim p \cdot \sim q \cdot r)}$$

[(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]

লক্ষণীয় এখানে ১ ও ১১ সংখ্যক বিকল্প অভিন্ন, ৪ ও ৬ অভিন্ন, ৫ ও ১০ অভিন্ন এবং ৭ ও ১২ অভিন্ন। পুনরুক্তি সংকোচ করে—এ জোড়গুলির একটি করে বাদ দিয়ে (১১, ৬, ১০, ১২ বাদ দিয়ে*), এবং বিকল্পগুলির ক্রমান্তরকরণ করে পাই

$$\underset{\text{৯}}{(p \cdot q \cdot r)} \vee \underset{\text{৩}}{(p \cdot q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{১}}{(p \cdot \sim q \cdot r)} \vee \underset{\text{২}}{(p \cdot \sim q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{৫}}{(\sim p \cdot q \cdot r)} \vee$$
$$\underset{\text{৪}}{(\sim p \cdot q \cdot \sim r)} \vee \underset{\text{৭}}{(\sim p \cdot \sim q \cdot r)} \vee \underset{\text{৮}}{(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)}$$

এ বিস্তারে 2^n বিকল্প ($n=3$), সুতরাং মূল বাক্যটি স্বতসত্য।

সংযৌগিক বিস্তার :

কোনো বাক্যের সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার পেতে হলে নিম্নোক্ত নির্দেশগুলি অনুসরণ করবে।

(১) বাক্য রূপান্তরের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে প্রদত্ত বাক্যটিকে "ত · থ · দ · ..." আকারে রূপান্তরিত করবে (এখানে 'ত', 'থ' প্রভৃতি হয় একবর্ণ প্রতীক, নয় একবর্ণের নিষেধ, নয়ত বৈকল্পিক বাক্য)। তারপর

(২) যে সংযোগীটি বৈকল্পিক বাক্য তাতে যদি বিস্তারণীয় বাক্যের অন্তর্ভুক্ত সব বর্ণপ্রতীকই বর্তমান থাকে তাহলে তাকে অপরিবর্তিত রাখবে, এবং অন্য প্রত্যেকটি প্রতীকের সঙ্গে স্বতমিথ্যা যোজনা করবে। তারপর

(৩) সঞ্চালন, বিযূথীকরণ, ক্রমান্তরকরণ, পুনরুক্তি সংকোচ প্রভৃতি সূত্র প্রয়োগ করবে।

উদাহরণ ১'

$p \cdot q$	
$[p \vee (q \cdot \sim q)] \cdot [q \vee (p \cdot \sim p)]$	[স্বতমিথ্যা যোজনা]
$[(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)] \cdot [(q \vee p) \cdot (q \vee \sim p)]$	[প্রসারক সঞ্চালন]
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (q \vee p) \cdot (q \vee \sim p)$	[বিযূথীকরণ]
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q) \cdot (\sim p \vee q)$	[(বিকল্প) ক্রমান্তরকরণ]
$\underline{(p \vee q) \cdot (p \vee q)} \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$	[(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$	[পুনরুক্তি সংকোচ]

এ বিস্তারে 2^n সংযোগী নেই, সুতরাং বাক্যটি স্বতমিথ্যা নয়।

---

* ৩৩২ পৃষ্ঠায় পাদটীকায় সূত্র ১০' দ্রষ্টব্য

উদাহরণ ২'

$\sim\{[(p \supset q)\cdot p] \supset q\}$

$\sim\{\sim[(p \supset q)\cdot p] \vee q\}$ ['⊃'-এর সংজ্ঞা]

$\sim\{[\sim(p \supset q) \vee \sim p] \vee q\}$ [ডি মরগেন]

$\sim\{\sim(p \supset q) \vee \sim p \vee q\}$ [বিযূথীকরণ]

$(p \supset q)\cdot p\cdot \sim q$ [ডি মরগেন, নিষেধের নিষেধ]

$(\sim p \vee q)\cdot p\cdot\sim q$ ['⊃'-এর সংজ্ঞা]

$(\sim p \vee q)\cdot[p \vee (q\cdot\sim q)]\cdot[\sim q \vee (p\cdot\sim p)]$ [স্বতমিথ্যা যোজনা]

$(\sim p \vee q)\cdot[(p \vee q)\cdot(p \vee \sim q)]\cdot[(\sim q \vee p)\cdot$
$(\sim q \vee \sim p)]$ [প্রসারক সঞ্চালন]

$(\sim p \vee q)\cdot(p \vee q)\cdot(p \vee \sim q)\cdot(\sim q \vee p)\cdot$
$(\sim q \vee \sim p)$ [বিযূথীকরণ]

$(\sim p \vee q)\cdot(p \vee q)\cdot(p \vee \sim q)\cdot(p \vee \sim q)\cdot$
$(\sim p \vee \sim q)$ [(বিকল্প) ক্রমান্তরকরণ]

$(p \vee q)\cdot(\underline{p \vee \sim q)\cdot(p \vee \sim q})\cdot(\sim p \vee q)\cdot$
$(\sim p \vee \sim q)$ [(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]

$(p \vee q)\cdot(p \vee \sim q)\cdot(\sim p \vee q)\cdot(\sim p \vee \sim q)$ [পুনরুক্তি সংকোচ]

এ বিস্তারে 2^n সংযোগী আছে, সুতরাং মূল বাক্যটি স্বতমিথ্যা।

এ উদাহরণের সঙ্গে ৩৪২ পৃষ্ঠার উদাহরণ ২-এর তুলনা কর।

উদাহরণ ৩'

$(p \supset q)\cdot(q \supset r)\cdot p\cdot\sim r$

$(\sim p \vee q)\cdot(\sim q \vee r)\cdot p\cdot\sim r$

সর্বশেষ সংযোগী দুটি লক্ষণীয়। এদের কোনোটিতে 'q' নেই, এদের মধ্যে 'q'-এর অনুপ্রবেশ দরকার। সুতরাং এদের প্রত্যেকটির সঙ্গে '$q\cdot\sim q$' যোজনা করতে হবে। এরূপ যোজনা করে পাই

$(\sim p \vee q)\cdot(\sim q \vee r)\cdot[p \vee (q\cdot\sim q)]\cdot[\sim r \vee (q\cdot\sim q)]$

$(\sim p \vee q)\cdot(\sim q \vee r)\cdot(p \vee q)\cdot(p \vee \sim q)\cdot(\sim r \vee q)\cdot(\sim r \vee \sim q)$

মূল বাক্যে তিনটি বর্ণপ্রতীক, আর উক্ত সংযোগীগুলির প্রত্যেকটিতে আছে দুটি করে। যে সংযোগীতে যে প্রতীকটি অনুপস্থিত সে সংযোগীতে সে-প্রতীকটি-দিয়ে-গঠিত-স্বতমিথ্যা যোজনা করে পাই

$[(\sim p \vee q \vee (r\cdot\sim r)]\cdot[\sim q \vee r \vee (p\cdot\sim p)]\cdot[p \vee q \vee (r\cdot\sim r)]\cdot$
$[p \vee \sim q \vee (r\cdot\sim r)]\cdot[\sim r \vee q \vee (p\cdot\sim p)]\cdot[\sim r \vee \sim q \vee (p\cdot\sim p)$

$(\sim p \vee q \vee r)\cdot(\sim p \vee q \vee \sim r)\cdot(\sim q \vee r \vee p)\cdot(\sim q \vee r \vee \sim p)\cdot(p \vee q \vee r)\cdot$
$(p \vee q \vee \sim r)\cdot(p \vee \sim q \vee r)\cdot(p \vee \sim q \vee \sim r)\cdot(\sim r \vee q \vee p)\cdot$
$(\sim r \vee q \vee \sim p)\cdot(\sim r \vee \sim q \vee p)\cdot(\sim r \vee \sim q \vee \sim p)$

$$\underset{১}{(\sim p \vee q \vee r)} \cdot \underset{২}{(\sim p \vee q \vee \sim r)} \cdot \underset{৩}{(p \vee \sim q \vee r)} \cdot \underset{৪}{(\sim p \vee \sim q \vee r)} \cdot \underset{৫}{(p \vee q \vee r)} \cdot$$
$$\underset{৬}{(p \vee q \vee \sim r)} \cdot \underset{৭}{(p \vee \sim q \vee r)} \cdot \underset{৮}{(p \vee \sim q \vee \sim r)} \cdot \underset{৯}{(p \vee q \vee \sim r)} \cdot$$
$$\underset{১০}{(\sim p \vee q \vee \sim r)} \cdot \underset{১১}{(p \vee \sim q \vee \sim r)} \cdot \underset{১২}{(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)}$$

লক্ষণীয়, এখানে ২-১০, ৩-৭, ৬-৯, ৮-১১ এ জোড়গুলির প্রত্যেকটির বাক্য দুটি অভিন্ন। পুনরুক্তি সংকোচ করে—১০, ৭, ৯, ১১ বাদ দিয়ে, এবং সংযোগীগুলিকে ক্রমান্তরকরণ করে পাই

$$\underset{৫}{(p \vee q \vee r)} \cdot \underset{৬}{(p \vee q \vee \sim r)} \cdot \underset{৩}{(p \vee \sim q \vee r)} \cdot \underset{৮}{(p \vee \sim q \vee \sim r)} \cdot \underset{১}{(\sim p \vee q \vee r)} \cdot$$
$$\underset{২}{(\sim p \vee q \vee \sim r)} \cdot \underset{৪}{(\sim p \vee \sim q \vee r)} \cdot \underset{১২}{(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)}$$

এ বিস্তারে 2^n সংযোগী, সুতরাং মূল বাক্যটি স্বতমিথ্যা।

লক্ষণীয়, এ উদাহরণে মূল বাক্যটি ৩৪২ পৃষ্ঠার উদাহরণ ৩-এর মূল বাক্যের নিষেধ।

উদাহরণ ২ আর ২′, ৩ আর ৩′ তুলনা করলে বোঝা যাবে—

কোনো বাক্য 'ব' থেকে যদি বৈকল্পিক বিস্তার পাওয়া যায় তাহলে '~ব' থেকে পাওয়া যাবে সংযৌগিক বিস্তার ; আবার 'ব' থেকে যদি সংযৌগিক বিস্তার পাওয়া যায় তাহলে '~ব' থেকে পাওয়া যাবে বৈকল্পিক বিস্তার।

এ কথা এভাবেও বলতে পারি—

কোনো বাক্য 'ব'-এর বৈকল্পিক বিস্তার নিষেধ করে পাওয়া যায় সংযৌগিক বিস্তার, আর সংযৌগিক বিস্তার নিষেধ করে পাওয়া যায় বৈকল্পিক বিস্তার। 'ব'-এর বিস্তার নিষেধ করে যা পাওয়া যাবে তা অবশ্যই '~ব'-এর বিস্তার।

উদাহরণ

"$p \vee q$"-এর বৈকল্পিক বিস্তার ঃ

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$$

একে নিষেধ করে পাই

$$\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim(\sim p \cdot q), \text{ বা}$$
$$(\sim p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$$

শেষোক্ত বাক্যটি "$\sim(p \vee q)$"-এর সংযৌগিক বিস্তার।

আবার "$p \cdot q$"-এর সংযৌগিক বিস্তার ঃ

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$$

একে নিষেধ করে পাই

$$\sim(p \vee q) \vee \sim(p \vee \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q) \text{ বা}$$
$$(\sim p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$$

শেষোক্ত বাক্যটি "$\sim(p \cdot q)$"-এর বৈকল্পিক বিস্তার।

৮. এক প্রকারের বিস্তার থেকে অন্য প্রকারের বিস্তার

আমরা জানি, স্বতসত্য বাক্যের সংযৌগিক বিস্তার পাওয়া যায় না, আর স্বতমিথ্যা বাক্যের বৈকল্পিক বিস্তার পাওয়া যায় না। কেবল পরতসাধ্য বাক্যেরই দু প্রকারের বিস্তার সম্ভব। এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা কোনো বাক্য নিয়ে, হয় এর কেবল বৈকল্পিক, নয়ত কেবল সংযৌগিক, বিস্তার পাওয়ার চেষ্টা করেছি। নিচের উদাহরণগুলিতে একই বাক্যের দু রকম বিস্তার দেওয়া হল।

উদাহরণ ১

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$
$\sim[(p \supset q) \cdot q] \vee p$
$\sim[(\sim p \vee q) \cdot q] \vee p$
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q \vee p$
$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p$
$(p \cdot \sim q) \vee [\sim q \cdot (p \vee \sim p)] \vee [p \cdot (q \vee \sim q)]$
$(p \cdot \sim q) \vee (\sim q \cdot p) \vee (\sim q \cdot \sim p) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$
$(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee \underline{(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)}$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [বৈঃ বিঃ]

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$
$\sim[(p \supset q) \cdot q] \vee p$
$\sim[(\sim p \vee q) \cdot q] \vee p$
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q \vee p$
$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p$
$(p \cdot \sim q) \vee (\sim q \vee p)$
$[p \vee (\sim q \vee p)] \cdot [\sim q \vee (\sim q \vee p)]$
$(p \vee \sim q \vee p) \cdot (\sim q \vee \sim q \vee p)$
$(p \vee p \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim q)$
$(p \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q)$
$p \vee \sim q$ [সং বিঃ]

এখানে স্বতন্ত্রভাবে দু রকম বিস্তার উদ্ধার করা হয়েছে। কিন্তু এক প্রকারের বিস্তার থেকে অন্য প্রকারের বিস্তারে পৌঁছানো যায়। আবার উপরোক্ত উদাহরণটিই নেওয়া যাক।

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [বৈঃ বিঃ]
$[p \cdot (q \vee \sim q)] \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$p \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \vee \sim p) \cdot (p \vee \sim q)$
$(p \vee \sim q)$ [সং বিঃ]

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$

$p \vee \sim q$ [সং বিঃ]
$[p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [\sim q \cdot (p \vee \sim p)]$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim q \cdot p) \vee (\sim q \cdot \sim p)$
$p \cdot q \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee \underline{(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)} \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [বৈঃ বিঃ]

উদাহরণ ২

$(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$\sim(p \vee q) \vee (p \cdot q)$
$(\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
[বৈঃ বিঃ] →

$(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$[p \vee (\sim p \cdot \sim q] \cdot [q \vee (\sim p \cdot \sim q)]$
$(p \vee \sim p) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (q \vee \sim p) \cdot (q \vee \sim q)$
$(p \vee \sim p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
← [সং বিঃ] $(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$

$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
$[p \cdot (\sim p \vee q)] \vee [\sim q \cdot (\sim p \vee q)]$
$(p \cdot \sim p) \vee (p \cdot q) \vee (\sim q \cdot \sim p) \vee (\sim q \cdot q)$
$(p \cdot \sim p) \vee (q \cdot \sim q) \vee (p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [বৈঃ বিঃ]

উদাহরণ ৩

$(p \supset q) \supset (p \equiv q)$
$\sim(p \supset q) \vee (p \equiv q)$
$\sim(\sim p \vee q) \vee [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$
$(p \cdot \sim q) \vee [(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)]$
$\{p \vee [(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)]\} \cdot \{\sim q \vee [(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)\}$
$(p \vee \sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q \vee p) \cdot (\sim q \vee \sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee \sim q \vee p)$
$(p \vee \sim p \vee q) \cdot (p \vee p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim q)$
$(p \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q)$
$p \vee \sim q$ [সং বিঃ]
←

$p \vee \sim q$
$[p \cdot (q \vee \sim q)] \vee [\sim q \cdot (p \vee \sim p)]$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim q \cdot p) \vee (\sim q \cdot \sim p)$
$(p \cdot q) \vee \underline{(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)} \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [বৈঃ বিঃ]

→
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$[p \cdot (q \vee \sim q)] \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$p \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \vee \sim p) \cdot (p \vee \sim q)$
$p \vee \sim q$ [সং বিঃ]

আমরা জানি

সংযৌগিক বুলীয় বিস্তারের আকার হল : ব$_১$ · ব$_২$ · ……
(যেখানে 'ব$_১$', 'ব$_২$' প্রভৃতি নিখুঁত বৈকল্পিক)

বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তারের আকার হল : স$_১$ ∨ স$_২$ ∨ ……
(যেখানে 'স$_১$', 'স$_২$' প্রভৃতি নিখুঁত সংযৌগিক)

এবার উদাহরণ ১ ও ৩-এর সংযৌগিক বিস্তারটি লক্ষ কর। বিস্তারটি হল "$p \vee \sim q$"। এ বাক্যটি কিন্তু "ব$_১$ · ব$_২$ · …" আকারের সংযৌগিক বাক্য নয়। এ বৈকল্পিক বাক্যটি

সংযৌগিক বিস্তার বলে গণ্য হয় কি করে ? উত্তর ঃ এ বিস্তারটিও "ব$_{১}$ · — · —" আকারের, তবে এর অন্যান্য সংযোগী অপসারিত হয়েছে। এরূপ সংযৌগিককে বলে অবসংযৌগিক† । বিস্তারটিকে যদি সংযৌগিক বলতে বাধে তাহলে তোমাদের স্মরণ করিয়ে দিই যে আসলে বিস্তারটি হল ঃ $(p \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q)$ । যে বাক্য একটিমাত্র সত্যসর্তে মিথ্যা, বলা বাহুল্য, তার সংযৌগিক বিস্তারে একটিমাত্র সংযোগী থাকতে পারে।

আবার, মনে কর, একটি বাক্যের, 'ব'-এর, সংযৌগিক বিস্তার হল ঃ

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q) \quad [\text{ সং বিঃ }]$$

এ বিস্তার থেকে পাই

$$[p \cdot (q \vee \sim q)] \cdot (\sim p \vee \sim q)$$
$$p \cdot (\sim p \vee \sim q)$$
$$(p \cdot \sim p) \vee (p \cdot \sim q)$$
$$(p \cdot \sim q) \quad [\text{ বৈঃ বিঃ }]$$

প্রশ্ন উঠতে পারে, এ সংযৌগিক বাক্যটি 'ব'-এর বৈকল্পিক বিস্তার বলে গণ্য হবে কেন ? উত্তর ঃ এ বিস্তারটি "স$_{১}$ ∨—∨—" আকারের, তবে এর অন্যান্য বিকল্পগুলি অপনীত হয়েছে। "$p \cdot \sim q$"—এ বিস্তারটি আসলে "$(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q)$"-এর সরলীকৃত রূপ। বলা বাহুল্য, যে বাক্য কেবলমাত্র একটি মাত্র সত্যসর্তে সত্য তার বৈকল্পিক বিস্তারে কেবল একটি বিকল্প থাকতে পারে। এরূপ বিকল্পকে বলে অববৈকল্পিক‡ বাক্য। সারসংক্ষেপ করে বলতে পারি স্বতসত্য বাক্যের সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার পাওয়া সম্ভব নয়
স্বতমিথ্যা বাক্যের বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার পাওয়া সম্ভব নয়
যে বাক্য একটিমাত্র সত্যসর্তে সত্য তার বিস্তারে থাকে একটি সংযৌগিক বাক্য
—একে বলে অববৈকল্পিক বাক্য।
যে বাক্য একটিমাত্র সত্যসর্তে মিথ্যা তার বিস্তারে থাকে একটি বৈকল্পিক বাক্য
—একে বলে অবসংযৌগিক বাক্য ॥

৯. বিহিত আকার

যে বাক্যে

আণবিক নিষেধ, আণবিক " · ",* আর "∨" ছাড়া অন্য কোনো যোজক থাকে না, বা
আণবিক নিষেধ, আণবিক "∨",* আর " · " ছাড়া অন্য কোনো যোজক থাকে না

† degenerate conjunction (৩৫০ পৃঃ দ্রষ্টব্য)
‡ degenerate alternation (৩৫০ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

* আণবিক নিষেধ=আণবিক '~' । যে '~' কেবল এক বর্ণপ্রতীকের বামে বসে তাকে বলছি আণবিক '~', আর যে নিষেধ চিহ্নের ডান ধারে থাকে কোনো বন্ধনীভুক্ত বাক্য তাকে বলে যূথ নিষেধ।

আণবিক " · " ঃ যে " · " কেবল দুটি একবর্ণ প্রতীকের—নিষেধিত কি অনিষেধিত প্রতীকের—মধ্যে থাকে তাকে বলছি আণবিক " · "। যথা "$p \cdot \sim q$"-এতে " · " আণবিক যোজক, কিন্তু $p \cdot (q \vee r)$ এর " · " আণবিক যোজক নয়।

আণবিক " ∨ " ঃ যে "∨" কেবল দুটি একবর্ণ প্রতীকের—নিষেধিত কি অনিষেধিত প্রতীকের—মধ্যে থাকে তাকে বলছি আণবিক " ∨ "। যথা "$p \vee \sim q$"-এতে " ∨ " হল আণবিক, কিন্তু "$p \vee (q \cdot r)$"-এর " ∨ " আণবিক নয়।

তাকে বিহিত আকারের বাক্য বা বিহিত আকার (বিহিতাকার, Normal Forms) বলে। বলা বাহুল্য, বুলীয় বিস্তার হল বিহিতাকার—এক বিশেষ প্রকারের বিহিতাকার। "এক বিশেষ প্রকারের" বলছি এজন্য—

বুলীয় বিস্তারে প্রত্যেক সংযৌগিক অঙ্গের মধ্যে (বৈকল্পিক বিস্তারের ক্ষেত্রে) বা প্রত্যেক বৈকল্পিক অঙ্গের মধ্যে (সংযৌগিক বিস্তারের ক্ষেত্রে) বাক্যস্থ প্রতিটি বর্ণ-প্রতীক থাকার দরকার,

কিন্তু উক্ত সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায়, উক্ত সর্তটি পূরিত না হলেও কোনো বাক্য বিহিতাকার বলে গণ্য হতে পারে।

তার মানে, বুলীয় বিস্তার বিহিতাকার, ঠিক ; তবে সব বিহিতাকারের বাক্যকে বুলীয় বিস্তার বলে বর্ণনা করা যায় না। যথা

$$p \vee (q \cdot r) \qquad \sim p \vee (\sim q \cdot r) \qquad p \cdot (q \vee r) \qquad \sim p \cdot (\sim q \vee r)$$

এ সবও বিহিতাকার বলে গণ্য, কিন্তু এদের কোনোটি বুলীয় বিস্তার বলে গণ্য হতে পারে না।

বিহিতাকারের কী প্রয়োজন, কিভাবে কোনো বাক্যকে বিহিতাকারে রূপান্তরিত করতে হয়—এ সব নিচে বিশদভাবে আলোচিত হল।

বিহিতাকারও দু প্রকার : সংযৌগিক বিহিতাকার (Conjunctive Normal Form), সংক্ষেপে—সংবিহিতাকার (CNF), আর বৈকল্পিক বিহিতাকার (Alternative Normal Form), সংক্ষেপে—বৈবিহিতাকার (ANF)। এ আকার দুটি পরপর আলোচনা করা হল।

১০. সংবিহিতাকার (CNF)

$$p \vee \sim p$$

আকারের বাক্য স্বতসত্য।

কাজেই

$$p \vee \sim p \vee q, \ p \vee \sim p \vee \sim q, \ p \vee \sim p \vee \sim q \vee r, \ p \vee \sim p \vee (\cdots\cdots)$$

আকারের বাক্যও স্বতসত্য। তার মানে—কোনো স্বতসত্য বাক্যের সঙ্গে বিকল্প হিসাবে যা-ই যোজনা করা হোক না কেন, যোজনার-ফলে-পাওয়া সমগ্র বৈকল্পিক বাক্যটি স্বতসত্য হতে বাধ্য। আবার, কোনো সংযৌগিক বাক্যের প্রত্যেকটি সংযোগী যদি (স্বত)সত্য হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে সংযৌগিক বাক্যটি (স্বত) সত্য হতে পারে। যথা

$$(p \vee \sim p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim p \vee q) \qquad \text{I}$$

এ বাক্যটি স্বতসত্য, কেননা এর প্রতিটি সংযোগী স্বতসত্য। কিন্তু

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim p) \cdot (p \vee \sim p \vee q) \qquad \text{II}$$

এ বাক্যটি স্বতসত্য নয়, কেননা প্রথম সংযোগীটি পরতসাধ্য (সত্যও হতে পারে মিথ্যাও হতে পারে)। যদি '$ব_১$', '$ব_২$', '$ব_৩$' প্রভৃতি দিয়ে বিভিন্ন সংযোগী (যে সংযোগীগুলি বৈকল্পিক বাক্য, যথা I ও II-এর সংযোগী) বোঝানো হয় তাহলে বলতে পারি : '$ব_১$', '$ব_২$', '$ব_৩$'……এদের প্রত্যেকটি স্বতসত্য হলে "$ব_১ \cdot ব_২ \cdot ব_৩ \cdot \cdots ব_n$" স্বতসত্য, নতুবা নয়।

সংক্ষেপে—

(১) "$p \vee \sim p \vee q \vee \cdots$" আকারের বাক্য স্বতসত্য।

(২) 'ব$_১$', 'ব$_২$', 'ব$_৩$'—প্রভৃতি সংযোগীর প্রত্যেকটি যদি স্বতসত্য হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে "ব$_১$ · ব$_২$ · ব$_৩$ · ··· ব$_n$" স্বতসত্য।

যে বৈকল্পিক বাক্যে* এমন দুটি বিকল্প নেই যে একটি আর একটির নিষেধ সে বাক্য অ-স্বতসত্য, যথা : $p \vee q$, $p \vee \sim q \vee r$—ইত্যাদি। কাজেই বলতে পারি

(1) "$p \vee q \vee \cdots$" (যেখানে একই বর্ণপ্রতীক ও তার নিষেধ নেই) অ-স্বতসত্য

(2) 'ব$_১$', 'ব$_২$', 'ব$_৩$'—প্রভৃতি সংযোগীর কোনো একটি অ-স্বতসত্য হলে "ব$_১$ · ব$_২$ · ব$_৩$ · ··· ব$_n$" অ-স্বতসত্য।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে

ব$_১$ · ব$_২$ · ব$_৩$ · ··· ব$_n$

আকারের বাক্য স্বতসত্য কি স্বতসত্য নয় তা অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়—বলতে পারি, কেবল চোখে দেখে যাচাই করা যায় (উপরোক্ত I ও II দেখ)। এখন, উক্ত আকারের বাক্যকে, মানে—

$$(p \vee \sim p \vee q \vee \cdots) \cdot (p \vee q \vee \sim q \vee \cdots) \cdot (— \vee — \vee — \vee \cdots) \cdot (\cdots$$
$$(p \vee q \vee r \vee \cdots) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r \vee \cdots) \cdot (— \cdot — \cdot — \cdot \cdots) \cdot (\cdots$$

এসব আকারের বাক্যকে বলে সংযৌগিক বিহিতাকার, সংক্ষেপে—সংবিহিতাকার (Conjunctive Normal Form, সংক্ষেপে CNF)। উপরোক্ত আকারগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে এভাবে আমরা 'CNF'-এর সংজ্ঞা দিতে পারি :

যে সংযৌগিক বাক্যে—

(i) "$\sim$", "$\vee$", "$\cdot$" ছাড়া অন্য যোজক নেই, আর

(ii) "$\sim$" ও "$\vee$" হল আর্ণবিক যোজক

তাকে বলে CNF বা সংবিহিতাকার।

অবসংযৌগিক ও অববৈকল্পিক

এখানে "বিহিতাকার" কথাটি সংকীর্ণ অর্থে নেওয়া হয়েছে। বস্তুত যুক্তিবিজ্ঞানে এ কথাটি আরও ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। ব্যাপক অর্থটি বুঝতে হলে অবসংযৌগিক ও অববৈকল্পিক বলতে কি বোঝায় তা আরও ভাল করে জেনে নেবার দরকার। আমরা জানি

"p" সম "$p \cdot p$" "$\sim p$" সম "$\sim p \cdot \sim p$"

"p" সম "$p \vee p$" "$\sim p$" সম "$\sim p \vee \sim p$"

---

* যাতে '$\vee$', '$\sim$' ছাড়া অন্য যোজক নেই। এ বিশেষণ না দিলে বলতে হত : "$p \vee q \vee (p \supset p)$" অ-স্বতসত্য, কিন্তু বাক্যটি স্বতসত্য।

কাজেই "$p \cdot p$" যেমন সংযৌগিক সেরকম কেবল "p", কেবল "$\sim p$"-ও সংযৌগিক বলে গণ্য হতে পারে (এসব সংযৌগিকের অপর অঙ্গ প্রচ্ছন্ন আছে বা অবলুপ্ত হয়েছে)। তবে এরূপ "সংযৌগিক" হল একাঙ্গ সংযৌগিক, এ জাতীয় সংযৌগিককে বলে অবসংযৌগিক।

উক্তরূপে "p", "$\sim p$"-কে বৈকল্পিক বাক্য বলেও গণ্য করা যায়। তবে এসব সাধারণ বা পরিণত বৈকল্পিক নয়, অববৈকল্পিক (বা একাঙ্গ বৈকল্পিক বাক্য)। আমরা সংযৌগিক ও বৈকল্পিক কথা দুটি ব্যাপকতম অর্থে নেব, এবং অবসংযৌগিক ও অববৈকল্পিককে যথাক্রমে সংযৌগিক ও বৈকল্পিকের প্রকারভেদ বলে গণ্য করব।

এখন বিহিতাকার কথাটি ব্যাপক অর্থে নিয়ে এভাবে 'CNF'-এর সংজ্ঞা দেওয়া যায়ঃ আণবিক বাক্য মাত্রই CNF,

কোনো বাক্যে, 'ব'-তে কোন যোজক থাকলেঃ তা যদি আণবিক নিষেধ বা আণবিক 'v', বা "$\cdot$" হয় তাহলে 'ব' সংবিহিতাকার বা CNF বলে গণ্য।

CNF-এর উক্ত অর্থে, কেবল

(১) $(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$ (২) $(p \vee q) \cdot (p \vee q \vee r) \cdot (p \vee s \vee t)$

এ জাতীয় বাক্যই যে CNF বলে গণ্য তা নয়, নিম্নোক্ত বাক্যগুলিও CNF ঃ

(৩) $p \cdot (p \vee q)$ (৪) $p \vee \sim p \vee q$ (৫) $p \vee q$ (৬) p (৭) $\sim p$

মন্তব্য ঃ

(১) ও (২)—এসবের আকার ঃ $ব_১ \cdot ব_২ \cdot ব_৩$। (২)-এতে প্রথম সংযোগীতে দুটি অঙ্গ, অন্যগুলিতে তিনটি করে।

(৩)-এর আকার ঃ $ব_১ \cdot ব_২$। এখানে প্রথম সংযোগী হল অববৈকল্পিক (মনে কর এ সংযোগীটি "$p \vee p$"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ)।

(৪) ও (৫)-এর আকার ঃ $ব_১$। (৪)-এতে সমগ্র বাক্যটি একটি সংযোগী। অন্য সংযোগীগুলি অবলুপ্ত হয়েছে। এটি একটি অবসংযৌগিক বাক্য। অনুরূপভাবে (৫)-ও অবসংযৌগিক (মনে কর বাক্যটি "$(p \vee q) \cdot (p \vee q)$"-এর সরলীকৃত রূপ)।

(৬) ও (৭) ঃ 'p' একটি অবসংযৌগিক বাক্য, এর নিঃসঙ্গ সংযোগীটি আবার অববৈকল্পিক (মনে কর—বাক্যটি "$(p \vee p) \cdot (p \vee p)$"-এর সরলীকৃত রূপ)। অনুরূপভাবে '$\sim p$'-ও CNF বলে গণ্য।

১১. বৈবিহিতাকার (ANF)

$$p \cdot \sim p$$

আকারের বাক্য স্বতমিথ্যা।

কাজেই

$$p \cdot \sim p, p \cdot \sim p \cdot \sim q, p \cdot \sim p \cdot \sim q \cdot r, p \cdot \sim p \cdot (\cdots\cdots\cdots)$$

আকারের বাক্যও স্বতমিথ্যা। তার মানে—কোনো স্বতমিথ্যা বাক্যের সঙ্গে সংযোগী হিসাবে যা-ই সংযুক্ত করা হোক না কেন সংযুক্তি-করে-পাওয়া সমগ্র সংযৌগিক বাক্যটি স্বতমিথ্যা হতে

বাধ্য। আবার, কোনো বৈকল্পিক বাক্যের প্রত্যেকটি বিকল্প যদি স্বতমিথ্যা হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে বৈকল্পিক বাক্যটি স্বতমিথ্যা হতে পারে। যথা

$$(p \cdot \sim p) \vee (q \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim p \cdot q) \qquad \text{I}$$

এ বাক্যটি স্বতমিথ্যা, কেননা এর প্রত্যেকটি বিকল্প স্বতমিথ্যা। কিন্তু

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim p) \vee (p \cdot \sim p \cdot q) \qquad \text{II}$$

এ বাক্যটি স্বতমিথ্যা নয়, কেননা এর প্রথম বিকল্পটি পরতসাধ্য। যদি 'স$_১$', 'স$_২$' প্রভৃতি দিয়ে বিভিন্ন বিকল্প (যে বিকল্পগুলি সংযৌগিক বাক্য, যথা I আর II-এর বিকল্প) বোঝানো হয় তাহলে বলতে পারি ঃ 'স$_১$', 'স$_২$', 'স$_৩$'-এদের প্রত্যেকটি স্বতমিথ্যা হলে "স$_১$, v স$_২$, v স$_৩$ v ···স$_n$"স্বতমিথ্যা, নতুবা নয়। সংক্ষেপে

(১) "$p \cdot \sim p \cdot q \cdot \cdots$" আকারের বাক্য স্বতমিথ্যা

(২) 'স$_১$', 'স$_২$', 'স$_৩$'—প্রভৃতি বিকল্পের প্রত্যেকটি যদি স্বতমিথ্যা হয় তাহলে এবং কেবল তাহলে "স$_১$ v স$_২$ v স$_৩$ v ··· স$_n$ " স্বতমিথ্যা

যে সংযৌগিক বাক্যে এমন দুটি সংযোগী নেই যে একটি আর একটির নিষেধ সে বাক্য অ-স্বতমিথ্যা ঃ যথা, "$p \cdot q$", "$p \cdot \sim q \cdot r$"—ইত্যাদি। কাজেই বলতে পারি

(1) "$p \cdot q \cdot \cdots$" (যেখানে একই বর্ণপ্রতীক ও তার নিষেধ নেই) অস্বতমিথ্যা

(2) 'স$_১$', 'স$_২$', 'স$_৩$'—প্রভৃতির বিকল্পের কোনো একটি অ-স্বতমিথ্যা হলে "স$_১$ v স$_২$ v স$_৩$ v ··· স$_n$ " অ-স্বতমিথ্যা।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে

স$_১$ v স$_২$ v স$_৩$ v ··· স$_n$

আকারের বাক্য স্বতমিথ্যা কি স্বতমিথ্যা নয় তার চাক্ষুষ যাচাইকরণ সম্ভব (উপরোক্ত I ও II দেখ)। এখন, উক্ত আকারের বাক্যকে, মানে—

$$(p \cdot \sim p \cdot q) \vee (p \cdot q \cdot \sim q \cdots) \vee (\text{—} \cdot \text{—} \cdot \text{—}\cdots\cdots) \vee (\cdots\cdots$$
$$(p \cdot q \cdot r \cdots) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r \cdots\cdots) \vee (\text{—} \vee \text{—} \vee \text{—} \vee \cdots\cdots) \vee (\cdots$$

এসব আকারের বাক্যকে বলে বৈকল্পিক বিহিতাকার, সংক্ষেপে—বৈবিহিতাকার (Alternative Normal form, সংক্ষেপে ANF*)। উপরোক্ত আকারগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে আমরা এভাবে 'ANF'-এর সংজ্ঞা দিতে পারি ঃ

যে বৈকল্পিক বাক্যে

(i) "~", " · ", "v" ছাড়া অন্য যোজক নেই, আর

(ii) "~", ও " · " হল আণবিক যোজক

তাকে বলে ANF বা বৈহিতাকার।

* যারা "$p \vee q$" আকারের বাক্যকে disjunctive বাক্য বলে অভিহিত করেন, বলা বাহুল্য, তারা উক্ত আকারের বাক্যকে Disjunctive Normal Form (DNF) বলে বর্ণনা করেন।

এটা বৈবিহিতাকারের সংকীর্ণ অর্থ। "বিহিতাকার" কথাটি ব্যাপক অর্থে নিয়ে এভাবে 'ANF'-এর সংজ্ঞা দেওয়া যায়—

আণবিক বাক্য মাত্রই ANF

কোনো বাক্যে, 'ব'-তে কোনো যোজক থাকলে : তা যদি আণবিক নিষেধ, আণবিক " · ", বা "v" হয় তাহলে 'ব' বৈবিহিতাকার বা ANF বলে গণ্য।

ANF-এর উক্ত অর্থে কেবল

(1) $(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q)$ (2) $(p \cdot q) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot s \cdot t)$

এ জাতীয় বাক্যই যে ANF বলে গণ্য তা নয়, নিম্নোক্ত বাক্যগুলিও ANF :

(3) $p \vee (p \cdot q)$ (4) $p \cdot \sim p \cdot q$ (5) $p \cdot q$ (6) p (7) $\sim p$

মন্তব্য :

(1) ও (2)—এ বাক্যের আকার : স$_১$ v স$_২$ v স$_৩$। (2)-তে প্রথম বিকল্পটির দুটি অঙ্গ অন্যগুলির তিনটি করে।

(3)-এর আকার : স$_১$ v স$_২$। এখানে প্রথম বিকল্পটি অবসংযৌগিক (মনে কর, এটি "$p \cdot q$"-এর সরলীকৃত রূপ)।

(4) ও (5)-এর আকার : স$_১$। (4)-এতে সমগ্র বাক্যটি বিকল্প, অন্য বিকল্পগুলি অপনীত হয়েছে। এটি একটি অবৈকল্পিক বাক্য (মনে কর, বাক্যটি "$(p \cdot \sim p \cdot p) \vee (p \cdot \sim p \cdot q)$"-এর সরলীকৃত রূপ)। অনুরূপভাবে (5)-ও অবৈকল্পিক।

(6) ও (7) : 'p' একটি অবৈকল্পিক বাক্য, এর নিঃসঙ্গ বিকল্পটি আবার অবসংযৌগিক (মনে কর, বাক্যটি "$(p \cdot p) \vee (p \cdot p)$"-এর সরলীকৃত রূপ)। অনুরূপভাবে '$\sim p$'ও ANF বলে গণ্য।

১২. বিহিতাকারে রূপান্তর

কোনো সত্যাপেক্ষককে রূপান্তর করে বিহিতাকার পাওয়া কঠিন নয়।

প্রথমত : বিভিন্ন সমার্থতা সূত্র প্রয়োগ করে প্রদত্ত বাক্যকে '⊃', '≡' প্রভৃতি অবাঞ্ছিত যোজক (আণবিক "~", আর " · ", "v" ছাড়া অন্য যোজক) থেকে মুক্ত করা যায়।

দ্বিতীয়ত : নিষেধের নিষেধ, ডি মরগেন—এ সূত্রগুলি প্রয়োগ করে বাক্যটি থেকে যৃথনিষেধ দূর করতে পারি।

তৃতীয়ত : সঞ্চালনের সূত্র প্রয়োগ করে সংযৌগিক বাক্যকে বৈকল্পিকে আর বৈকল্পিক বাক্যকে সংযৌগিকে রূপান্তরিত করা যায়।

ANF-এতে রূপান্তর

উদাহরণ ১

$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
$\sim[(p \supset q) \cdot p] \vee q$ ('⊃'-এর সংজ্ঞা)
$\sim(p \supset q) \vee \sim p \vee q$ (ডি মরগেন)
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p \vee q$ ('⊃'-এর সংজ্ঞা)
$(p \cdot \sim q) \vee \sim p \vee q$ (ডি মরগেন)

[স্বতমিথ্যা নয়]

উদাহরণ ২

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$
$\sim[(p \supset q) \cdot q] \vee p$
$\sim(p \supset q) \vee \sim q \vee p$
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q \vee p$
$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p$

[স্বতমিথ্যা নয়]

উদাহরণ ৩

$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \cdot \sim(\sim p \vee r)$
$(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee r) \cdot (p \cdot \sim r)$ ['⊃'-এর সংজ্ঞা, ডি মরগেন]
$[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee r)] \cdot (p \cdot \sim r)$ [যূথীকরণ]
$[(\sim p \vee q) \cdot \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \cdot r] \cdot (p \cdot \sim r)$ [সঞ্চালন]
$[\sim q \cdot (\sim p \vee q)] \vee [r \cdot (\sim p \vee q)] \cdot (p \cdot \sim r)$ [সংযোগী ক্রমান্তরকরণ]
$[(\sim q \cdot \sim p) \vee (\sim q \cdot q) \vee (r \cdot \sim p) \vee (r \cdot q)] \cdot (p \cdot \sim r)$ [সঞ্চালন]
$(p \cdot \sim r) \cdot [(\sim q \cdot \sim p) \vee (\sim q \cdot q) \vee (r \cdot \sim p) \vee (r \cdot q)$ [ক্রমান্তরকরণ]
$(p \cdot \sim r \cdot \sim q \cdot \sim p) \vee (p \cdot \sim r \cdot \sim q \cdot q) \vee (p \cdot \sim r \cdot r \cdot \sim p) \vee$
$(p \cdot \sim r \cdot r \cdot q)$ [সঞ্চালন]

$(\underline{p \cdot \sim p} \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \underline{q \cdot \sim q} \cdot \sim r) \vee (\underline{p \cdot \sim p} \cdot r \cdot \sim r) \vee$
$(p \cdot q \cdot \underline{r \cdot \sim r})$ [(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]

[প্রদত্ত বাক্যটি স্বতমিথ্যা]

উদাহরণ ৪

$\sim\{\sim[p \cdot \sim(q \cdot \sim r) \cdot q] \cdot s\} \cdot p$
$\{[p \cdot \sim(q \cdot \sim r) \cdot q] \vee \sim s\} \cdot p$ [ডিমরগেন, নিষেধের নিষেধ]
$\{[p \cdot (\sim q \vee r) \cdot q] \vee \sim s\} \cdot p$ [ডি মরগেন]
$\{[p \cdot q \cdot (\sim q \vee r)] \vee \sim s\} \cdot p$ [(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]
$\{(p \cdot q \cdot \sim q) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee \sim s\} \cdot p$ [সঞ্চালন, বিযূথীকরণ]
$p \cdot \{(p \cdot q \cdot \sim q) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee \sim s\}$ [(সংযোগী) ক্রমান্তরকরণ]
$(p \cdot p \cdot q \cdot \sim q) \vee (p \cdot p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \sim s)$

[স্বতমিথ্যা নয়]

CNF-এতে রূপান্তর

উদাহরণ ১'

$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$
... ... [উদাঃ ১ দ্রষ্টব্য]
$(p \cdot \sim q) \vee \sim p \vee q$
$\sim p \vee q \vee (p \cdot \sim q)$
$(\sim p \vee q \vee p) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim q)$
$(p \vee \sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim q)$

[স্বতসত্য]

উদাহরণ ২'

$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$
... ... [উদাঃ ২ দ্রষ্টব্য]
$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p$
$\sim q \vee p \vee (p \cdot \sim q)$
$(\sim q \vee p \vee p) \cdot (\sim q \vee p \vee \sim q)$
$(p \vee p \vee \sim q) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim q)$

[স্বতসত্য নয়, অবৈধ]

উদাহরণ ৩'

$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$
$\sim[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \vee (p \supset r)$
$\sim[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee r)] \vee (\sim p \vee r)$
$[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r)] \vee (\sim p \vee r)$
$[(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim r)] \vee (\sim p \vee r)$
$\{[(p \cdot \sim q) \vee q] \cdot [(p \cdot \sim q) \vee \sim r]\} \vee (\sim p \vee r)$
$\{[q \vee (p \cdot \sim q)] \cdot [\sim r \vee (p \cdot \sim q)]\} \vee (\sim p \vee r)$
$\{(q \vee p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (\sim r \vee p) \cdot (\sim r \vee \sim q)\} \vee (\sim p \vee r)$
$(\sim p \vee r) \vee \{(q \vee p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (\sim r \vee p) \cdot (\sim r \vee \sim q)\}$
$(\sim p \vee r \vee q \vee p) \cdot (\sim p \vee r \vee q \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee r \vee \sim r \vee p) \cdot (\sim p \vee r \vee \sim r \vee \sim q)$
$(\underline{p \vee \sim p} \vee q \vee r) \cdot (\sim p \vee r \vee \underline{q \vee \sim q}) \cdot (\underline{p \vee \sim p} \vee r \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee \underline{r \vee \sim r})$

[স্বতসত্য]

উদাহরণ ৪'

$\sim\{\sim[p \cdot \sim(q \cdot \sim r) \cdot q] \cdot s\} \cdot p$
$\{[p \cdot \sim(q \cdot \sim r) \cdot q] \vee \sim s\} \cdot p$
$\{[p \cdot q \cdot (\sim q \vee r)] \vee \sim s\} \cdot p$ [ডি মরগেন]
$\{\sim s \vee [p \cdot q \cdot (\sim q \vee r)]\} \cdot p$ [(বিকল্প) ক্রমান্তরকরণ]
$\{(\sim s \vee p) \cdot (\sim s \vee q) \cdot [\sim s \vee (\sim q \vee r)]\} \cdot p$ [সঞ্চালন]
$(\sim s \vee p) \cdot (\sim s \vee q) \cdot (\sim s \vee \sim q \vee r) \cdot p$ [বিযূথীকরণ]

[স্বতসত্য নয়, অবৈধ]

আর একটি উদাহরণ

$(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
$[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset (p \supset q)$
$[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)] \supset (\sim p \vee q)$
$\sim[(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)] \vee (\sim p \vee q)$
$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \vee (\sim p \vee q)$
$(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim p) \vee (\sim p \vee q) = (p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim p) \vee (\sim p \vee q)$
$(p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q) \vee \sim p \vee q$

ANF

[স্বতমিথ্যা নয়]

$[(p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim p)] \vee (\sim p \vee q)$
$\{[(p \cdot \sim q) \vee q] \cdot [(p \cdot \sim q) \vee \sim p]\} \vee (\sim p \vee q)$
$\{[q \vee (p \cdot \sim q)] \cdot [\sim p \vee (p \cdot \sim q)]\} \vee (\sim p \vee q)$
$\{(q \vee p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee p) \cdot (\sim p \vee \sim q)\} \vee (\sim p \vee q)$
$(\sim p \vee q) \vee \{(q \vee p) \cdot (q \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee p) \cdot (\sim p \vee \sim q)\}$
$(\sim p \vee q \vee q \vee p) \cdot (\sim p \vee q \vee q \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim p \vee p) \cdot (\sim p \vee q \vee \sim p \vee \sim q)$
$(\underline{p \vee \sim p} \vee q) \cdot (\sim p \vee \underline{q \vee \sim q}) \cdot (\underline{p \vee \sim p} \vee q) \cdot (\sim p \vee \underline{q \vee \sim q})$

[ক্রমান্তরকরণ করে ও পুনরুক্তি সংকোচ করে]

[CNF, বৈধ]

১৩. এক প্রকারের বিহিতাকার থেকে অন্য প্রকার বিহিতাকার

ANF আকারের বাক্যকে CNF আকারে*, আবার CNF-কে ANF-এতে, রূপান্তরিত করা যায়। এরূপ রূপান্তরের জন্য বিশেষভাবে প্রয়োজন সঞ্চালনের সূত্রের প্রয়োগ। আমরা দু রকম সঞ্চালনের কথা বলতে পারি : সংকোচক সঞ্চালন ও প্রসারক সঞ্চালন।

"$p \cdot (q \vee r)$" সম "$(p \cdot q) \vee (p \cdot r)$"

"$p \vee (q \cdot r)$" সম "$(p \vee q) \cdot (p \vee r)$"

এ সূত্রগুলির বাম ধারের পরিবর্তে ডান ধার বসালে পাই প্রসারক বা বিস্তারক সঞ্চালনের প্রয়োগ, আর ডান ধারের বদলে বাম ধার বসালে সংকোচ সঞ্চালনের প্রয়োগ।

এবার রূপান্তরের কয়েকটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

উদাহরণ 1 ANF→CNF

$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$

$[(p \cdot q) \vee \sim p] \cdot [(p \cdot q) \vee \sim q]$ [প্রসারক সঞ্চালন]

$[(\sim p \vee (p \cdot q)] \cdot [\sim q \vee (p \cdot q)]$

$(\sim p \vee p) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p) \cdot (\sim q \vee q)$

[প্রসারক সঞ্চালন]

উদাহরণ 2 ANF→CNF

$(p \cdot \sim p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim q)$

$(\sim p \cdot \sim q \cdot p) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot q)$

$[(\sim p \cdot \sim q) \cdot p] \vee [(\sim p \cdot \sim q) \cdot q]$ [যূথীকরণ]

$(\sim p \cdot \sim q) \cdot (p \vee q)$ [সংকোচক সঞ্চালন]

$\sim p \cdot \sim q \cdot (p \vee p)$ [বিযূথীকরণ]

উদাহরণ 3 CNF→ANF

$(p \vee \sim p \vee q) \cdot (p \vee q \vee \sim q)$

$(p \vee q \vee \sim p) \cdot (p \vee q \vee \sim q)$

$[(p \vee q) \vee \sim p] \cdot [(p \vee q) \vee \sim q]$

$(p \vee q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [সংকোচক সঞ্চালন]

$p \vee q \vee (\sim p \cdot \sim q)$

উদাহরণ 4 CNF→ANF

$(p \vee q \vee \sim q) \cdot (q \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (p \vee q \vee r) \cdot (q \vee r \sim r)$

$\{[(q \vee \sim q) \vee p] \cdot [(q \vee \sim q) \vee \sim r]\} \cdot \{[(q \vee r) \vee p] \cdot [(q \vee r) \vee \sim r]\}$ [ক্রমান্তরকরণ, যূথীকরণ]

$\{(q \vee \sim q) \vee (p \cdot \sim r)\} \cdot \{(q \vee r) \vee (p \cdot \sim r)\}$ [সংকোচন সঞ্চালন]

$\{(p \cdot \sim r) \vee (q \vee \sim q)\} \cdot \{(p \cdot \sim r) \vee (q \vee r)\}$ [বিকল্প ক্রমান্তরকরণ]

$(p \cdot \sim r) \vee \{(q \vee \sim q) \cdot (q \vee r)\}$ [সংকোচক সঞ্চালন]

$(p \cdot \sim r) \vee q \vee (\sim q \cdot r)$ [সংকোচক সঞ্চালন]

* উদাহরণ ১' ও ২' দ্রষ্টব্য।

১৪. নিখুঁত বিহিতাকার (Perfect Normal Forms)

বিহিতাকার যেমন দু রকম, নিখুঁত বিহিতাকারও তেমনি দু রকম : নিখুঁত সংবিহিতাকার (নিখুঁত CNF) ও নিখুঁত বৈবিহিতাকার (নিখুঁত ANF)।

> যে CNF-এতে বাক্যস্থিত প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক প্রত্যেকটি সংযোগীতেই স্বতন্ত্র* বিকল্প হিসাবে থাকে তাকে নিখুঁত CNF বলে।

আর

> যে ANF-এতে বাক্যস্থিত প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক প্রত্যেকটি বিকল্পেই স্বতন্ত্র** সংযোগী হিসাবে থাকে তাকে বলে নিখুঁত ANF।

সাধারণ বিহিতাকারকে অতি সহজেই নিখুঁত বিহিতাকারে রূপান্তরিত করা যায়।

স্বতমিথ্যা যোজনা : "p" সম "$p \vee (q \cdot \sim q)$"

এ সূত্র প্রয়োগ করে সাধারণ CNF-কে নিখুঁত CNF-এতে রূপান্তরিত করা যায়। কেননা, আমরা জানি, এ সূত্রটির সাহায্যে সংযৌগিক বাক্যের যেকোনো সংযোগীতে যেকোনো বর্ণপ্রতীক বা তার নিষেধ বিকল্প হিসাবে অনুপ্রবেশ করানো যায়। আর

স্বতসত্য সংযুক্তি : "p" সম "$p \cdot (q \vee \sim q)$"

এ সূত্র প্রয়োগ করে সাধারণ ANF-কে নিখুঁত ANF-এতে রূপান্তরিত করা যায়। কেননা, আমরা জানি, এ সূত্রটির সাহায্যে বৈকল্পিক বাক্যের যেকোনো বিকল্পতে যেকোনো বর্ণপ্রতীক বা তার নিষেধ সংযোগী হিসাবে অনুপ্রবেশ করানো যায়।

বলা বাহুল্য, নিখুঁত CNF হল সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার আর নিখুঁত ANF হল বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার।

উদাহরণ :

$p \cdot (p \vee q)$	$p \vee (p \cdot q)$
$[p \vee (q \cdot \sim q)] \cdot (p \vee q)$	$[p \cdot (q \vee \sim q)] \vee (p \cdot q)$
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (p \vee q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q)$
$(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$

"সত্যসারণীর সাহায্য না নিয়ে বুলীয় বিস্তার গঠন করা" নামক বিভাগ (৩৪০পৃঃ) দ্রষ্টব্য।

১৫. বিহিতাকার ও বৈধতা নির্ণয়

বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করতে গিয়েই আমরা বিহিতাকার অবতারণা করেছি। এ প্রসঙ্গে সংবিহিতাকার (CNF) আর বৈবিহিতাকার (ANF)-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্যের কথা মনে রাখার দরকার। কোনো বাক্যের CNF দেখেই বোঝা যায় বাক্যটি স্বতসত্য কি অ-স্বতসত্য, বৈধ কি অবৈধ। কিন্তু কোনো বাক্যের, 'ব'-এর

---

* মানে, কোনো সংযোগী "$p \vee p$" বা "$p \vee \sim p$" আকারের হবে না, কেননা 'p', '$\sim p$'- এসব স্বতন্ত্র প্রতীক নয়।

** মানে, কোনো বিকল্প "$p \cdot p$" বা "$p \cdot \sim p$" আকারের হবে না।

ANF দেখে সব সময় বোঝা যায় না 'ব' বৈধ কি অবৈধ। 'ব'-এর ANF দেখে কেবল জানা যায়—'ব' স্বতমিথ্যা* কি স্বতমিথ্যা নয়। ধরা যাক, জানা গেল প্রদত্ত বাক্য 'ব' স্বতমিথ্যা নয়। এখন, এ বাক্য স্বতসত্যও হতে পারে, পরতসাধ্যও হতে পারে। কিন্তু বাক্যটি স্বতসত্য না কি পরতসাধ্য এর ANF দেখে তা বোঝা যায় না। কাজেই কোনো বাক্য বৈধ কি অবৈধ এর ANF দেখে তা সব সময় বোঝা যায় না। উদাহরণ : মনে করা যাক 'ব'-থেকে পাই

$$(p \cdot \sim q) \vee \sim p \vee q$$

এটি 'ব'-এর ANF। এখন কেবল চোখে দেখেই বুঝবার উপায় নেই 'ব' বৈধ কি অবৈধ। কিন্তু আমরা বলেছি, কোনো বাক্য বৈধ কি অবৈধ তা এর CNF দেখেই বোঝা যায়। এখানে CNF আর ANF এর গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য।

তবু কোনো বাক্যকে ANF-এতে রূপান্তরিত করে নিলে বৈধতা নির্ণয় প্রক্রিয়া দ্রুততর হয়। আবার কোনো সাধারণ ANF কে যদি নিখুঁত ANF তে রূপান্তরিত করি তাহলে কেবল বিকল্পের সংখ্যা গণনা করেই বলে দেওয়া যায় বাক্যটি বৈধ কি অবৈধ।

তাহলে বিহিতাকারের সাহায্যে নিম্নোক্তরূপে বৈধতা নির্ণয় করা যায় :

(১) প্রদত্ত বাক্যকে CNF-এতে রূপান্তরিত করে
(২) প্রদত্ত বাক্যকে ANF-এতে রূপান্তরিত করে, এবং, প্রয়োজন হলে, যেকোনো নির্ণয় পদ্ধতি (যথা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ) প্রয়োগ করে
(৩) প্রদত্ত বাক্যকে ANF-এতে রূপান্তরিত করে, এবং প্রয়োজন হলে তাকে আবার নিখুঁত ANF-এতে রূপান্তরিত করে।

উদাহরণ ১

$(\sim p \supset p) \supset p$
$(p \vee p) \supset p$
$p \supset p$
$\sim p \vee p$ [CNF]

মূল বাক্যটি বৈধ। (শেষোক্ত বাক্যটি অবসংযৌগিক)।

$p \therefore q \supset p$
$p \supset (q \supset p)$
$\sim p \vee (q \supset p)$
$\sim p \vee (\sim q \vee p)$
$p \vee \sim p \vee \sim q$ [CNF]

যুক্তিটি বৈধ। (শেষোক্ত বাক্যটি অবসংযৌগিক)।

উদাহরণ ২ক

$(p \supset q) \cdot p \cdot \sim q$
$(\sim p \vee q) \cdot p \cdot \sim q$
$p \cdot \sim q \cdot (\sim p \vee q)$
$(p \cdot \sim q \cdot \sim p) \vee (p \cdot \sim q \cdot q)$ [ANF]

প্রদত্ত বাক্যটি স্বতমিথ্যা।

* যদি জানা যায় 'ব' স্বতমিথ্যা, তাহলে, বলা বাহুল্য, জানা গেল—'ব' অবৈধ।

উদাহরণ ২খ

$$
\begin{array}{l}
[(p \supset q) \cdot q] \supset p \\
\sim[(p \supset q) \cdot q] \vee p \\
\sim(p \supset q) \vee \sim q \vee p \\
\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q \vee p \\
(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p \qquad [\text{ANF}]
\end{array}
$$

বাক্যটি স্বতমিথ্যা নয়। কিন্তু বাক্যটি স্বতসত্য না কি পরতসাধ্য? নানাভাবে ANFটির বৈধতা নির্ণয় করা যায়। আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে পাই

$$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p$$

$$(1 \cdot \sim q) \vee \sim q \vee 1 \qquad\qquad (0 \cdot \sim q) \vee \sim q \vee 0$$

$$1 \qquad\qquad\qquad \sim q$$

$$0 \qquad 1$$

সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি অবৈধ।

উদাহরণ ৩

$$[(p \supset q) \cdot q] \supset p$$

$$(p \cdot \sim q) \vee \sim q \vee p \qquad (\text{ANF})$$

এ ANF-কে নিখুঁত ANF-এতে রূপান্তরিত করে পাই

$$
\begin{array}{l}
(p \cdot \sim q) \vee [\sim q \cdot (p \vee \sim p)] \vee [p \cdot (q \vee \sim q)] \\
(p \cdot \sim q) \vee (\sim q \cdot p) \vee (\sim q \cdot \sim p) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \\
(p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \\
(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \\
(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)
\end{array}
$$

শেষোক্ত বাক্যটিতে 2^n বিকল্প ($n=2$) নেই; সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি অবৈধ।

১৬. ANF উপপাদ্য ও CNF উপপাদ্য

বুলীয় বিস্তার প্রসঙ্গে আমরা বলেছিলাম যে স্বতসত্য বাক্যের সংবুবিস্তার, আর স্বতমিথ্যা বাক্যের বৈবুবিস্তার, সম্ভব নয় (৩৩৭, ৩৩৯ পৃঃ দ্রষ্টব্য)। পরে বলেছি বিস্তার কথাটি আরও ব্যাপক অর্থে ব্যবহার করা হয়; বলেছি—"বিস্তার" কথাটি ব্যাপকতম অর্থে নিয়ে এর পরিবর্তে "বিহিতাকার" কথাটি ব্যবহার করব; বলেছি—'p', 'q', '$\sim p$' ইত্যাদি বুলীয় বিস্তার নয়, ঠিক—তবে এসবও বিহিতাকার বলে গণ্য। এখন দাবী করছি

> যে কোনো বাক্যের* বৈকল্পিক বিহিতাকার (বৈবিহিতাকার, ANF) ও সংযৌগিক বিহিতাকার (সংবিহিতাকার, CNF) পাওয়া যায়।

এ উক্তির সত্যতা সম্পর্কে সংশয় হলে নিম্নোক্ত প্রমাণ দুটি—ANF উপপাদ্যের প্রমাণ ও CNF উপপাদ্যের প্রমাণ—দেখ। এ প্রমাণ দুটি যুক্তভাবে উক্ত উক্তির সত্যতার প্রমাণ।

* এ বিভাগে "বাক্য" কথাটি সংকীর্ণ অর্থে নিতে হবে, "বাক্য" বলতে বুঝতে হবে: বাক্য-কলনের অন্তর্গত সুবা (সুগঠিত বাক্য)। বস্তুত নবম অধ্যায়ের পর থেকে আমরা বাক্যকলনের সুবা অর্থেই "বাক্য" ব্যবহার করে আসছি।

প্রস্তাবিত প্রমাণগুলি উত্থাপন করার আগে "একাঙ্গী বাক্য" কথাটির মানে আবার বলে নিলাম। যে বাক্য একবর্ণ বচনগ্রাহক বা একবর্ণ গ্রাহকের নিষেধ তাকে বলে একাঙ্গী বাক্য। যথা : 'p', 'q', '$\sim p$'।

ANF উপপাদ্য :

প্রত্যেক বাক্যকে ANF-এতে ব্যক্ত করা যায়।

(আরও বিশদভাবে বলতে গেলে)

যে কোনো বাক্য থেকে এর সমার্থক বাক্য হিসাবে পাওয়া যায়

$$স_১ \vee স_২ \vee স_৩ \vee \cdots\cdots \vee স_n$$

আকারের বাক্য—যে আকারে $n \geqq 1$* এবং '$স_১$', '$স_২$' ইত্যাদির প্রত্যেকটি একাঙ্গী-বাক্য-দিয়ে-গঠিত ও অনিষেধিত সংযৌগিক, অথবা অবসংযৌগিক।

প্রমাণ :

সব বাক্যেরই সত্যসারণী গঠন করা যায়, এবং যে কোনো বাক্যের সত্যসারণীর মুখ্য স্তম্ভে থাকবে

(১) কেবল '0' (মানে বাক্যটি সব সত্যসর্তেই মিথ্যা)

অথবা (২) কেবল একটি '1' (মানে বাক্যটি কেবল একটি সত্যসর্তে সত্য)

অথবা (৩) একাধিক '1' (মানে বাক্যটি একাধিক সত্যসর্তে সত্য)।

(এখন দেখানো হবে—উক্ত প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে ANF সম্ভব।)

(১) (আমরা জানি,) যে বাক্যের সত্যসারণীর মুখ্য স্তম্ভে কেবল '0' থাকে—মানে, যে বাক্য সব সত্যসর্তেই মিথ্যা—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায় : "$p \cdot \sim p$" ("$q \cdot \sim q$" ইত্যাদি)। মূল বাক্য ও '$p \cdot \sim p$' অবশ্যই সমার্থক, কেননা উভয়ই স্বতমিথ্যা।

এখন '$p \cdot \sim p$' অবশ্যই ANF বলে গণ্য। লক্ষণীয় এটি একটি অববৈকল্পিক বাক্য। মনে কর, এটি উপরোক্ত উপপাদ্যের $স_১$।

(২) (আমরা দেখেছি,) যে সব বাক্যের সারণীর মুখ্য স্তম্ভে কেবল একটি '1'—মানে, যে বাক্য কেবল একটি সত্যসর্তে সত্য—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায় : অনুষঙ্গী সত্যসর্ত বাক্যটি (আকরবাক্যটি)। যথা

$$\sim(p \vee q \vee r)$$

এর সত্যসারণীর আকরস্তম্ভে সর্বশেষ সারিতে যে মূল্য কেবল সে মূল্য বিন্যাসেই বাক্যটি সত্য, সুতরাং এ সারির আকরবাক্য, মানে

$$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r$$

লিখতে পারি মূল বাক্যটির সমার্থক হিসাবে।

* "$n \geqq 1$" মানে n 1-এর সমান ($n=1$) বা n 1-থেকে বড় ($n > 1$)।

এখন '$\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r$' ANF বলে গণ্য। লক্ষণীয় এটিও অবৈকল্পিক। মনে কর, এ বাক্যটি উপরোক্ত উপপাদ্যের স১।

(৩) (আমরা আরও দেখেছি,) যে বাক্যের সারণীর মুখ্যস্তম্ভে একাধিক '1'—মানে, যে বাক্য একাধিক সত্যসর্তে সত্য—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায়ঃ অনুষঙ্গী সত্যসর্ত বাক্যগুলি-দিয়ে-গঠিত বৈকল্পিক। যথা

$$p \cdot (q \vee r)$$

এর সারণী গঠন করলে দেখা যাবে, প্রথম তিনটি সারির সত্যমূল্য বিন্যাসে এ বাক্য সত্য। এ সারিগুলির অনুষঙ্গী আকরবাক্য হল (সারণীটির উপর দিক থেকে নিচের দিকে যাও)ঃ

$$p \cdot q \cdot r$$
$$p \cdot q \cdot \sim r$$
$$p \cdot \sim q \cdot r$$

এখন এ বাক্যগুলি দিয়ে বৈকল্পিক গঠন করে পাই

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r)$$

স্পষ্টতই এ বাক্যের আকার ঃ স১ v স২ v স৩ ; সুতরাং এ আকার ANF।
উপরোক্ত (১), (২), (৩)—এ তিনটি বিকল্পের ক্ষেত্রেই ANF সম্ভব*। সুতরাং যে কোনো বাক্যের ANF সম্ভব।

CNF উপপাদ্য

প্রত্যেক বাক্যকে CNF-এতে ব্যক্ত করা যায়

(আরও বিশদভাবে বলতে গেলে)

যে কোনো বাক্য থেকে এর সমার্থক হিসাবে পাওয়া যায়

ব১ · ব২ · ব৩...... · ব$_n$

আকারের বাক্য—যে আকারে $n \geqq 1$, এবং 'ব১', 'ব২' প্রভৃতির প্রত্যেকটি একাঙ্গী-বাক্য-দিয়ে-গঠিত ও অনিষেধিত বৈকল্পিক, অথবা অবৈকল্পিক।

প্রমাণ ঃ

সব বাক্যেরই সত্যসারণী গঠন করা যায়, এবং যে কোনো বাক্যের সত্যসারণীর মুখ্য স্তম্ভে থাকবে

(1) কেবল '1' (মানে বাক্যটি সব সত্যসর্তেই সত্য)

অথবা (2) কেবল একটি '0' (মানে বাক্যটি কেবল একটি সত্যসর্তে মিথ্যা)

অথবা (3) একাধিক '0' (মানে বাক্যটি একাধিক সত্যসর্তে মিথ্যা)

(এখন দেখানো হবে—উক্ত প্রত্যেকটি ক্ষেত্রে CNF সম্ভব।)

(1) (আমরা জানি,) যে বাক্যের সত্যসারণীর মুখ্যস্তম্ভে কেবল '1' থাকে—মানে, যে বাক্য সব সত্যসর্তেই সত্য—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায়ঃ "$p \vee \sim p$" ("$q \vee \sim q$" ইত্যাদি)। মূল বাক্য ও "$p \vee \sim p$" অবশ্যই সমার্থক, কেননা উভয়ই স্বতসত্য।

এখন "$p \vee \sim p$" অবশ্যই CNF বলে গণ্য। লক্ষণীয়, এটি একটি অবসংযৌগিক। মনে কর, এ বাক্যটি উপরোক্ত উপপাদ্যের ব১।

---

* আর এ বিকল্পগুলি সর্বগ্রাহী (exhaustive)।

(2) (আমরা দেখেছি,) যে বাক্যের সারণীর মুখ্যস্তম্ভে কেবল একটি '0'—মানে যে বাক্য কেবল একটি সত্যাসর্তে মিথ্যা—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায়ঃ অনুষঙ্গী সত্যাসর্ত বাক্যটির (আকরবাক্যটির) নিষেধ ; আর আকরবাক্যের (সংযৌগিকের) নিষেধ থেকে বৈকল্পিক বাক্য পাওয়া যায় (DM প্রয়োগ করে)। যথা

$$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

-এর সত্যসারণীর সর্বশেষ সারিতে যে মূল্য কেবল সে মূল্যবিন্যাসেই বাক্যটি মিথ্যা, সুতরাং এ সারির অনুষঙ্গী আকরবাক্যের নিষেধ, মানে

$$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$

বা $p \vee q \vee r$ (DM, DN প্রয়োগ করে)

লিখতে পারি মূল বাক্যের সমার্থক হিসাবে।

এখন "$p \vee q \vee r$" CNF বলে গণ্য। লক্ষণীয় এটি একটি অবসংযৌগিক। মনে কর, এ বাক্যটি উপরোক্ত উপপাদ্যের ব$_১$।

(3) (আমরা আরও দেখেছি,) যে বাক্যের সারণীর মুখ্যস্তম্ভে একাধিক '0'—মানে, যে বাক্য একাধিক সত্যাসর্তে মিথ্যা—সে বাক্যের সমার্থক হিসাবে লেখা যায়ঃ অনুষঙ্গী সত্যাসর্ত বাক্যের নিষেধ দিয়ে গঠিত সংযৌগিক, আর DM প্রয়োগ করে সংযোগীগুলিকে বৈকল্পিকে রূপান্তরিত করা যায়। যথা

$$p \vee (q \cdot r)$$

-এর সারণী গঠন করলে দেখা যাবে শেষ তিনটি সারির সত্যমূল্য বিন্যাসে এ বাক্য মিথ্যা। এ সারিগুলির অনুষঙ্গী আকরবাক্যের নিষেধ হল (সারণীটি নিচের দিক থেকে ওপরের দিকে যাও) ঃ

$$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$$
$$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r)$$
$$\sim(\sim p \cdot q \cdot \sim r)$$

এ বাক্যগুলি দিয়ে সংযৌগিক গঠন করে পাই

$$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r) \cdot \sim(\sim p \cdot \sim q \cdot r) \cdot \sim(\sim p \cdot q \cdot \sim r)$$

আর DM ও DN প্রয়োগ করে এ বাক্য লিখতে পারি এভাবে

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee r)$$

স্পষ্টতই এ বাক্যের আকার হলঃ ব$_১$ · ব$_২$ · ব$_৩$; সুতরাং এ আকার CNF।

উপরোক্ত (1), (2), (3)—এ তিনটি বিকল্পের ক্ষেত্রেই CNF সম্ভব (আর এ বিকল্পগুলি সর্বগ্রাহী)। সুতরাং যে কোনো বাক্যের CNF সম্ভব।

অনুশীলনী

১. '$\sim$' আর '$\cdot$' ব্যবহার করে, এবং 'p', 'q', 'r' নিয়ে এমন একটি যৌগিক বাক্য গঠন কর যা সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এদের কেবল দুটি সত্য হয়। (কোয়াইন্)

২. 'p', 'q', 'r' নিয়ে এমন যৌগিক বাক্য গঠন কর যা সত্য হতে পারে যদি এদের কেবল যে কোনো দুটি সত্য বা কেবল যে কোনো দুটি মিথ্যা হয়।

৩. নিম্নোক্ত 'সংখ্যা'গুলি কোন্ কোন্ যৌগিক বাক্যের সত্যসারণীর ফলসূচক সংখ্যা ?

1010, 1100, 0011, 0101

01101000, 11101000, 00111000, 00010110

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার দাও। এবং বিস্তার দেখে এদের বৈধতা নির্ণয় কর।

$A \vee B$
$[(A \supset B) \cdot A] \supset B$
$[(A \supset B) \cdot \sim A] \supset \sim B$
$(A \cdot B) \vee B \vee C$
$[(A \supset B) \cdot (B \supset C)] \supset (A \supset C)$
$A \equiv (B \cdot C)$

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সংযৌগিক বুলীয় বিস্তার দাও :

$A \cdot B$
$[(A \vee B) \cdot A] \supset \sim B$
$(A \vee B) \supset (A \cdot B \cdot C)$
$(A \vee B) \cdot B \cdot C$
$A \cdot (A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim C$

৬. নিম্নোক্ত বাক্য দুটির সংযৌগিক বা বৈকল্পিক বুলীয় বিস্তার গঠন কর, এবং তারপর লব্ধ বিস্তারটিকে অন্য প্রকার বিস্তারে রূপান্তরিত কর।

$(\sim A \vee B) \supset (\sim A \cdot B)$ $\quad (A \supset \sim B) \supset (A \equiv \sim B)$

৭. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সংবিহিতাকার ও বৈবিহিতাকার (CNF ও ANF) দাও :

$(A \equiv B) \supset (A \supset C)$
$(A \supset B) \cdot (B \supset C) \cdot \sim(\sim A \vee C)$
$\sim\{\sim[\sim A \cdot \sim(\sim B \cdot C) \cdot \sim B] \cdot D\} \cdot E$

৮. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির বৈবিহিতাকার দাও :

$(A \vee B \vee \sim A) \cdot (A \vee B \vee \sim B)$
$(A \vee B \vee \sim B) \cdot (B \vee \sim B \vee \sim C) \cdot (A \vee B \vee C) \cdot (B \vee C \vee \sim C)$

৯. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সংবিহিতাকার দাও :

$(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B)$
$(A \cdot B \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B \cdot \sim B)$

১০. সরল কর :

(1) $A \vee (A \cdot B)$ (5) $(A \cdot B) \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot C) \vee C$
(2) $A \vee (\sim A \cdot B)$ (6) $A \vee \{\sim A \supset [B \vee (\sim B \supset C)]\}$
(3) $A \cdot (\sim A \vee B)$ (7) $(A \vee B) \supset [(A \supset B) \supset \sim(B \vee \sim B)]$
(4) $A \cdot (A \vee B)$ (8) $(A \cdot \sim B) \supset [(A \supset B) \supset \sim(A \cdot \sim B)]$
(9) $(A \cdot B) \vee (\sim A \cdot \sim B \cdot C) \vee (\sim A \cdot B) \vee (A \cdot \sim B \cdot C) \vee (A \cdot \sim B) \vee (A \cdot B \cdot C) \vee (\sim A \cdot B \cdot C)$
(10) $(A \cdot B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot \sim C) \vee (A \cdot \sim B \cdot C) \vee (A \cdot \sim B \cdot \sim C) \vee (\sim A \cdot B \cdot C) \vee (\sim A \cdot B \cdot \sim C) \vee (\sim A \cdot \sim B \cdot C) \vee (\sim A \cdot \sim B \cdot \sim C)$
(11) $(A \vee B \vee C) \cdot (A \vee B \vee \sim C) \cdot (A \vee \sim B \vee C) \cdot (A \vee \sim B \vee \sim C) \cdot (\sim A \vee B \vee C) \cdot (\sim A \vee B \vee \sim C) \vee (\sim A \vee \sim B \vee C) \cdot (\sim A \vee \sim B \vee \sim C)$

১১. সাধারণ ভাষায় নিম্নোক্ত বাক্যগুলির সরলতম রূপ দাও :

(i) Abraham is present, or both he and Bernard are
(ii) Abraham is present, or both he and Bernard are absent
(iii) Abraham and Bernard are both present or Charles is absent
(iv) Abraham is present, or Bernard is absent, or both of them are present
(v) Abraham and Bernard are not both present and at least one of them is absent
(vi) Abraham and Charles are both present or both absent, and at least one of them is absent
(vii) Abraham has arrived, or Bernard and Charles have both left, but Bernard has not left
(viii) Abraham has arrived, Bernard and Charles are both pleased or both displeased ; and Bernard is pleased.

(জেফ্‌রি অনুসরণে)

১২. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি বাক্য সম্পর্কে বল—বাক্যটি কোন্ বাক্যের CNF বা CNF-এর সমার্থক :

$p \vee q$
$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \sim r) \vee (p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r)$

১৩. নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি বাক্য সম্পর্কে বল—বাক্যটি কোন্ বাক্যের ANF বা ANF-এর সমার্থক :

$p \cdot q$
$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$(p \vee q) \cdot (\sim p \cdot \sim q)$
$(p \cdot \sim q \cdot r) \vee (p \cdot \sim q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot q \cdot r) \vee (\sim p \cdot q \cdot \sim r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot r) \vee (\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$

১৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$p \vee \sim p$"-তে রূপান্তরিত কর :

$[(p \supset q) \quad p] \supset q$
$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

১৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে "$p \,.\, \sim p$"-তে রূপান্তরিত কর :

$\sim p \cdot (p \vee q) \cdot \sim q$
$p \cdot (p \supset q) \cdot \sim r \cdot (q \supset r)$

১৬. স্বতসত্যে রূপান্তরিত করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি বৈধ :

$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$
$[(A \supset B) \cdot (C \supset D) \cdot (A \vee C)] \supset (B \vee D)$

১৮

প্রতিমানতা (Duality)

১. ভূমিকা

এতক্ষণ আমরা যে পদ্ধতিগুলি আলোচনা করেছি সেগুলি প্রয়োগ করে প্রতিপত্তি ও সমার্থতা নির্ণয় করা যায়—কোনো বাক্য অন্য বাক্যকে প্রতিপাদন করে কিনা, অন্য বাক্যের সমার্থক কিনা, এ প্রশ্নের সুনির্দিষ্ট উত্তর পাওয়া যায়। এখন আমরা কয়েকটি নিয়ম উল্লেখ করতে যাচ্ছি—যেগুলির ভিত্তিতে জ্ঞাত প্রতিপত্তি বা জ্ঞাত সমার্থতা থেকে অতিরিক্ত প্রতিপত্তি বা সমার্থতা লাভ করা যায়। এ জাতীয় নিয়ম যে পূর্বে উল্লেখ করা হয় নি তা নয়। যথা আমরা জানি, "$p \cdot q$" প্রতিপাদন করে 'p'-কে—এ প্রতিপত্তি থেকে ব্যাবর্তনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই : "$\sim p$" প্রতিপাদন করে "$\sim(p \cdot q)$"-কে। তবে জ্ঞাত প্রতিপত্তি (সমার্থতা) থেকে অতিরিক্ত প্রতিপত্তি (সমার্থতা) পাওয়ার আরও কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম এ অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। এগুলি পাই প্রতিমানতা বিচার করে। কাজেই প্রথমে প্রতিমানতা আলোচনা করার দরকার।

২. প্রতিমান (Dual)

যদি দুটি বাক্য এমন হয় যে এদের একটির সত্যসারণীতে সব '1'-কে '0'-তে, আর সব '0'-কে '1'-এতে পরিবর্তন করলে অন্যটির (বিপরীত-ক্রমে-লিখিত) সত্যসারণী পাওয়া যায় তাহলে বাক্য দুটিকে পরস্পরের প্রতিমান বলা হয়।

বিরুদ্ধ ('প্রতি') সত্যমূল্য ('মান') নিবেশ করে একটির সত্যসারণী থেকে অন্যটির সত্যসারণী পাওয়া যায় বলে বাক্য দুটিকে পরস্পরের প্রতিমান বলা হয়।

উদাহরণ :

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

এ সারণীতে '1'-এর বদলে '0', আর '0'-এর বদলে '1' বসিয়ে পাই

p	q	—
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

স্পষ্টতই দ্বিতীয় সারণীটি "$p \vee q$"-এর সারণী (বিপরীত-ক্রমে-লেখা)। সারণীটি লক্ষ করলে সহজেই বোঝা যায় ফলস্তম্ভের শীর্ষদেশে "$p \vee q$" থাকবার কথা। তাহলে উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে "$p \cdot q$" আর "$p \vee q$" পরস্পরের প্রতিমান।

নিচের সারণী দুটি লক্ষ কর।

p	q	$\sim p \cdot \sim q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$\sim p \vee \sim q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

এ সারণীটি দুটি তুলনা করলে বোঝা যায়ঃ "$\sim p \cdot \sim q$" আর "$\sim p \vee \sim q$" পরস্পরের প্রতিমান।

আর একটি উদাহরণ ঃ

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	$\sim p$
0	1
1	0

দুটি সারণীই "$\sim p$"-এর সারণী। সারণী দুটি তুলনা করলে বোঝা যাবে একাঙ্গী "$\sim p$"-এর প্রতিমান "$\sim p$" ("p" নয়)।

এখন, কোনো বাক্যের প্রতিমান পেতে হলে এভাবে সত্যসারণী গঠন করার দরকার হয় না। নিচে দুটি নিয়ম উল্লেখ করা হল। এ নিয়ম দুটি অনুসরণ করে বাক্য গঠন করলেই প্রতিমান পাওয়া যাবে।

ক নিয়ম ঃ যদি কোনো বাক্যে '$\sim$', '$\cdot$' '$\vee$' ছাড়া অন্য যোজক না থাকে, তাহলে বাক্যটির অন্তর্গত সব '$\cdot$'-এর বদলে '$\vee$' আর সব '$\vee$'-এর বদলে '$\cdot$' বসিয়ে একটি বাক্য গঠন করবে। (দেখতে পাবে, লব্ধ বাক্য ও মূল বাক্য প্রতিমান।)

খ নিয়ম ঃ প্রদত্ত বাক্যের প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক নিষেধ কর এবং সমগ্র বাক্যটি নিষেধ কর। (দেখতে পাবে, লব্ধ বাক্যটি মূল বাক্যের প্রতিমান।)

৩. ক নিয়ম সম্বন্ধে

যে বাক্যে '$\supset$', '$\equiv$' প্রভৃতি যোজক নেই, ক নিয়ম সরাসরি তার সম্বন্ধেই খাটে। আমরা "—এর প্রতিমান—"-এর পরিবর্তে "—প্রতিমান—", আরও সংক্ষিপ্ত "—প্রতি—" ব্যবহার করব।

উদাহরণ

"$\sim p \cdot q$" —প্রতিমান—"$\sim p \vee q$"

"$p \vee (q \cdot \sim r)$" —প্রতি—"$p \cdot (q \vee \sim r)$"

"$(p \cdot q) \vee (r \cdot s)$"—প্রতি—"$(p \vee q) \cdot (r \vee s)$"

আলোচ্য নিয়ম প্রয়োগ করে প্রতিমান গঠন করার সময় মনে রাখবে ঃ প্রদত্ত বাক্যের যূথীকরণ অবিকৃত রাখতে হবে। যথা "$(p \cdot q) \vee r$"-এর প্রতিমান "$(p \vee q) \cdot r$", "$p \vee (q \cdot r)$" নয়। এ নিয়ম থেকে বোঝা যায়

"$\sim p$"—প্রতিমান—"$\sim p$"

"p"—প্রতিমান— "p"

কেননা, "$p \cdot p$"—প্রতি—"$p \vee p$"

"$p \cdot p$" সম "p" "$p \vee p$" সম "p"

কাজেই বলা যায় : "p"—প্রতি—"p"* ।

সেরকম, "$\sim p \cdot \sim p$" সম "$\sim p$" "$\sim p \vee \sim p$" সম "$\sim p$"

আর "$\sim p \cdot \sim p$" —প্রতি— "$\sim p \vee \sim p$"

সুতরাং "$\sim p$" —প্রতি— "$\sim p$"* ।

এ প্রসঙ্গে আর একটি নিয়ম উল্লেখ করতে পারি । "$\cdot$" আর "v"-এর যে সম্বন্ধ "$\downarrow$" আর "/"-এরও সে সম্বন্ধ । কাজেই যে বাক্যে "$\sim$", "$\downarrow$", "/" থাকে সে বাক্য সম্বন্ধে অনুরূপ নিয়ম রচনা করা যায় । বলতে পারি, এরূপ বাক্যের প্রতিমান পেতে হলে :

"$\downarrow$"-এর পরিবর্তে "/", আর "/"-এর পরিবর্তে "$\downarrow$" ব্যবহার কর ।

উদাহরণ :

"$p \downarrow q$" —প্রতিমান—"p / q"

"$p \downarrow (q / r)$"—প্রতি—"$p / (q \downarrow r)$"

"p / q" —প্রতি—"$p \downarrow q$"

সংশয় হলে এদের "$\cdot$", "v" দিয়ে ব্যক্ত কর । দেখবে এ প্রতিমানগুলি ক নিয়ম থেকেই পাওয়া যায় । উদাহরণ : উপরোক্ত দ্বিতীয় দৃষ্টান্তটির দু ধার লক্ষ কর ।

"$p \downarrow (q / r)$" সম "$\sim p \cdot \sim(q / r)$" সম "$\sim p \cdot \sim\sim(q \cdot r)$" সম "$\sim p \cdot q \cdot r$"

"$p / (q \downarrow r)$" সম "$\sim(p \cdot (q \downarrow r)$" সম "$\sim p \vee \sim(\sim q \cdot \sim r)$" সম "$\sim p \vee q \vee r$"

ক নিয়ম অনুসারে সর্বদক্ষিণের বাক্য দুটি পরস্পরের প্রতিমান, সুতরাং সর্ববাম ধারের বাক্য দুটিও প্রতিমান ।

সমার্থতা ও স্বপ্রতিমানতা (Self-duality) : কোনো কোনো ক্ষেত্রে কোনো বাক্য ও তার প্রতিমান সমার্থক । এরূপ ক্ষেত্র কিন্তু দুর্লভ । অধিকাংশ বাক্য ও এর প্রতিমান অসমার্থক ।

যে বাক্যের প্রতিমান বাক্যটির সমার্থক সে বাক্যকে বলে স্বপ্রতিমান (self-dual) বাক্য, মানে—এমন বাক্য যা নিজেই নিজের† প্রতিমান । আগেই বলেছি স্বপ্রতিমান বাক্য বিরল । নিচে স্বপ্রতিমান বাক্যের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল ।

'p' স্বপ্রতিমান, '$\sim p$' স্বপ্রতিমান

আবার "$p \cdot p$", "$p \vee p$"—এসবও স্বপ্রতিমান ।

* এ অনুমানে নিম্নোক্ত সূত্রটির সাহায্য নেওয়া হয়েছে : যদি "ব" ও "ভ" পরস্পরের প্রতিমান হয় তাহলে "ব"-এর সমার্থক ও "ভ"-এর সমার্থক পরস্পরের প্রতিমান ।

† বা সমার্থকের

আর একটি উদাহরণ ঃ

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot r) \vee (q \cdot r)$$

এ বাক্য স্বপ্রতিমান, কেননা বাক্যটি ও এর প্রতিমান

$$(p \vee q) \cdot (p \vee r) \cdot (q \vee r)$$

সমার্থক। এ বাক্য দুটি যে পরস্পরের প্রতিমান এ সম্বন্ধে সংশয় নেই (ক নিয়ম দ্রষ্টব্য)। এরা সমার্থক কিনা এ বিষয়ে সংশয় হলে এদের সত্যসারণী গঠন করে দেখ, অথবা নিম্নোক্ত সত্যমূল্য বিশ্লেষণ দেখ।

$$[(p \cdot q) \vee (p \cdot r) \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r) \cdot (q \vee r)]$$

$$[(1 \cdot q) \vee (1 \cdot r) \vee (q \cdot r)] \equiv [(1 \vee q) \cdot (1 \vee r) \cdot (q \vee r)]$$

$$[q \vee r \vee (q \cdot r)] \equiv [1 \cdot 1 \cdot (q \vee r)]^{*}$$

$$[q \vee r] \equiv [q \vee r]$$

1

$$[(0 \cdot q) \vee (0 \cdot r) \vee (q \cdot r)] \equiv [(0 \vee q) \cdot (0 \vee r) \cdot (q \vee r)]$$

$$[0 \vee 0 \vee (q \cdot r)] \equiv [q \cdot r \cdot (q \vee r)]^{**}$$

$$[q \cdot r] \equiv [q \cdot r]$$

1

সমার্থক বাক্যের প্রতিমান : যে বাক্যে '⊃' বা '≡' নেই সে বাক্য সম্বন্ধেই ক নিয়ম খাটে। এখন প্রাকল্পিক ও দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য, বা যে বাক্যে '⊃' বা '≡' আছে সে বাক্য, থেকে '⊃', '≡' দূর করে বাক্যকে " · " বা "v" (আর "~") দিয়ে ব্যক্ত করা যায়। কাজেই এরূপ বাক্যের প্রতিমান পেতে অসুবিধা হওয়ার কথা নয়। এরূপ কোনো বাক্যের প্রতিমান পেতে হলে ঃ বাক্যটি থেকে '⊃', '≡' দূর করে সমার্থকে রূপান্তরিত কর, এবং লব্ধ বাক্যের প্রতিমান গঠন কর। এ প্রতিমানটি অবশ্যই মূল বাক্যের প্রতিমান বলে গণ্য।

উদাহরণ ঃ

"$p \supset q$" সম "$\sim p \vee q$" "$\sim p \vee q$" —প্রতি— "$\sim p \cdot q$"

∴ "$p \supset q$" —প্রতি— "$\sim p \cdot q$"

"$p \equiv q$" সম "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$" "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot q)$" -প্রতি- "$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$"

∴ "$p \equiv q$" -প্রতি- "$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$"

তবে এভাবে সমার্থকে রূপান্তরিত করে (ক নিয়ম অনুসারে) প্রতিমান গঠন করবার দরকার নেই। খ নিয়মটি সর্বক্ষেত্রেই সরাসরি প্রযোজ্য।

* ক্রমান্তরকরণ, প্রতিপাদক বিকল্প বর্জন (৩৩২ পৃঃ দ্রষ্টব্য।)

** ক্রমান্তরণকরণ, প্রতিপাদ্য সংযোগী বর্জন (৩৩২ পৃঃ দ্রষ্টব্য।)

৪. খ নিয়ম সম্বন্ধে

নিয়মটির পুনরুক্তি করা হল। কোনো বাক্যের প্রতিমান পেতে হলে

প্রদত্ত বাক্যের প্রত্যেকটি বর্ণপ্রতীক নিষেধ করবে, এবং সমগ্র বাক্যটি নিষেধ করবে* ।

উদাহরণ ঃ

"$(p \supset q)$" -প্রতিমান- "$\sim(\sim p \supset \sim q)$"

"$p \cdot q$" -প্রতি- "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"

"$p \vee q$" -প্রতি- "$\sim(\sim p \vee \sim q)$"

"$(p \equiv q)$" -প্রতি- "$\sim(\sim p \equiv \sim q)$"

আবার,

"$p \cdot p$" -প্রতি- "$\sim(\sim p \cdot \sim p)$" [সরলীকরণ করেপাই ঃ '$p$' -প্রতি- '$p$']

"$\sim p \vee \sim p$" -প্রতি- "$\sim(p \vee p)$" [সরলীকরণ করে পাই ঃ '$\sim p$'-প্রতি- '$\sim p$']

দুটি করে প্রতিমান ঃ সমার্থতা ও ডি মরগেন

প্রতিমান গঠন করার যে দুটি নিয়ম উল্লেখ করা হল সেগুলি অনুসরণ করলে একই বাক্যের দুটি করে প্রতিমান পাওয়া যাবে। এখন

'ব' ও 'ভ' যদি 'ম'-এর প্রতিমান হয় তাহলে ঃ 'ব' equiv 'ভ'

মানে, একই বাক্যের প্রতিমান দুটি সমার্থক।

এ সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই ডি মরগেন নিয়ম। কি করে পাই, দেখ।

"$p \vee q$"-এর প্রতিমান < "$p \cdot q$" [ক নিয়ম] / "$\sim(\sim p \vee \sim q)$" [খ নিয়ম]

"$p \cdot q$"-এর প্রতিমান < "$p \vee q$" [ক নিয়ম] / "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$" [খ নিয়ম]

সুতরাং

"$p \cdot q$" সম "$\sim(\sim p \vee \sim q)$"
"$p \vee q$" সম "$\sim(\sim p \cdot \sim q)$"] ডি মরগেন

* মূল বাক্যের প্রত্যেকটি যোজক এবং বাক্যের বৃথীকরণ অবিকৃত রাখতে হবে

আবার,

$$\text{"}\sim(p \cdot q)\text{"-এর প্রতিমান} \begin{cases} \text{"}\sim(p \vee q)\text{"} \\ \text{"}\sim p \cdot \sim q\text{"} \end{cases}$$

$$\text{"}\sim(p \vee q)\text{"-এর প্রতিমান} \begin{cases} \text{"}\sim(p \cdot q)\text{"} \\ \text{"}\sim p \vee \sim q\text{"} \end{cases}$$

সুতরাং উক্ত সূত্র অনুসারে

"$\sim(p \vee q)$" সম "$\sim p \cdot \sim q$"]
"$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim p \vee \sim q$"] ডি মরগেন

ডি মরগেন নিয়মগুলি লক্ষ করলে বুঝতে পারবে—

যদি 'ব' ও 'ভ' পরস্পরের প্রতিমান হয় তাহলে "ব-সম" ও "ভ-সম" পরস্পরের প্রতিমান। যথা

[ব]	$p \cdot q$	সম	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	[ব-সম]
	প্র		প্র	
	তি		তি	
[ভ]	$p \vee q$	সম	$\sim(\sim p \cdot \sim q)$	[ভ-সম]

আবার, যদি 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হয় তাহলে 'ব'-এর প্রতিমান ও 'ভ'-এর প্রতিমান সমার্থক। যথা

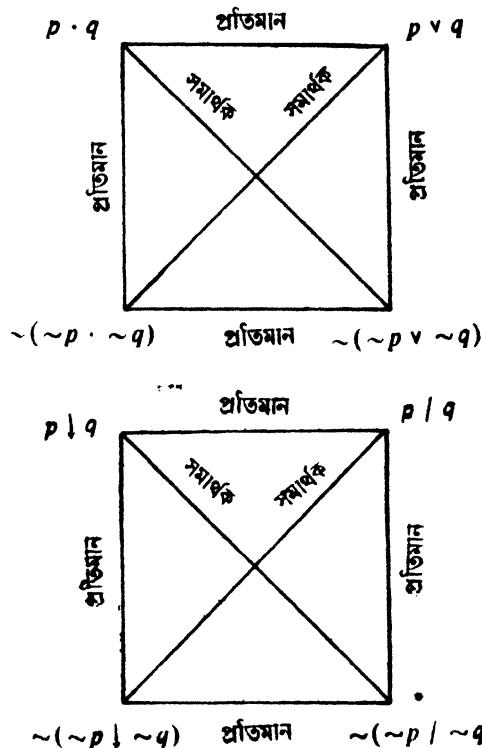
[ব]	$\sim(p \vee q)$	—প্রতি—	$\sim(p \cdot q)$	[ব-এর প্রতিমান]
	স		স	
	ম		ম	
[ভ]	$\sim p \cdot \sim q$	—প্রতি—	$\sim p \vee \sim q$	[ভ-এর প্রতিমান]

ডি মরগেনের নিয়মগুলি প্রতিমানতার উপর নির্ভরশীল। এজন্য—এ নিয়মগুলিকেও অনেকে প্রতিমানতার নিয়ম বলে উল্লেখ করেন।

'$p \downarrow q$', '$p \mid q$'—এদের প্রত্যেকটির দুটি করে প্রতিমান গঠন করে পাই

$$\text{"}p \downarrow q\text{" প্রতি} \begin{cases} \text{"}p \mid q\text{"} \\ \text{"}\sim(\sim p \downarrow \sim q)\text{"} \end{cases} \quad \therefore \text{"}p \mid q\text{" সম "}\sim(\sim p \downarrow \sim q\text{"}$$

$$\text{"}p \mid q\text{" প্রতি} \begin{cases} \text{"}p \downarrow q\text{"} \\ \text{"}\sim(\sim p \mid \sim q)\text{"} \end{cases} \quad \therefore \text{"}p \downarrow q\text{" সম "}\sim(\sim p \mid \sim q)\text{"}$$

উক্ত সম্বন্ধগুলি দুটি বর্গক্ষেত্রে দেখানো হল।

৫. প্রতিমানতা নির্ণয়

ধরা যাক, 'ব' ও 'ভ'-এর মধ্যে প্রতিমানতার সম্বন্ধ আছে কিনা এ ব্যাপারে সংশয় হল, প্রশ্ন উঠল : 'ব' কি 'ভ'-এর প্রতিমান? এ সংশয় সহজেই নিরসন করতে পার, 'ভ' প্রকৃতই 'ব'-এর প্রতিমান কিনা তা নির্ণয় করতে পার। পার এভাবে—উক্ত নিয়ম দুটির যে কোনোটি অনুসরণ করে প্রদত্ত 'ব'-এর প্রতিমান গঠন কর।* এখন নবগঠিত বাক্যটি যদি 'ভ'-এর সমার্থক হয় তাহলে 'ভ' প্রকৃতই 'ব'-এর প্রতিমান, নতুবা নয়। উদাহরণ

"$p \cdot q \cdot r$" [ব] কি "$\sim p \supset (\sim q \supset r)$" [ভ]-এর প্রতিমান?

উত্তর :

"$p \cdot q \cdot r$" —প্রতি— "$p \vee q \vee r$"
"$p \vee (q \vee r)$"
"$\sim p \supset (q \vee r)$"
"$\sim p \supset (\sim q \supset r)$" এ বাক্যটিই প্রদত্ত 'ভ'। সুতরাং প্রদত্ত বাক্য দুটি পরস্পরের প্রতিমান।

* বা 'ভ'-এর প্রতিমান গঠন কর। লব্ধ বাক্যটি যদি 'ব'-এর সমার্থক হয় তাহলে 'ব' ও 'ভ' পরস্পরের প্রতিমান।

"$p \vee q \vee r$" এবং "$\sim(\sim p \cdot \sim q \cdot \sim r)$" কি পরস্পরের প্রতিমান ?

উত্তর : বাম ধারের বাক্যটির প্রতিমান হল : "$p \cdot q \cdot r$" / "$\sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$"

এ দুটি বাক্যের কোনোটি প্রদত্ত ডান-ধারের-বাক্যের সমার্থক নয়। সুতরাং প্রদত্ত বাক্য দুটির মধ্যে প্রতিমানতার সম্পর্ক নেই।

৬. প্রতিমানতা সম্বন্ধে কয়েকটি সূত্র

কি করে প্রতিমান গঠন করতে হয় শিখলাম। কিন্তু কোনো বাক্যের প্রতিমান গঠন করতে যাব কেন ? প্রতিমান গঠন করে কী লাভ ? পরে দেখব : প্রতিমানের সাহায্য নিয়ে প্রতিপত্তি ও সমার্থতা নির্ণয় করা যায়। যদি জানা থাকে অমুক বাক্য অমুক বাক্যের সমার্থক বা অমুক বাক্যকে প্রতিপাদন করে তাহলে বিনা পরীক্ষাতে অতিরিক্ত প্রতিপত্তি ও সমার্থতা লাভ করা যায় (এ অধ্যায়ের ভূমিকা দ্রষ্টব্য)। তার আগে প্রতিমান সম্বন্ধে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সূত্রের দিকে নজর দেওয়া যাক।

সূত্র ১ : কোনো বাক্য স্বতসত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এর প্রতিমান স্বতমিথ্যা হয়।

সূত্র ২ : কোনো বাক্য 'ব' অন্য বাক্য 'ভ'-কে প্রতিপাদন করতে পারে যদি এবং কেবল যদি 'ভ'-এর-প্রতিমান 'ব'-এর-প্রতিমানকে প্রতিপাদন করে।

সূত্র ৩ : দুটি বাক্য সমার্থক হতে পারে যদি এবং কেবল যদি বাক্য দুটির প্রতিমান সমার্থক হয়।*

সূত্র ১ : প্রতিমানতা—স্বতসত্যতা ও স্বতমিথ্যাত্ব

এ সূত্রটির বক্তব্য

" 'ব' স্বতসত্য" equiv " 'ব'-এর-প্রতিমান স্বতমিথ্যা"
" 'ব' স্বতমিথ্যা" equiv " 'ব'-এর-প্রতিমান স্বতসত্য"

যে বাক্যের সত্যসারণীর ফলস্তম্ভ কেবল '1' দিয়ে গঠিত সে বাক্য স্বতসত্য, আর যার ফলস্তম্ভ কেবল '0' দিয়ে গঠিত তা স্বতমিথ্যা। এখন কোনো বাক্য 'ব'-এর সত্যসারণীর প্রত্যেকটি সত্যমূল্যের পরিবর্তে বিরুদ্ধ মূল্য বসালে তবেই 'ব'-এর প্রতিমান পাওয়া যায়। ফলে 'ব'-এর ফলস্তম্ভে কেবল '1' থাকলে এর প্রতিমানের ফলস্তম্ভে কেবল '0' থাকবে, আবার 'ব'-এর ফলস্তম্ভে কেবল '0' থাকলে প্রতিমানের ফলস্তম্ভে কেবল '1' থাকবে। এর থেকে বোঝা যায় : 'ব' ও 'ব'-এর প্রতিমানের কোনো একটি স্বতসত্য হলে অন্যটি স্বতমিথ্যা, কোনো একটি স্বতমিথ্যা হলে অন্যটি স্বতসত্য।

---

* "দুটি করে প্রতিমান" নামক বিভাগে (৩৬৯ পৃঃ) এ সূত্রটির আভাস পাবে।

উদাহরণ

স্বতসত্য		স্বতমিথ্যা	
“$p \vee \sim p$”	-প্রতি-	“$p \cdot \sim p$”	[ক নিয়ম]
“$p / \sim p$”	-প্রতি-	“$\sim(\sim p / p)$”	[খ নিয়ম]
“$\sim(p \cdot q) \vee (p \vee q)$”	-প্রতি-	“$\sim(p \vee q) \cdot (p \cdot q)$”	
“$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$”	-প্রতি-	“$\sim[(\sim p \cdot \sim q) \supset (\sim p \vee \sim q)]$”	

উপরে যা বলা হল তার থেকে বুঝতে পারবে যে

> যদি জানা থাকে অমুক বাক্যটি স্বতসত্য বা স্বতমিথ্যা তাহলে এ তথ্যের ভিত্তিতে উক্ত সূত্র প্রয়োগ করে (আর কোনো নির্ণয় পদ্ধতির সাহায্য না নিয়েই) অন্য বাক্যের (প্রতিমানের) স্বতসত্যতা বা স্বতমিথ্যাত্ব দাবী করা যায়।

উদাহরণ

“$(p \vee q) \cdot \sim p \cdot \sim q$” স্বতমিথ্যা $\therefore$ “$(p \cdot q) \vee \sim p \vee \sim q$” স্বতসত্য

“$[p \vee (p \cdot q)] \equiv p$” স্বতসত্য $\therefore$ “$\sim\{[\sim p \vee (\sim p \cdot \sim q)] \equiv \sim p\}$” স্বতমিথ্যা।

প্রতিমান ও বিরুদ্ধের সম্বন্ধ

আমরা জানি যে

> কোনো বাক্য স্বতসত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি বাক্যটির বিরুদ্ধ স্বতমিথ্যা হয়।

এখন, সূত্র ১ অনুসারে

> কোনো বাক্য স্বতসত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি বাক্যটির প্রতিমান স্বতমিথ্যা হয়।

এ উক্তি দুটি তুলনা করলে এ ধারণা হতে পারে যে, কোনো বাক্যের প্রতিমান ও বিরুদ্ধ অভিন্ন। কিন্তু এ ধারণা ভুল। ‘ব’-এর প্রতিমান ‘ব’-এর বিরুদ্ধ হবে এমন কথা নেই। যথা

‘p’ -প্রতি- ‘p’, ‘$\sim p$’ -প্রতি- ‘$\sim p$’, ‘$p \cdot q$’ -প্রতি- ‘$p \vee q$’

উক্ত কোনো ক্ষেত্রে মূল বাক্য ও এর প্রতিমান পরস্পর বিরুদ্ধ নয়। তবে

> ‘ব’ যদি স্বতসত্য অথবা স্বতমিথ্যা হয় তাহলে ‘ব’-এর প্রতিমানটি ‘ব’-এর বিরুদ্ধও বটে।

আর

> ‘ব’ যদি পরতসাধ্য হয় তাহলে ‘ব’ আর ‘ব’-এর প্রতিমান পরস্পর বিরুদ্ধ নাও হতে পারে।

এ প্রসঙ্গে কোনো বাক্যের প্রতিমান ও বিরুদ্ধের সম্বন্ধ আরও একটু বিশদভাবে আলোচনা করা যাক। পরতসাধ্য বাক্যের প্রতিমান ও বিরুদ্ধের মধ্যে নানান প্রকারের সম্বন্ধ থাকতে পারে। উদাহরণ

পরতসাধ্য

মূল বাক্য

'p' ⟨ প্রতিমান 'p' / বিরুদ্ধ $\sim$'p' — এ ক্ষেত্রে প্রতিমান ও বিরুদ্ধ পরস্পরের বিরুদ্ধ বাক্য (মূল বাক্য ও এর প্রতিমান অভিন্ন)

"$p \cdot q$" ⟨ প্রতিমান "$p \vee q$" / বিরুদ্ধ "$\sim p \vee \sim q$" — এ ক্ষেত্রে প্রতিমান ও বিরুদ্ধ পরস্পরের অনুবিষম* (মূল বাক্য এর প্রতিমানের প্রতিপাদক)।

"$p \vee q$" ⟨ প্রতিমান "$p \cdot q$" / বিরুদ্ধ "$\sim p \cdot \sim q$" — এ ক্ষেত্রে প্রতিমান ও বিরুদ্ধ পরস্পরের অতিবিষম** (প্রতিমান মূল বাক্যের প্রতিপাদক)।

এবার স্বতসত্য ও স্বতমিথ্যা বাক্যের উদাহরণ নেওয়া যাক।

স্বতমিথ্যা : "$p \cdot \sim p \cdot q$" ⟨ প্রতিমান "$p \vee \sim p \vee q$" (১) / ি "$\sim p \vee p \vee \sim q$" (২)

এখানে (১) ও (২) সমার্থক।
(∴ মূল বাক্য ও প্রতিমান পরস্পর বিরুদ্ধ।)

স্বতসত্য : "$\sim(p \cdot q) \vee (p \vee q)$" ⟨ প্রতিমান "$\sim(p \vee q) \cdot (p \cdot q)$" (1) / বিরুদ্ধ "$(p \cdot q) \cdot \sim(p \vee q)$" (2)

এখানেও (1) ও (2) সমার্থক।
(∴ মূল বাক্য ও এর প্রতিমান পরস্পর বিরুদ্ধ।)

সূত্র ২ ও ৩ : প্রতিমানতা, প্রতিপত্তি ও সমার্থতা

এ বিভাগে বারবার "ব-এর প্রতিমান", "ভ-এর প্রতিমান"—এ কথাগুলি প্রয়োগ করতে হবে। সংক্ষেপকরণের জন্য আমরা

"ব-এর প্রতিমান"-এর বদলে : ব̲

আর "ভ-এর প্রতিমান"-এর বদলে : ভ̲

ব্যবহার করব। এখন, সূত্র ২ এভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

* অনুবিষম = subcontrary। যদি এমন হয় যে 'ব', 'ভ' এদের উভয়ই যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে না, তাহলে 'ব' ও 'ভ' পরস্পরের অনুবিষম।

** অতিবিষম = contrary। যদি এমন হয় যে 'ব', 'ভ'—এদের উভয়ই যুগপৎ সত্য হতে পারে না, তাহলে 'ব' ও 'ভ' পরস্পরের অতিবিষম।

সূত্র ২

" 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে" equiv " 'ঞ' 'ঌ'-কে প্রতিপাদন করে"

এ সূত্রটির যাথার্থ্য দেখাতে যাচ্ছি। তার আগে একটি সমার্থতা সম্পর্কে নিশ্চিত হয়ে নেবার দরকার। 'ব' ও ''ভ-এর সত্যসারণীতে সত্যমূল্য আদ্যন্ত উল্টে দিয়ে, '1' ও '0'-এর, "সত্য" ও "মিথ্যা"র, একটির বদলে অন্যটি বসিয়ে 'ঌ', 'ঞ'-এর সারণী পাই। কাজেই দেখা যাবে

এমন হতে পারে না যে : 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা

আর এমন হতে পারে না যে : 'ঌ' মিথ্যা ও 'ঞ' সত্য

এ বাক্য দুটি সমার্থক। একটা উদাহরণ নিলে একথা স্পষ্ট হবে।

		ব	ভ
p	q	$p \cdot q$	p
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

		ঌ	ঞ
p	q	$p \vee q$	p
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

এমন হতে পারে না যে 'ব' সত্য ও 'ভ' মিথ্যা।

এমন হতে পারে না যে 'ঌ' মিথ্যা এবং 'ঞ' সত্য

আর একটি উদাহরণ।

এমন হতে পারে না যে : "$p \cdot q$" (ব) সত্য আর "$p \vee q$" (ভ) মিথ্যা

এমন হতে পারে না যে : "$p \quad q$" (ঌ) মিথ্যা আর "$p \cdot q$" (ঞ) সত্য

এ বাক্য দুটি যে সমার্থক তা সহজেই (সংযোগী ক্রমান্তর করলেই) দেখা যায়। এখন

" 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে"

equiv "এমন হতে পারে না যে : 'ব' সত্য এবং 'ভ' মিথ্যা"

equiv "এমন হতে পারে না যে : 'ঌ' মিথ্যা এবং 'ঞ' সত্য"

equiv "এমন হতে পারে না যে : 'ঞ' সত্য এবং 'ঌ' মিথ্যা" (সংযোগী ক্রমান্তরকরণ)

equiv " 'ঞ' 'ঌ'-কে প্রতিপাদন করে"

সূত্র ৩-কে এভাবে ব্যক্ত করা যায়।

সূত্র ৩

" 'ব' ও 'ভ' সমার্থক" equiv " 'ঌ' ও 'ঞ' সমার্থক"।

আমরা দেখেছি

" 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে" আর 'ঌ' " 'ঞ'-কে প্রতিপাদন করে"

সমার্থক বাক্য। অনুরূপভাবে (পরিবর্ত নিবেশন করে) পাই ঃ

" 'ভ' 'ব'-কে প্রতিপাদন করে" আর " 'ঞ' 'ব'-কে প্রতিপাদন করে"

সমার্থক বাক্য। এখন সূত্র ৩-এর যাথার্থ্য এভাবে দেখাতে পারি ঃ

" 'ব' ও 'ভ' সমার্থক"

equiv " 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে এবং 'ভ' 'ব'-কে প্রতিপাদন করে"

equiv " 'ঞ' 'ঌ'-কে প্রতিপাদন করে এবং 'ঌ' 'ঞ'-কে প্রতিপাদন করে"

equiv " 'ঞ' ও 'ঌ' সমার্থক"

equiv " 'ঌ' ও 'ঞ' সমার্থক"।

৭. পূর্ণ প্রতিপাতন (Full Swap)

সূত্র ২ ও সূত্র ৩-এর উপর নির্ভর করে জ্ঞাত প্রতিপত্তি বাক্য থেকে অন্য প্রতিপত্তি বাক্য, জ্ঞাত সমার্থতা বাক্য থেকে অন্য সমার্থতা বাক্য, জ্ঞাত বৈধ বাক্য থেকে অন্য বৈধ বাক্য*, অনুমান করা যায়। এভাবে প্রতিমানতার ভিত্তিতে অতিরিক্ত প্রতিপত্তি, সমার্থতা স্বতসত্য, স্বতমিথ্যা বাক্য নিষ্কাশন করাকে কোয়াইন্ Full Swap (পূর্ণ প্রতিপাতন বা প্রতিমান প্রক্ষেপণ) পদ্ধতি বলে অভিহিত করেছেন। Full Sweep ও Fell Swoop †† পদ্ধতির সঙ্গে আলোচ্য পদ্ধতির পার্থক্য লক্ষণীয়।

সূত্র ২-এর প্রয়োগ ঃ Full Swap-এর উদাহরণ

ধরা যাক, আমাদের জানা আছে নিচের বাম ধারের বাক্যগুলি সত্য। তাহলে আলোচ্য সূত্র অনুসারে প্রত্যেকটি বাক্য থেকে এর ডান ধারের বাক্যটি অনুমান করতে পারি।

ব		ভ	ঞ		ঌ
"$\sim p$"	প্রতিপাদন করে	"$p \supset q$"-কে	"$\sim(\sim p \supset \sim q)$"	প্রতিপাদন করে	"$\sim p$"-কে
"q"	,, ,,	"$p \supset q$"-কে	"$\sim p \cdot q$"*	,, ,,	"q"-কে
"$q \cdot r$"	,, ,,	"$p \supset q$"-কে	"$\sim p \cdot q$"*	,, ,,	"$q \vee r$"-কে
"$p \supset q$"	,, ,,	"$\sim q \supset \sim p$"-কে	"$\sim(q \supset p)$"	,, ,,	"$\sim p \cdot q$"*-কে

* সেরূপ, জ্ঞাত স্ববিরোধিতা থেকে অন্য স্ববিরোধিতা,

†† অধ্যায় ১৫, বিভাগ ৭, পৃঃ ২৭৮ দ্রষ্টব্য।

* "$p \supset q$"-এর প্রতিমান "$\sim(\sim p \supset \sim q)$"-কে সরলীকরণ করে "$\sim p \cdot q$" লেখা হল।

আলোচ্য পদ্ধতিতে এ রকম অনুমানও করতে পারি

"$(q \cdot r) \supset (p \supset q)$" বৈধ ∴ "$(\sim p \cdot q) \supset (q \vee r)$" বৈধ

"$(\sim p \vee q) \supset (p \supset q)$" বৈধ ∴ "$(\sim p \cdot q) \supset (\sim(p \vee \sim q))$" বৈধ।

সূত্র ৩-এর প্রয়োগ : Full Swap-এর উদাহরণ

আমাদের জানা আছে যে নিচের বাম ধারের সমার্থতা বাক্যগুলি সত্য। এ জ্ঞানের ভিত্তিতে সূত্র ৩ অনুসারে ডান দিককার সমার্থতা বাক্যগুলি পেতে পারি। প্রসঙ্গত, " · " আর "v"-এর সম্পর্ক দেখাবার জন্য এমন বাক্য বেছে নিয়েছি যাতে '~', ' · ', 'v' ভিন্ন অন্য যোজক নেই।

ব		ভ		ঠ		ঞ
$p \cdot p$"	সম	"p"		"$p \vee p$"	সম	"p"
$p \cdot q$"	সম	"$q \cdot p$"		"$p \vee q$"	সম	"$q \vee$

অনুশীলনী

১. কোনো বাক্যের প্রতিমান ও বিরুদ্ধের সম্পর্ক কী ?

২. নিম্নোক্ত বাক্যগুলির প্রতিমান দাও :

$$\sim A,\ A \supset (B \supset C),\ (A \cdot B) \supset (A \vee B),\ \sim(\sim A \equiv B)$$

৩. '$p \equiv q$', এ বাক্যটি কি এর নিষেধের প্রতিমান ? তোমার উত্তর সমর্থন কর।
(কোয়াইন্)

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি কি স্বপ্রতিমান ?

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot r) \vee (q \cdot r)$$

$$(p \vee q) \cdot (q \vee r) \cdot (p \vee r)$$

৫. "$(p \vee \sim q) \cdot (q \vee \sim r) \cdot (r \vee s)$" এ বাক্য '$p \vee s$'-এর প্রতিপাদক। ঃ প্রতিপত্তি থেকে প্রতিমানতার নিয়ম অনুসারে আর কোন্ প্রতিপত্তি পেতে পার ?

৬. নিচের প্রত্যেক ছত্রে দুটি করে বাক্য আছে। বাক্য দুটি সমার্থক। এসব সমার্থতা থেকে প্রতিমানতার নিয়ম অনুসারে আর কী কী সমার্থতা পেতে পার ?

p	$p \cdot (p \vee q)$
$p \cdot q$	$p \cdot (\sim p \vee q)$
$p \vee \sim p$	$q \vee \sim q$
p	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)$

৭. নিচের প্রত্যেক ছত্রে দুটি করে বাক্য আছে। বাক্য দুটি কি পরস্পরের প্রতিমান ?

$A \cdot \sim B \cdot C$	$\sim A \supset (B \supset C)$
A	$A \vee A$
$\sim A \vee B \vee C$	$\sim(A \cdot \sim B \cdot \sim C)$
$A \mid (B \downarrow C)$	$A \downarrow (B \mid C)$

———

১৭

অবরোহ পদ্ধতি

১. নির্ণয় ও প্রমাণ

এতক্ষণ আমরা প্রধানত নির্ণয় বা পরীক্ষা পদ্ধতি* আলোচনা করেছি। দুটি প্রদত্ত বাক্য সমার্থক কিনা, অমুক বাক্য তমুক বাক্যকে প্রতিপাদন করে কিনা, কোনো যুক্তি বৈধ কিনা—এসব পদ্ধতি প্রয়োগ করে তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয় করা যায়। এখন আমরা যে পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি তা নির্ণয় পদ্ধতি নয়, প্রমাণ পদ্ধতি। এ পদ্ধতির সাহায্যে সমার্থতা ও প্রতিপত্তি প্রমাণ করা যায়, যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়। কিন্তু নির্ণয় পদ্ধতি ও প্রমাণ পদ্ধতির পার্থক্য কী ?

আমরা বলেছি : নির্ণয় পদ্ধতির সাহায্যে সমার্থতা, প্রতিপত্তি বা বৈধতা নির্ণয় করা যায়। এ কথার মানে—'ব' ও 'ভ' কি সমার্থক ? 'ব' কি 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে ? 'ব ∴ ভ' কি বৈধ ?—এসব প্রশ্নের সুনির্দিষ্ট উত্তর, 'হাঁ', 'না', পাওয়া যায়। কিন্তু প্রমাণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে এরূপ উত্তর পাওয়া সম্ভব নয়। এরূপ উত্তর পাওয়া প্রমাণ পদ্ধতির লক্ষ্যও নয়। তবে যদি 'ব' ও 'ভ' প্রকৃতই সমার্থক হয়, 'ব ⊃ ভ' বা 'ব ∴ ভ' প্রকৃতই বৈধ হয় তাহলে প্রমাণ করা যাবে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক, 'ব ⊃ ভ' বা 'ব ∴ ভ' বৈধ। কেন প্রমাণ পদ্ধতি দিয়ে বৈধতা, প্রতিপত্তি বা সমার্থতা নির্ণয় সম্ভব নয় তা বুঝে নাও। সমার্থতা প্রমাণের কথাই ধরা যাক। ধরা যাক, প্রমাণ করতে হবে যে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক। এখন, যদি 'ব'-কে 'ভ'-তে (বা 'ভ'-কে 'ব'-তে) রূপান্তরিত করতে পারি তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল যে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক। কিন্তু যদি এভাবে রূপান্তর করতে না পারি তাহলে দাবী করা যাবে না যে 'ব' ও 'ভ' অ-সমার্থক। যেমন, মনে কর,

$$p \cdot \sim p \cdot q \qquad\qquad r \cdot \sim r$$

এদের একটিকে অন্যটিতে রূপান্তরিত করতে পারলাম না। তাহলে কি এ দাবী করতে পারি, বাক্য দুটি সমার্থক নয় ? না, তা পারি না। কেননা, হতে পারে—আমাদের অজ্ঞতা বা অক্ষমতার জন্যই এরূপ রূপান্তর করতে পারলাম না, কিন্তু যুক্তিবৈজ্ঞানিক-পদ্ধতিতে-নিপুণ ব্যক্তি সহজে এরূপ রূপান্তর করতে পারে। কাজেই, আমি 'ব'-কে 'ভ'-তে রূপান্তরিত করতে পারলাম না, সুতরাং 'ব' 'ভ'-তে রূপান্তরযোগ্য নয়, বা 'ব' ও 'ভ' সমার্থক নয়—এ যুক্তি অসঙ্গত।

সেরকম, 'ব' থেকে যদি 'ভ' বৈধভাবে নিষ্কাশন করতে পারি তাহলে দাবী করতে পারি : প্রমাণ হল যে 'ব' 'ভ'-এর প্রতিপাদক। প্রমাণ হল : 'ব ∴ ভ' বৈধ। কিন্তু

* বা সাব্যস্তকরণ পদ্ধতি—decision procedure

যদি 'ব' থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করতে না পারি তাহলে এ দাবী করা যাবে না যে 'ব ∴ ভ' অবৈধ বা 'ব' 'ভ'-কে প্রতিপাদন করে না। হতে পারে যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতিতে নৈপুণ্যের অভাবেই আমরা 'ব' থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করতে পারলাম না।

২. সমার্থতা ও প্রতিপত্তি প্রমাণ

এ অধ্যায়ের আলোচ্য প্রধানত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ। তার আগে প্রসঙ্গত সমার্থতা ও প্রতিপত্তি আলোচনা করে নেব। বলা বাহুল্য, যে পদ্ধতির সাহায্যে প্রতিপত্তি ও সমার্থতা প্রমাণ করা যায়, সে পদ্ধতি দিয়েই যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়। কেননা যুক্তির হেতুবাক্য, হয় সিদ্ধান্তের সমার্থক নয়ত সিদ্ধান্তের প্রতিপাদক।

কোনো বাক্য 'ব' অন্য বাক্য 'ভ'-এর সমার্থক—একথা নানাভাবে প্রমাণ করা যায়। যথা, যদি সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করে দেখানো যায় যে 'ব ≡ ভ' স্বতসত্য তাহলে প্রমাণ হল যে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক। আমরা এখানে রূপান্তরের সাহায্যে সমার্থতা প্রমাণের কথা বলতে যাচ্ছি। পূর্বে এ জাতীয় প্রমাণের কিছুটা পরিচয় পেয়েছি। অধ্যায় ১৭-এর বিভাগ ৩ ("সরলীকরণ..." ৩৩২ পৃঃ) দ্রষ্টব্য। এ বিভাগের প্রত্যেকটি উদাহরণে প্রথম বাক্যটিকে সমার্থক বাক্যে রূপান্তর করে সর্বশেষ বাক্যটি পাওয়া গেছে। কাজেই প্রত্যেকটি উদাহরণ প্রথম ও সর্বশেষ বাক্যের সমার্থতার প্রমাণ বলে গণ্য। আলোচ্য প্রমাণপদ্ধতি অনুসারে

> যদি প্রমাণ করতে হয় যে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক তাহলে 'ব'-কে 'ভ'-তে (বা 'ভ'-কে 'ব'-তে) রূপান্তরিত করতে হয়।

নিচে সমার্থতা প্রমাণের আরও কয়টি উদাহরণ দেওয়া হল।

উদাহরণ ১ঃ প্রমাণ কর যে—"$\sim p$" সম "$\sim(p\cdot q)\cdot\sim(p\cdot\sim q)$"

প্রমাণঃ
$\sim(p\cdot q)\cdot\sim(p\cdot\sim q)$
$(\sim p\vee\sim q)\cdot(\sim p\vee q)$
$\sim p\vee(\sim q\cdot q)$
$\sim p\vee(q\cdot\sim q)$
$\sim p$

উদাহরণ ২ঃ প্রমাণ কর যে—"$\sim(p\cdot q\cdot r)\cdot\sim(p\cdot\sim r)$" সম "$\sim(p\cdot q)\cdot\sim(p\cdot\sim r)$"

প্রমাণঃ
$\sim(p\cdot q\cdot r)\cdot\sim(p\cdot\sim r)$
$(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\cdot(\sim p\vee r)$
$[\sim p\vee(\sim q\vee\sim r)]\cdot[\sim p\vee r]$
$\sim p\vee[(\sim q\vee\sim r)\cdot r]$
$\sim p\vee[r\cdot(\sim r\vee\sim q)]$
$\sim p\vee(r\cdot\sim r)\vee(r\cdot\sim q)$
$\sim p\vee(r\cdot\sim q)$ [স্বতমিথ্যা বর্জন]
$(\sim p\vee r)\cdot(\sim p\vee\sim q)$
$\sim(p\cdot\sim r)\cdot\sim(p\cdot q)$
$\sim(p\cdot q)\cdot\sim(p\cdot\sim r)$

উদাহরণ ৩ : প্রমাণ কর যে—

"$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$" সম
"$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$"

প্রমাণ :

$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
$\sim(p \supset q) \vee [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
$\sim(p \supset q) \vee \sim(q \supset r) \vee (p \supset r)$
$[\sim(p \supset q) \vee \sim(q \supset r)] \vee (p \supset r)$
$\sim[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \vee (p \supset r)$ [ডি মরগেন, ও নিষেধের নিষেধ]
$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$*

উদাহরণ ৪ : প্রমাণ কর যে

"$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$" সম "$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$"

প্রমাণ

$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$
$(\sim p \vee q) \cdot (\sim q \vee p)$
$[(\sim p \vee q) \cdot \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \cdot p]$ [সঞ্চালন]
$[\sim q \cdot (\sim p \vee q)] \vee [p \cdot (\sim p \vee q)]$ [ক্রমান্তরকরণ]
$[(\sim q \cdot \sim p) \vee (\sim q \cdot q)] \vee [(p \cdot \sim p) \vee (p \cdot q)]$ [সঞ্চালন]
$(\sim p \cdot \sim q) \vee (q \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim p) \vee (p \cdot q)$ [ক্রমান্তরকরণ]
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q) \vee (p \cdot \sim p) \vee (q \cdot \sim q)$ [ঐ]
$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$ [স্বতমিথ্যা বর্জন]

সমার্থতা প্রমাণ করতে আমরা স্বীকৃত সমার্থতা সূত্রের সাহায্য নিয়েছি। কিন্তু 'ব' যদি 'ভ'-এর প্রতিপাদক হয় তাহলে 'ব' ও 'ভ' সমার্থক নাও হতে পারে। কাজেই প্রতিপত্তি প্রমাণ করতে হলে কেবল সমার্থতার সূত্রের উপর নির্ভর করলে চলে না, পূর্বস্বীকৃত প্রতিপত্তি সূত্রের, প্রতিপাদ্য নিষ্কাশন করার সূত্রের, সাহায্য নেবার দরকার। বিশেষভাবে দরকার নিম্নোক্ত সূত্র দুটি

(১) সংযোগী সমুচ্ছেদ : "ব · ভ" impl "ব"

(২) বিকল্প যোজনা : "ব" impl "ব v ভ"

(১)-এর বক্তব্য : পূর্ববর্তী পঙক্তিতে 'ব · ভ' থাকলে পরবর্তী পঙক্তিতে 'ব' লিখতে পার।

আর (২)-এর বক্তব্য : পূর্ববর্তী পঙক্তিতে 'ব' থাকলে পরবর্তী পঙক্তিতে 'ব v ভ' লিখতে পার।

এতক্ষণ আমরা যে প্রমাণবিন্যাস রীতি অনুসরণ করেছি সে রীতি অনুসারে বিভিন্ন ছত্রে পরপর লিখিত বাক্যগুলি সমার্থক বলে গণ্য। এখন (১) ও (২) প্রয়োগ

* পূর্বকল্পগৌরব (Importation) প্রয়োগ করলে দ্বিতীয় পর্বেই প্রমাণ নিষ্পন্ন হত।

করে প্রতিপাদ্য নিষ্কাশন করতে যাচ্ছি। বলা বাহুল্য, এ সূত্র প্রয়োগ করে 'P' থেকে 'Q' নিষ্কাশন করলে 'P' আর 'Q' সমার্থক হতে পারে না। তার মানে নিম্নোক্ত প্রমাণগুলির অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলি সব সমার্থক নয়।

> মনে রাখবে, আলোচ্য পদ্ধতি (প্রতিপাদ্য নিষ্কাশন পদ্ধতি) অনুসারে যদি প্রমাণ করতে হয় যে 'P' 'Q'-এর প্রতিপাদক তাহলে 'P' থেকে 'Q' বৈধভাবে নিষ্কাশন করতে হবে।

উদাহরণ ৫ঃ প্রমাণ কর যে "$(p \supset q) \cdot p$" প্রতিপাদন করে 'q'-কে।

প্রমাণঃ $(p \supset q) \cdot p$

$(\sim p \vee q) \cdot p$

$p \cdot (\sim p \vee q)$

$(p \cdot \sim p) \vee (p \cdot q)$

$p \cdot q$

$q \cdot p$ (প্রথম ছয়টি পঙ্‌ক্তি সমার্থক)

q [সংযোগী সমুচ্ছেদ]

উদাহরণ ৬ঃ প্রমাণ কর "$(p \vee r) \supset q$" হল '$p \supset q$'-এর প্রতিপাদক।

প্রমাণঃ $(p \vee r) \supset q$

$\sim(p \vee r) \vee q$

$(\sim p \cdot \sim r) \vee q$

$q \vee (\sim p \cdot \sim r)$

$(q \vee \sim p) \cdot (q \vee \sim r)$ (প্রথম পাঁচটি পঙ্‌ক্তি সমার্থক)

$q \vee \sim p$ [সংযোগী সমুচ্ছেদ]

$\sim p \vee q$

$p \supset q$

উদাহরণ ৭ঃ প্রমাণ কর "$(p \vee q) \cdot \sim p$" প্রতিপাদন করে "$s \vee r \vee q$"-কে।

প্রমাণঃ $(p \vee q) \cdot \sim p$

$\sim p \cdot (p \vee q)$

$(\sim p \cdot p) \vee (\sim p \cdot q)$

$\sim p \cdot q$

$q \cdot \sim p$ (প্রথম পাঁচটি পঙ্‌ক্তি সমার্থক)

q [সংযোগী সমুচ্ছেদ]

$q \vee r$ [বিকল্পযোজনা]

$(q \vee r) \vee s$ [ঐ]

$s \vee (q \vee r)$

$s \vee (r \vee q)$

$s \vee r \vee q$

আমরা প্রতিপত্তি ও সমার্থতা প্রমাণ করতে শিখলাম। এরূপ প্রমাণ করতে পারলে যুক্তির বৈধতাও প্রমাণ করতে পারার কথা। কেননা যদি 'ব' থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করা যায় তাহলে প্রমাণিত হয়: "ব ∴ ভ" বৈধ। আর আমরা দেখেছি সমার্থতা ও প্রতিপত্তি সূত্রের সাহায্যে এরূপ নিষ্কাশন সম্ভব। যেমন, ধরা যাক,

প্রমাণ করতে হবে: $\sim(p \cdot q) \cdot \sim(p \cdot \sim q) \quad \therefore \quad \sim p$ —এ যুক্তিটি বৈধ
(উদাহরণ ১ দ্রষ্টব্য)

বলা বাহুল্য, উদাহরণ ১-এর বাক্য-অনুক্রমটিই এ যুক্তির বৈধতার প্রমাণ।

৩. যুক্তির বৈধতা প্রমাণ

আমরা কয়েকটি সমার্থতা সূত্র* আর দুটি প্রতিপত্তি সূত্র উল্লেখ করেছি। কেবল এ সূত্রগুলি দিয়ে যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা সহজ নয়। আর কয়টি প্রতিপত্তি সূত্র মেনে নিলে বৈধতা প্রমাণের কাজ দ্রুততর হয়। নিচে আরও কয়টি সূত্র উল্লেখ করা হল, করা হল, "—" impl "—" আকারে নয়, "— ∴ —" আকারে, মানে যুক্তিবিধির আকারে বা যুক্তি-আকার হিসাবে। আগেকার সূত্র দুটিও যুক্তিবিধি হিসাবে পুনরুক্ত হল।

Simplification	Addition
সংযোগী সমুচ্ছেদ	বিকল্পযোজনা
$p \cdot q$	p
$\therefore\ p$	$\therefore\ p \vee q$

Modus Ponendo Ponens	Hypothetical Syllogism
পূর্বকল্প অন্বয়ী	প্রাকল্পিক যুক্তি
$p \supset q$	$p \supset q$
p	$q \supset r$
$\therefore\ q$	$\therefore\ p \supset r$

তাছাড়া, বৈধতা প্রমাণ সংক্ষেপকরণের বিভিন্ন উপায় আছে—এ সবও আলোচনা দরকার। তারপর, যে যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ করতে বলা হয় সেগুলি অনেক ক্ষেত্রে যুক্তিশৃঙ্খল, এবং এ যুক্তিশৃঙ্খল আবার অতি সংক্ষিপ্ত আকারে ব্যক্ত হয়। ফলে এরূপ যুক্তির বৈধতা প্রমাণ দুঃসাধ্য হয়ে ওঠে। কাজেই বৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি আরো ভাল করে বোঝার দরকার। বুঝতে হলে, এ পদ্ধতিতে নৈপুণ্য অর্জন করতে হলে, এ প্রমাণ পদ্ধতি আরো বিশদভাবে আলোচিত হওয়া প্রয়োজন। কাজেই নিচেকার আলোচনা। প্রথমে যুক্তিশৃঙ্খল সম্বন্ধে।

৪. যুক্তিশৃঙ্খল

যদি একাধিক যুক্তি এমনভাবে সংযুক্ত (শৃঙ্খলিত) হয় যে একটি (পূর্ববর্তী) যুক্তির সিদ্ধান্ত অন্য (পরবর্তী) যুক্তির হেতুবাক্য রূপে ব্যবহৃত হয় এবং যুক্তিগুলি যুক্তভাবে

---

* ৩৩২ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

একটি চরম সিদ্ধান্তে এসে পৌঁছায় তাহলে ঐ যুক্তিসমষ্টিকে যুক্তিশৃঙ্খল বলে। উদাহরণ

১	২
বৃষ্টি হয় ⊃ মাটি ভেজে	কল্যাণ উপস্থিত থাকে ⊃ খগেন উপস্থিত আছে
মাটি ভেজে ⊃ ভূমি উর্বর হয়	কল্যাণ উপস্থিত
∴ বৃষ্টি হয় ⊃ ভূমি উর্বর হয়*	∴ খগেন উপস্থিত*
এবং	এবং
বৃষ্টি হয় ⊃ ভূমি উর্বর হয়*	খগেন উপস্থিত থাকে ⊃ গগন উপস্থিত আছে
ভূমি উর্বর হয় ⊃ শষ্য ভাল হয়	খগেন উপস্থিত*
∴ বৃষ্টি হয় ⊃ শষ্য ভাল হয়*	∴ গগন উপস্থিত*
এবং	এবং
বৃষ্টি হয় ⊃ শষ্য ভাল হয়*	গগন উপস্থিত থাকে ⊃ ঘনশ্যাম উপস্থিত আছে
শষ্য ভাল হয় ⊃ খাদ্য সমস্যার সমাধান হয়	গগন উপস্থিত*
∴ বৃষ্টি হয় ⊃ খাদ্য সমস্যার সমাধান হয়।	∴ ঘনশ্যাম উপস্থিত।

উক্ত যুক্তিশৃঙ্খল দুটির প্রত্যেকটিতে তিনটি করে অঙ্গযুক্তি আছে। লক্ষণীয়, উভয় দৃষ্টান্তে তিনটি অঙ্গযুক্তি সমবেতভাবে একটি যুক্তি বা যুক্তিশৃঙ্খল গঠন করেছে। আরও লক্ষণীয় উক্ত শৃঙ্খলগুলির প্রত্যেকটি অঙ্গযুক্তি বৈধ, কেননা প্রথম ও দ্বিতীয় শৃঙ্খলের যুক্তিগুলি যথাক্রমে

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \therefore\ p \supset r \end{array} \quad \text{আর} \quad \begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \therefore\ q \end{array}$$

—এ বৈধ যুক্তি-আকারের দৃষ্টান্ত।

অনেক সময় যুক্তিশৃঙ্খল সংক্ষিপ্ত আকারে ব্যক্ত হয়। উক্তরূপ (বিশদ) যুক্তিশৃঙ্খলে প্রত্যেকটি মধ্যবর্তী সিদ্ধান্ত আবার হেতুবাক্য হিসাবেও ব্যবহৃত হয়। এখন, মধ্যবর্তী সিদ্ধান্তগুলি এবং মধ্যবর্তী হেতুবাক্য* অনেক সময় উহ্য রাখা যায়। এবং কেবল মূল হেতুবাক্য** ও চরম সিদ্ধান্ত বজায় রেখে যুক্তিশৃঙ্খল সংক্ষিপ্ত আকারে ব্যক্ত করা যায়। এভাবে সংক্ষেপিত হলে উক্ত শৃঙ্খল দুটি নিম্নোক্তরূপ পরিগ্রহ করবে। লক্ষণীয়, উক্ত রীতি অনুসারে সংক্ষেপকরণের জন্য তারকাচিহ্নিত বাক্যগুলি অনুক্ত রাখা হল।

* যে হেতুবাক্য অন্য যুক্তির সিদ্ধান্ত

** যে সব কোনো অঙ্গযুক্তির সিদ্ধান্ত নয়

1

বৃষ্টি হয় ⊃ মাটি ভেজে
মাটি ভেজে ⊃ ভূমি উর্বর হয়
ভূমি উর্বর হয় ⊃ শষ্য ভাল হয়
শষ্য ভাল হয় ⊃ খাদ্য সমস্যার সমাধান হয়
∴ বৃষ্টি হয় ⊃ খাদ্য সমস্যার সমাধান হয়।

2

কল্যাণ উপস্থিত
কল্যাণ উপস্থিত থাকে ⊃ খগেন উপস্থিত আছে
খগেন উপস্থিত থাকে ⊃ গগন উপস্থিত আছে
গগন উপস্থিত থাকে ⊃ ঘনশ্যাম উপস্থিত আছে
∴ ঘনশ্যাম উপস্থিত।

উক্ত যুক্তিশৃঙ্খল-সংক্ষেপের অঙ্গবাক্যগুলির পরিবর্তে সংক্ষেপক প্রতীক বসালে শৃঙ্খলসংক্ষেপ দুটি নিম্নোক্তরূপ পরিগ্রহ করবে ঃ

বৃ ⊃ মা	ক
মা ⊃ ভূ	ক ⊃ খ
ভূ ⊃ শ	খ ⊃ গ
শ ⊃ স	গ ⊃ ঘ
∴ বৃ ⊃ স	∴ ঘ

এখানে 'বৃ', 'শ', 'ক', 'খ' এসব যুক্তি অবয়বের সংক্ষিপ্তরূপ, বচনগ্রাহক প্রতীক নয়। উক্ত শৃঙ্খল-সংক্ষেপগুলির প্রত্যেকটিতে সিদ্ধান্ত করা হয়েছে একই যুক্তিবিধি অনুসারে—প্রথমটিতে প্রাকল্পিক যুক্তি অনুসারে, আর দ্বিতীয়টি পূর্বকল্প অন্বয়ী অনুসারে। কিন্তু একই যুক্তি-শৃঙ্খল বা শৃঙ্খল-সংক্ষেপে একাধিক যুক্তিবিধি প্রযুক্ত হতে পারে। যথা

৩ যুক্তিশৃঙ্খল	3 শৃঙ্খলসংক্ষেপ
$A \supset B$	$A \supset B$
$B \supset C$	$B \supset C$
∴ $A \supset C$*	A
$A \supset C$*	∴ $C \vee D$
A	
∴ C *	
C *	
∴ $C \vee D$	

শৃঙ্খল সংক্ষেপটি পেলাম পূর্ণাঙ্গ যুক্তিশৃঙ্খলটির তারকা চিহ্নিত অবয়ব—মধ্যবর্তী সিদ্ধান্ত ও মধ্যবর্তী হেতুবাক্য—বাদ দিয়ে।

এ শৃঙ্খলটির প্রথম অঙ্গযুক্তি প্রাকল্পিক যুক্তির, দ্বিতীয় অঙ্গযুক্তি পূর্বকল্প অন্বয়ীর, ও তৃতীয় অঙ্গযুক্তি বিকল্প যোজনার, দৃষ্টান্ত।

† দ্বিতীয় যুক্তিশৃঙ্খলটির প্রথম অঙ্গযুক্তির দ্বিতীয় হেতুবাক্যটি প্রথমে লেখা হল—লেখা হল শৃঙ্খলসংক্ষেপটির অঙ্গসৌষ্ঠবের দিকে নজর রেখে।

এবার নিম্নোক্ত শৃঙ্খল-সংক্ষেপটি লক্ষ কর। দেখা যাবে, এতে যে কেবল যুক্তিবিধি প্রয়োগ করে সিদ্ধান্ত করা হয়েছে তা নয়, রূপান্তরের সূত্রও† ব্যবহার করা হয়েছে।

4

$$\begin{array}{ll} & A \supset B \\ & B \supset C \\ & A \\ \therefore & D \supset C \end{array}$$

এ শৃঙ্খল-সংক্ষেপটির অনুক্ত অবয়বগুলি উদ্ধার করে, এবং একে বিশদভাবে ব্যক্ত করে পাই নিম্নোক্ত পূর্ণাঙ্গ শৃঙ্খলটি :

৪

$$\begin{array}{lll} & A \supset B & \\ & B \supset C & \text{প্রাকল্পিক যুক্তি} \\ \therefore & A \supset C & \\ & & \\ & A \supset C & \\ & A & \text{পূর্বকল্প অন্বয়ী} \\ \therefore & C & \\ & C & \\ \therefore & C \vee \sim D & [\text{ বিকল্পযোজনা }] \\ & \sim D \vee C & [\text{ ক্রমান্তরকরণ }] \\ & D \supset C & [\text{ '}\supset\text{'-এর সংজ্ঞা }] \end{array}$$

উক্ত উদাহরণগুলির পূর্ণাঙ্গ শৃঙ্খলে মূল হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত যে ক্রমে বিন্যস্ত সে ক্রম বজায় রেখে শৃঙ্খল সংক্ষেপিত করা হয়েছে। এ রকম ক্ষেত্রে সংক্ষেপিত যুক্তিটির বৈধতা সম্পর্কে সংশয় হওয়ার কথা নয়, এবং সংশয় হলে এ রকম ক্ষেত্রে শৃঙ্খল-সংক্ষেপ থেকে পূর্ণাঙ্গ যুক্তিশৃঙ্খল উদ্ধার করাও কঠিন নয়। যথা

$$\begin{array}{ll} & A \supset B \\ & B \supset C \\ & C \supset D \\ \therefore & A \supset D \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & A \supset B \\ & B \supset C \\ & A \\ \therefore & C \vee D \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & A \supset B \\ & B \supset C \\ & A \\ \therefore & \sim(\sim C \cdot \sim D) \end{array}$$

এ সংক্ষিপ্ত যুক্তিগুলি যে বৈধ তা একটু মনোনিবেশ করলেই বুঝতে পারবে, আর এদের অনুক্ত অবয়বও সহজেই উদ্ধার করতে পারবে।

† রূপান্তরের সূত্রও যুক্তিবিধি বলে গণ্য। যথা "$p \cdot q$" সম "$q \cdot p$", এ সূত্রটি এভাবে লিখতে পারি : $p \cdot q \therefore q \cdot p$। এখানে যুক্তিবিধি বলতে এমন বিধির কথা বলা হচ্ছে—যে বিধি অনুসারে অনুমান করলে এমন সিদ্ধান্ত পাওয়া যায় যা হেতুবাক্যের অসমার্থক।

কিন্তু অনেক সময় পূর্ণাঙ্গ যুক্তিশৃঙ্খলকে সংক্ষেপিত করে যে যুক্তি পাওয়া যায়, সে সংক্ষিপ্ত যুক্তির অবয়বের ক্রম পরিবর্তন করে, খুশিমত এই সব হেতুবাক্যগুলির পূর্বেকার অবস্থান অদল বদল করে, স্বতন্ত্র হেতুবাক্যকে সংযৌগিক আকারে ব্যক্ত করে, অবয়বগুলিকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে, যুক্তিটি উত্থাপন করা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে প্রদত্ত শৃঙ্খলসংক্ষেপের বৈধতা সহজে "দেখা" যায় না, এবং এরূপ যুক্তির লুপ্ত অবয়ব উদ্ধার করাও সহজসাধ্য বলে মনে হয় না। উদাহরণ

5

$$A \cdot (B \supset C)$$
$$A \supset B$$
$$\therefore\ C \vee D$$

প্রথম দৃষ্টিতে প্রদত্ত হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের মধ্যে কোনো সম্পর্ক দেখা যায় না, যুক্তিটি বৈধ বলে মনে হয় না, মনে হয় না এ "যুক্তি"কে কয়েকটি বৈধ যুক্তির শৃংখলের আকারে ব্যক্ত করা যাবে। কিন্তু ভাল করে লক্ষ করলে দেখবে, যুক্তিটি (3) ও (৩)-এর পরিবর্তিত "বিকৃত" রূপ। এ যুক্তিটি পেয়েছি (3)-এর অবয়বগুলির ক্রম পরিবর্তন করে, এবং পৃথক ছত্রে লিখিত দ্বিতীয় ও তৃতীয় হেতুবাক্যকে একটি সংযৌগিক বাক্যাকারে ব্যক্ত করে। উক্ত সংক্ষিপ্ত যুক্তির অনুক্ত অবয়ব উদ্ধার করে পূর্ণাঙ্গ যুক্তিশৃঙ্খলটি এভাবে পুনরুদ্ধার করা যায়।

৫

1.	$A \cdot (B \supset C)$	[প্রদত্ত প্রথম হেতুবাক্য]
2.	$\therefore\ A$	[1 থেকে সংযোগী সমুচ্ছেদ করে]
3.	$A \cdot (B \supset C)$	[প্রথম হেতুবাক্য আবার নেওয়া হল]
4.	$\therefore\ (B \supset C) \cdot A$	[3 থেকে ক্রমান্তরকরণ করে]
5.	$\therefore\ B \supset C$	[4 থেকে সংযোগী সমুচ্ছেদ করে]
6.	$A \supset B$	[প্রদত্ত দ্বিতীয় হেতুবাক্য]
7.	$B \supset C$	[পূর্বোক্ত 5]
8.	$\therefore\ A \supset C$	[6, 7 থেকে—প্রাকল্পিক যুক্তিবিধি অনুসারে]
9.	$A \supset C$	[পূর্বোক্ত 8]
10.	A	[পূর্বোক্ত 2]
11.	$\therefore\ C$	[9, 10 থেকে পূর্বকল্প অন্বয়ী যুক্তিবিধি অনুসারে]
12.	$\therefore\ C \vee D$	[11 থেকে বিকল্পযোজনা বিধি অনুসারে]

আমরা যে বৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি সে পদ্ধতি অনুসারে কোনো প্রদত্ত যুক্তিশৃঙ্খল-সংক্ষেপের অনুক্ত অবয়বগুলি উদ্ধার করে প্রত্যেকটি প্রচ্ছন্ন অঙ্গযুক্তি পুনর্গঠন করতে হয় এবং এভাবে দেখাতে হয় যে প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়। মনে করা যাক, কোনো ব্যক্তি কোনো যুক্তিশৃঙ্খলকে সংক্ষেপিত করে ও মূল যুক্তিশৃঙ্খলের হেতুবাক্যগুলিকে রূপান্তর করে এবং হেতুবাক্যগুলির

ক্রম পরিবর্তন করে আমাদের সামনে তুলে ধরল। আমাদের কাজ অনেকটা লুকোচুরি খেলার মত। ঐ ব্যক্তি মূল যুক্তিশৃংখলের কোনো কোনো অবয়ব—মধ্যবর্তী হেতুবাক্য ও মধ্যবর্তী সিদ্ধান্ত—লুকিয়ে রেখে এবং অবয়বগুলির ক্রম পরিবর্তন করে এবং এদের রূপান্তরিত করে উপস্থিত করে, আর আমরা লুপ্ত অবয়বগুলি খুঁজে বের করে দেখাই যে প্রত্যেকটি অঙ্গযুক্তি বৈধ।

এভাবে সব লুপ্ত অবয়ব বা অঙ্গযুক্তি পুনরুদ্ধার করতে পারলে (এবং প্রত্যেকটি অঙ্গযুক্তি যে বৈধ তা দেখাতে পারলে) প্রমাণিত হয় যে মূল সংক্ষিপ্ত যুক্তিটি বৈধ। এ প্রমাণ পদ্ধতির নাম অবরোহণ পদ্ধতি, আকারসর্বস্ব বৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি।

৫. বৈধতা-প্রমাণের বিন্যাস ও সংক্ষেপকরণ

আলোচ্য পদ্ধতি প্রয়োগ করে উপরে কয়েকটি যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা হয়েছে ; যথা (4)-এর প্রমাণ (৪), (5)-এর প্রমাণ (৫) সংখ্যক যুক্তিশৃংখল। উক্তরূপ বৈধতা প্রমাণ একটি বিশেষ রীতিতে সুশৃংখলভাবে সাজানো যায়। এরূপ সুবিন্যাসকরণের জন্য—

> প্রদত্ত হেতুবাক্যগুলিকে প্রদত্ত ক্রমে লিপিবদ্ধ করা হয়। এবং তারপর যে চরম সিদ্ধান্তটি (প্রদত্ত সিদ্ধান্ত) অবরোহণ করতে হবে তাকে প্রদত্ত সর্বশেষ হেতু-বাক্যের দক্ষিণ পার্শে "$/ \therefore$ ____" চিহ্নটির শূন্যস্থানে স্থাপন করা হয়। প্রমাণের অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি অবয়বকে* 1, 2, প্রভৃতি ক্রমিক সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করতে হয়।

উদাহরণ ঃ 5 সংখ্যক যুক্তির প্রমাণের প্রথম কয়টি ছত্র নিম্নোক্ত আকার ধারণ করবে।

1. $A \cdot (B \supset C)$
2. $A \supset B \quad / \therefore C \vee D$

লক্ষণীয়, ক্রমিক সংখ্যাবিহীন "$C \vee D$" এখনও সিদ্ধান্তের মর্যাদা পায় নি, এটি প্রস্তাবিত অবরোহের সিদ্ধ-অন্ত (বাক্য) নয়—প্রতিজ্ঞা বাক্য বা প্রতিপাদ্য। 5 সংখ্যক যুক্তির বৈধতা প্রমাণের সর্বশেষ ছত্রে এ বাক্যটি পাব, তখন বাক্যটি সিদ্ধান্তের মর্যাদা লাভ করবে এবং সর্বশেষ বাক্য হিসাবে ক্রমিক সংখ্যার দ্বারা চিহ্নিত হবে।

এখন আলোচ্য পদ্ধতিতে যে বৈধতা প্রমাণ পাই তা একটু সংক্ষেপে ব্যক্ত করা সুবিধাজনক। সংক্ষেপকরণের জন্য নিম্নোক্ত রীতি অনুসৃত হয়।

যেহেতু একই বাক্য কোনো অঙ্গযুক্তির সিদ্ধান্ত আবার অন্য অঙ্গযুক্তির হেতুবাক্য এবং যেহেতু প্রত্যেক অবরোহিত অবয়বের ডান পাশে "ভাষ্য" থাকে, সেহেতু সিদ্ধান্তজ্ঞাপক "$\therefore$" বর্জন করা হয়।

* "$/ \therefore$ ____"-এর অন্তর্গত বাক্যটির পাশে কোনো ক্রমিক সংখ্যা থাকবে না (বস্তুত এ বাক্যটি প্রমাণের অন্তর্ভুক্ত অবয়ব নয়)।

কোনো অবয়ব একাধিকবার উল্লেখ করা হয় না। প্রথম অঙ্গযুক্তি ছাড়া অন্য সব অঙ্গযুক্তির কেবল সিদ্ধান্তই লেখা হয়। কোনো সিদ্ধান্ত যদি অন্য অঙ্গযুক্তির হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহৃত হয় তাহলে পৃথকভাবে লিখিত হয় না।

মূল হেতুবাক্য ছাড়া অন্যান্য অবয়বের ডান পাশে "ভাষ্য" থাকে এ মর্মে: অমুক অমুক সংখ্যক অবয়ব থেকে অমুক বিধি অনুসারে বাম ধারের বাক্যটি নিষ্কাশিত হল।

তারপর, এরূপ বিশদভাবে ভাষ্য না লিখে তাও সংক্ষেপ করা হয়—কেবল ক্রমিক সংখ্যা ও প্রযুক্ত বিধির নাম উল্লেখ করে। যথা, "1 থেকে সংযোগী সমুচ্ছেদ অনুসারে"-এর পরিবর্তে লেখা হয় "1, সংযোগী সমুচ্ছেদ"।

আবার, ইংরেজিতে ভাষ্য লিখলে যুক্তিবিধির নামও সংক্ষেপে ব্যক্ত করা যায়। যথা,

Addition=Add*	Simplification=Simp
Commutation=Com	Hypothetical Syllogism=HS

Modus Ponendo Ponens=MP

বাংলায় যে আদ্যক্ষর দিয়ে নাম সংক্ষেপ করা যায় না তা নয়, যথা "ক্রমান্তরকরণ"-এর পরিবর্তে লিখতে পারি "ক্রমাঃ", বিকল্প "যোজনা"র পরিবর্তে "বিঃযোঃ"। তবে বাংলায় ভাষ্য লিখলে আমরা যুক্তিবিধির পুরো নাম লিখব, আর ইংরেজিতে ভাষ্য লিখলে নাম সংক্ষেপ করব। আমরা সাধারণত ইংরেজিতেই ভাষ্য লিখব। উক্ত সংক্ষেপকরণ রীতিতে 5 সংখ্যক যুক্তিশৃঙ্খলটি কিভাবে সংক্ষেপিত ও সুবিন্যস্ত হয়, লক্ষ কর।

5

1.	$A \cdot (B \supset C)$	
2.	$A \supset B$	$/ \therefore C \vee D$
3.	A	1, সংযোগী সমুচ্ছেদ
4.	$(B \supset C) \cdot A$	1, ক্রমান্তরকরণ
5.	$B \supset C$	4, সংযোগী সমুচ্ছেদ
6.	$A \supset C$	2, 5, প্রাকল্পিক যুক্তি
7.	C	6, 3, পূর্বকল্প অন্বয়ী
8.	$C \vee D$	7, বিকল্প যোজনা

5

1.	$A \cdot (B \supset C)$	
2.	$A \supset B$	$/ \therefore C \vee D$
3.	A	1, Simp
4.	$(B \supset C) \cdot A$	1, Com
5.	$B \supset C$	4, Simp
6.	$A \supset C$	2, 5, HS
7.	C	6, 3, MP
8.	$C \vee D$	7, Add

এ প্রসঙ্গে আর একটা কথা। এতক্ষণ যে যুক্তির উদাহরণ দিয়েছি সেগুলির অবয়ব সংক্ষেপক প্রতীক দিয়ে গঠিত। বলা বাহুল্য, সাধারণ ভাষায় ব্যক্ত কোনো যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করতে হলে প্রথমে যুক্তি অবয়বগুলির সংকেতীকরণ করে নিতে হবে। এরূপ সংকেতীকরণ করতে গিয়ে নিম্নোক্ত রীতিটি মেনে চলা ভাল।

যে আণবিক বাক্যের সংকেতীকরণ করছ তার কোনো নির্বাচিত শব্দের (বিভিন্ন বাক্যের জন্য বিভিন্ন শব্দের) আদ্যক্ষর বেছে নেবে।

* "=" এর বদলে পড়তে হবে: "—"-এর পরিবর্তে সংক্ষেপে লেখা যায়: "—"

উদাহরণ হিসাবে নিম্নোক্ত যুক্তিটি লক্ষ কর :

অরুণ অসুস্থ এবং যদি বরুণা আসে তাহলে চন্দনও আসবে।
যদি অরুণ অসুস্থ হয় তাহলে বরুণা আসবে।
∴ চন্দন আসবে অথবা দীপক আসবে।

এ যুক্তির অবয়বগুলির সংকেতীকরণ করলে পাব 5 সংখ্যক যুক্তি (৩৮৭ পৃঃ) :

$$A \cdot (B \supset C),\ A \supset B,\ \therefore\ C \vee D$$

৬. আকারসর্বস্ব বৈধতা প্রমাণ, অবরোহী প্রমাণ বা অবরোহ

পূর্ববর্তী বিভাগের বৈধতা প্রমাণটি লক্ষ কর। উক্তরূপে বৈধতা প্রমাণ করে যে বাক্যসমষ্টি পাই তাকে বলে অবরোহী প্রমাণ বা অবরোহ। এভাবে "অবরোহ"-এর সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

> যে বাক্যপারম্পর্য বা বাক্যধারার সর্বশেষ বাক্যটি প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্ত এবং অন্যান্য বাক্য হয় প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্য নয়ত এ-হেতুবাক্য-থেকে-যুক্তিবিধি অনুসারে-নিঃসৃত সিদ্ধান্ত নয়ত কোনো হেতুবাক্যের বা মধ্যবর্তী সিদ্ধান্তের সমার্থক বাক্য** সে বাক্য-অনুক্রমকে বলে প্রদত্ত যুক্তির অবরোহী প্রমাণ বা অবরোহ।

লক্ষণীয়, এ প্রয়োগ অনুসারে, প্রমাণ বলতে প্রমাণকরণ বোঝায় না, বোঝায় যে বাক্য-অনুক্রম দিয়ে প্রমাণ করা হয় যে বাক্য-অনুক্রম। প্রসঙ্গত, প্রমাণের অন্তর্গত প্রত্যেকটি বাক্যকে বলে অবরোহ-পঙ্‌ক্তি, বা সংক্ষেপে—পঙ্‌ক্তি। আরো লক্ষণীয়, উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে, ভাষ্যগুলি প্রমাণের অন্তর্গত নয়। তবু প্রত্যেক অবরোহিত বাক্যের পাশে ভাষ্য লেখা অবশ্য প্রয়োজনীয়। অবরোহী প্রমাণের আর একটি উদাহরণ।

নিম্নোক্ত যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ করতে হবে। উদাহরণ 6।

যুক্তি : অমল এলে বিমলও আসবে। বিমল এলে চামেলী ও দীপা এ দুজনই আসবে। অমল এসেছে। ∴ চামেলী অথবা ইভা আসবে ॥

সংকেতীকৃত রূপ :

$$A \supset B,\ B \supset (C \cdot D),\ A\ \therefore\ C \vee E$$

অবরোহ :

6

1.	$A \supset B$	
2.	$B \supset (C \cdot D)$	
3.	A	$/ \therefore\ C \vee E$
4.	B	1, 3, MP
5.	$C \cdot D$	2, 4, MP
6.	C	5, Simp
7.	$C \vee E$	6, Add

* এখানে সংকেতীকরণ করা মানে অবয়বগুলির অঙ্গবাক্যের বদলে সংক্ষেপক প্রতীক বসানো।

** (পরে দেখব,) নয়ত মূল সিদ্ধান্তের নিষেধ, নয়ত সিদ্ধান্তের কোনো পূর্বকল্প

এ বাক্য অনুক্রমে 3-এর পরবর্তী প্রত্যেকটি পঙ্‌ক্তি বৈধভাবে নিঃসৃত হয়েছে। সুতরাং বাক্য-অনুক্রমটি বৈধ। সুতরাং প্রমাণিত হয়েছে যে প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ ॥ এ দাবীর বিরুদ্ধে আপত্তি তুলে তুমি হয়ত বলবে : এখানে দেখানো হল যে 1, 2, 3, 4, 5, 6 থেকে 7 নিঃসৃত হয়েছে, সুতরাং প্রমাণিত হল যে 1—6 ∴ 7 বৈধ। কিন্তু 1, 2, 3 থেকে ত 7 নিষ্কাশিত হয় নি, কাজেই এ দাবী করি কি করে যে 1, 2, 3 ∴ 7 বৈধ ? আমাদের দাবী যে সঙ্গত তা সহজবোধ্য। তবে এ দাবীর যাথার্থ্য অন্য যুক্তি দিয়ে সমর্থন করা যায়। নিচে দেখানো হল যে : প্রদত্ত হেতুবাক্য (1, 2, 3) সত্য হলে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত 7-ও সত্য, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

যদি প্রদত্ত হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে 1, 2, 3 সত্য
যদি 1, 2, 3 সত্য হয় তাহলে 1, 3 সত্য
যদি 1, 3 সত্য হয় তাহলে 4 সত্য
∴ যদি প্রদত্ত হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে 4 সত্য।

এখন, এ যুক্তির প্রথম ও সর্বশেষ বাক্যকে ("এবং" দিয়ে) সংযুক্ত করে এবং সংক্ষেপিত করে পাই* : যদি প্রদত্ত হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে 1, 2, 3, 4 সত্য। তাহলে যাথার্থ্য-সমর্থক যুক্তিটির বাকি অংশ এভাবে লিপিবদ্ধ করতে পারি

যদি প্রদত্ত হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে 1, 2, 3, 4 সত্য
যদি 1, 2, 3, 4 সত্য হয় তাহলে 2, 4 সত্য
যদি 2, 4 সত্য হয় তাহলে 5 সত্য
যদি 5 সত্য হয় তাহলে 6 সত্য
যদি 6 সত্য হয় তাহলে 7 সত্য
∴ যদি প্রদত্ত হেতুবাক্য সত্য হয় তাহলে 7 সত্য (সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ)।

প্রত্যেক নির্ভুল অবরোহী প্রমাণের ক্ষেত্রে অনুরূপভাবে দেখানো যায় অবরোহের সর্বশেষ পঙক্তিটি মূল হেতুবাক্য থেকেই নিঃসৃত হয়।

আমরা বিশেষ একভাবে অবরোহ বিন্যাস করব বলে স্থির করেছি এবং এ বিন্যাস-করণ পদ্ধতি অনুসরণ করে আসছি। কিন্তু অবরোহী প্রমাণ নানাভাবে বিন্যস্ত হতে পারে। বস্তুত বিভিন্ন যুক্তিবিজ্ঞানী বিভিন্ন বিন্যাসকরণ পদ্ধতি অনুমোদন করেন। নিচে একটি বিকল্প বিন্যাসকরণ আলোচিত হল। এরূপ বিন্যাসের গুরুত্ব হল এই যে : এতে স্পষ্টভাবে দেখানো হয় যে মূলত প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকেই অবরোহের সর্বশেষ পঙক্তিটি নিষ্কাশিত হয়েছে।

* লক্ষণীয়, "(ব ⊃ Q) · (ব ⊃ R)" সম "ব ⊃ (Q · R)"। কেননা

(ব ⊃ Q) · (ব ⊃ R)
(~ব ∨ Q) · (~ব ∨ R)
~ব ∨ (Q · R)
ব ⊃ (Q · R)

৭. অবরোহবিন্যাস : বিকল্প পদ্ধতি

এ পদ্ধতি অনুসারে অবরোহ বিন্যাস করতে হলে সব হেতুবাক্য প্রথমে এবং প্রদত্ত ক্রমে লিপিবদ্ধ করার দরকার নেই। যে কোনো হেতুবাক্য, সুবিধামত, অবরোহী প্রমাণের যে কোনো পর্যায়ে উল্লেখ করা যায়। তারপর প্রতিজ্ঞাবাক্য, মানে "/ ∴ " এ অংশ অনুক্ত থাকে। যেহেতু প্রদত্ত হেতুবাক্য যে কোনো ছত্রে থাকতে পারে সেজন্য কোনো পঙ্‌ক্তি যে মূল হেতুবাক্য, (অবরোহিত বাক্য নয়,) তা বোঝাবার জন্য হেতুবাক্যের দক্ষিণে ভাষ্যে "P" ("Premiss"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ) লেখা হয়।

আমাদের গৃহীত ও 'অনুসৃত বিন্যাসকরণ আর যে বিকল্প পদ্ধতির কথা বলতে যাচ্ছি তার তুলনা করলেই এদের পার্থক্য বোঝা যাবে। 6 সংখ্যক যুক্তিটি আবার নেওয়া যাক। এ যুক্তির অবরোহী প্রমাণ বিকল্প-বিন্যাস-পদ্ধতি অনুসারে নিম্নোক্তরূপ (দুটি রূপ দেওয়া হল) পরিগ্রহ করবে।

6.1			6.2		
(1)	$A \supset B$	P	(১)	$B \supset (C \cdot D)$	P
(2)	A	P	(২)	$A \supset B$	P
(3)	B •	1, 2 MP	(৩)	$A \supset (C \cdot D)$	২, ৩, HS
(4)	$B \supset (C \cdot D)$	P	(৪)	A	P
(5)	$C \cdot D$	4, 3, MP	(৫)	$C \cdot D$	৩, ৪, MP
(6)	C	5, Simp	(৬)	C	৫, Simp
(7)	$C \vee E$	6, Add	(৭)	$C \vee E$	৬, Add

আমরা এতক্ষণ ক্রমিক সংখ্যা হিসাবে 1, 2, ব্যবহার করেছি। লক্ষণীয় এ পদ্ধতিতে এ সংখ্যাগুলিকে দ্রুবন্ধনীর মধ্যে রাখা হয় : (1), (2)—এভাবে।* এ বিন্যাসটি অসম্পূর্ণ। আলোচ্য বিন্যাসকরণ পদ্ধতি অনুসারে উক্ত অবরোহের বামপ্রান্তে আরও একটি সংখ্যাস্তম্ভ থাকার কথা। উক্ত সংখ্যাস্তম্ভ যুক্ত করলে প্রথম অবরোহটি নিম্নোক্ত আকার ধারণ করবে।

{ 1 }	(1)	$A \supset B$	P
{ 2 }	(2)	A	P
{ 1, 2 }	(3)	B	1, 2 MP
{ 4 }	(4)	$B \supset (C \cdot D)$	P
{ 1, 2, 4 }	(5)	$C \cdot D$	4, 3 MP
{ 1, 2, 4 }	(6)	C	5, Simp
{ 1, 2, 4 }	(7)	$C \vee E$	6, Add

প্রথমে দ্বিতীয় সংখ্যাস্তম্ভটি লক্ষ কর। এতে আছে অবরোহ পঙ্‌ক্তির ক্রমিক সংখ্যা। কিন্তু, মনে রাখবে, এ সংখ্যা প্রদত্ত হেতুবাক্যের ক্রমনির্দেশক নয় (পঙ্‌ক্তির ক্রমনির্দেশক)। যে ছত্রে বা পর্বে কোনো হেতুবাক্যের অনুপ্রবেশ সে ছত্রের যে ক্রমিকসংখ্যা হওয়ার কথা হেতুবাক্যটির বামে সে সংখ্যা লিখতে হবে। যথা, তৃতীয় হেতুবাক্য হল—"$B \supset (C \cdot D)$; কিন্তু এ হেতুবাক্যের বামে (3) লিখিত হয় নি, লেখা হল (4), কেননা বাক্যটি চতুর্থ পর্বে উপস্থাপিত হয়েছে।

* 6.2-তে বাংলা সংখ্যা ব্যবহার করা হল। 6.1-এর (1), (2) প্রভৃতি যে যে বাক্য বোঝায় 6.2-এর (১), (২) ঠিক সে সে বাক্য বোঝাচ্ছে না—একথা নজরে আনার জন্য 6.2-তে বাংলা সংখ্যা। তবে সাধারণভাবে (1), (2) ইত্যাদিই ব্যবহার করা হবে।

এবার ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যাগুলি কি করে পেলাম এবং এ সংখ্যাগুলির তাৎপর্য কী তা ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। এ রকম ধনুর্বন্ধনীভুক্ত কোনো সংখ্যা বা সংখ্যাগুচ্ছ ব্যবহার করে বলা হয় ঃ ডান ধারের অবরোহ পঙ্‌ক্তিটি অমুক অমুক সংখ্যক বাক্যের উপর নির্ভরশীল, অমুক অমুক বাক্য থেকে নিষ্কাশিত। যথা

(3)-এর বামে '{ 1, 2 }' লিখে বলা হল (3) পঙক্তিটি 1, 2 সংখ্যক পঙ্‌ক্তি থেকে অবরোহিত হয়েছে*।

(1), (2), (4) ঃ এগুলি মূল হেতুবাক্য, অন্য কোনো বাক্য থেকে নিষ্কাশিত হয় নি। তবে বলতে পারি, (1) নিষ্কাশিত হয়েছে (1)-থেকে, বা (1) কেবল (1)-এর উপরই নির্ভরশীল। সেরূপ (2), (4)-ও। এজন্য (1)-এর বামে '{ 1 }' লেখা হয়েছে। সেরূপ 2 ও 3-এর বামেও যথাক্রমে ঃ { 2 }, { 3 }। কোনো পঙ্‌ক্তির বামে ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে একটি মাত্র নিঃসঙ্গ সংখ্যা দেখলে বুঝতে হবে, বাক্যটি অন্য কোনো পঙ্‌ক্তি থেকে অবরোহিত হয় নি।

(5) ঃ এ পঙক্তির ভাষ্যে বলা হয়েছে বাক্যটি নিষ্কাশিত হয়েছে 4 ও 3 থেকে, অথচ 5-এর বাম ধারে আছে ঃ { 1, 2, 4 }। এ সংখ্যাগুচ্ছটি কি করে পেলাম ? উত্তর ঃ

5 নিষ্কাশিত হয়েছে 3 আর 4 থেকে, আবার

3 নিষ্কাশিত হয়েছে 1 আর 2 থেকে, কাজেই বলতে পারি—

∴ 5 নিষ্কাশিত হয়েছে মূলত 1, 2, 4 থেকে।

যে যুক্তির বলে এ দাবী করা হল সে যুক্তিটির পুনরুক্তি করা হল ঃ

$$\{1, 2\}\rightarrow 3, \ \{3, 4\}\rightarrow 5 \quad \therefore \quad \{1, 2, 4\}\rightarrow 5$$

সুতরাং 5-এর বামে লেখা দরকার ঃ { 1, 2, 4 }

এখানে " → "-এর পরিবর্তে পড়তে হবে ঃ "—থেকে নিষ্কাশিত হয়েছে—"।

উক্ত যুক্তির যাথার্থ্য সম্পর্কে সংশয় হলে নিম্নোক্ত অবরোহটির দিকে নজর দাও।

1.	ব ⊃ p		['ব'-এর বদলে ঃ { 1, 2 }
2.	($p \cdot q$) ⊃ ভ		'p'-এর ,, ঃ 3
3.	p ⊃ (q ⊃ ভ)	[2, পূর্বকল্পলাঘব]	'q'-এর ,, ঃ 4
4.	ব ⊃ (q ⊃ ভ)	[1, 3, HS]	'ভ'-এর ,, ঃ 5
5.	(ব · q) ⊃ ভ	[4, পূর্বকল্পগৌরব]	বসাও ঃ তাহলে আলোচ্য যুক্তিটি পাবে।]

(6) ঃ 6 নিঃসৃত হয়েছে 5 থেকে, এবং 5 নিঃসৃত হয়েছে 3, 4 থেকে (ভাষ্য দেখ), আবার 3 নিঃসৃত হয়েছে 1, 2 থেকে ; সুতরাং 6 নিঃসৃত হয়েছে মূলত 1, 2, 4 থেকে।

* (3)-এর ভাষ্য দেখ। ভাষ্যতেও বলা হয়েছে বাক্যটি 1, 2 থেকে নিষ্কাশিত হয়েছে। তাহলে ভাষ্য (ভাষ্যোক্ত সংখ্যা) আর ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যার মধ্যে পার্থক্য কী ? পার্থক্য হল এই ঃ কোনো বাক্য 'ব'-এর ভাষ্যে বলা হয় 'ব' সাক্ষাৎভাবে অমুক অমুক বাক্য থেকে নিঃসৃত হয়েছে। আর মূলত কোন্ কোন্ বাক্যের উপর 'ব' নির্ভরশীল 'ব'-এর বামধারের ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যা দিয়ে কেবল তাই বলা হয়। 5, 6, 7-এর ভাষ্যোক্ত, ও ধনুর্বন্ধনীভুক্ত, সংখ্যা তুলনা কর।

† ১২৩ পৃঃ দ্রষ্টব্য।

(7) : 7-এর বেলাতেও অনুরূপ হেতুতে : { 1, 2, 4 }। এ পঙ্‌ক্তিটি এবং এর বাম ধারের সংখ্যাগুচ্ছ বিশেষভাবে লক্ষণীয়। এ পঙ্‌ক্তিতে স্পষ্টভাবে বলা হয়েছে যে মূলত 1, 2, 4 থেকে 7 নিষ্কাশিত হয়েছে। এখন 1, 2, 4 হল প্রদত্ত হেতুবাক্য। সুতরাং বলতে পারি : এ পঙ্‌ক্তির বাম ধারের নির্দেশিকায় দাবী করা হয়েছে যে প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্য থেকে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত বৈধভাবে অবরোহিত হয়।

কোন্ পঙক্তির বামে ধনুর্বন্ধনীর মধ্যে কোন্ কোন্ সংখ্যা লিখতে হবে তা স্থির করা কঠিন নয়।

প্রদত্ত কোনো হেতুবাক্যের পাশে একটি মাত্র ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যা থাকবে—হেতুবাক্যটি যে পর্বে বা ছত্রে উপস্থাপিত হয়েছে সে ছত্রের ক্রমিক সংখ্যা।

প্রথম অন্তর্বর্তী-সিদ্ধান্তের, মানে যে বাক্যটি সর্বপ্রথম অবরোহিত হয়েছে তার, ভাষ্যে যে সংখ্যা থাকবে, ধনুর্বন্ধনীর মধ্যেও সে সংখ্যা থাকবে ((3) পঙক্তি দ্রষ্টব্য)।

অন্য কোনো নিষ্কাশিত বাক্যের, 'ম'-এর বেলায় : বাক্যটির ভাষ্য দেখ, ভাষ্যে যে সংখ্যা আছে সে-সংখ্যা-চিহ্নিত-বাক্যের, ধর—'ব' ও 'ভ'-এর, বামে যে প্রতিপাদক-নির্দেশক সংখ্যা (ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যা) আছে সেগুলি সংগ্রহ করলেই 'ম'-এর প্রতিপাদক-নির্দেশক সংখ্যা পাবে। উদাহরণ

{ 1, 2 }	(3) ———	
{ 4 }	(4) ———	
	(5) ———	4, 3

এখানে 5-এর ভাষ্যে আছে 4 ও 3। 4 ও 3-এর ধনুর্বন্ধনীভুক্ত সংখ্যাগুলি একত্রিত করে পাই : 1, 2, 4। সুতরাং 5-এর বামধারে লিখতে হবে : { 1, 2, 4 }

দেখা গেল, আলোচ্য-পদ্ধতি-অনুসারে-বিন্যস্ত অবরোহী প্রমাণে চারটি স্তম্ভ : সর্ববামে মূল-প্রতিপাদক-নির্দেশক-সংখ্যাস্তম্ভ, এর দক্ষিণে অবরোহ-পঙক্তিগুলির ক্রমজ্ঞাপক ক্রমিক সংখ্যাস্তম্ভ, তার দক্ষিণে অবরোহ পঙ্‌ক্তিস্তম্ভ এবং সর্বদক্ষিণে ভাষ্যস্তম্ভ। অবরোহের আর একটি উদাহরণ। নিম্নোক্ত যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ করতে হবে :

$$A \supset (B \supset C),\ C \supset E,\ D \supset A,\ B,\ D \therefore E$$

প্রমাণ :

প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যা	ক্রমিক সংখ্যা	পঙ্‌ক্তিস্তম্ভ	ভাষ্য	
{ 1 }	(1)	$A \supset (B \supset C)$	P	[১ম হেতুবাক্য]
{ 2 }	(2)	$D \supset A$	P	[৩য় হেতুবাক্য]*
{ 1, 2 }	(3)	$D \supset (B \supset C)$	2, 1, HS	
{ 4 }	(4)	D	P	[৫ম হেতুবাক্য]
{ 1, 2, 4 }	(5)	$B \supset C$	3, 4, MP	
{ 6 }	(6)	$C \supset E$	P	[২য় হেতুবাক্য]
{ 1, 2, 4, 6 }	(7)	$B \supset E$	5, 6, HS	
{ 8 }	(8)	B	P	[৪র্থ হেতুবাক্য]
{ 1, 2, 4, 6, 8 }	(9)	E	7, 8, MP	

* প্রদত্ত যুক্তির প্রদত্ত হেতুবাক্য-ক্রম অনুসারে। এটি অবরোহের দ্বিতীয় পঙক্তি।

৮. প্রাথমিক যুক্তিবিধি

অবরোহী প্রমাণ ব্যাখ্যা করার জন্য আমরা কেবল চারটি যুক্তিবিধি উল্লেখ করেছি। কিন্তু কেবল এ কয়টি বিধি মেনে নিলেই চলে না, আরও কয়টি যুক্তিবিধি মেনে নেওয়া প্রয়োজন। অন্য যুক্তিবিধি উল্লেখ করার আগে যুক্তিবিধি সম্বন্ধে দু একটা কথা বলে নেবার দরকার মনে করছি। যে যুক্তিবিধি মেনে নিয়েছি তার একটি হল

$p \supset q$
p
$\therefore\ q$

এ যুক্তিবিধি অনুসারে

$A \supset B$	$C \supset D$	$E \supset F$
A	C	E
$\therefore\ B$	$\therefore\ D$	$\therefore\ F$

এ সব যুক্তি বৈধ। এগুলি উক্ত যুক্তি-আকারের দৃষ্টান্ত। এবার নিম্নোক্ত অবরোহ দুটির দিকে নজর দাও।

1.	A		$\{1\}$	(1)	$A \supset B$	
2.	$E \supset F$		$\{2\}$	(2)	$X \supset Y$	
3.	………		$\{3\}$	(3)	$C \supset D$	
n.	$A \supset B$		$\{n\}$	(n)	A	
$n+1$.	B	n, 1, MP	$\{1, 2, 3 \cdots n\}$	$(n+1)$	B	1, n, MP

এ অবরোহগুলিতে উক্ত যুক্তবিধি প্রয়োগ করা হয়েছে। অথচ MP যুক্তিবিধিটি যেভাবে ব্যক্ত হয়েছে তার থেকে এ ধারণা হতে পারে যে : প্রথমে '$p \supset q$', এবং তার অব্যবহিত পরে এর পূর্বকল্পটি থাকলেই অব্যবহিত পরবর্তী ছত্রে অনুকল্পটি লেখা যায়, এর বামে "$\therefore$" ব্যবহার করে (কিন্তু প্রমাণ দুটিতে "$\therefore$" কোথায় ?) ; কাজেই আলোচ্য অবরোহ যুক্তিবিধিটি যথাযথভাবে প্রযুক্ত হয় নি। কিন্তু এ ধারণা ভুল। এ ভ্রান্ত ধারণা দূর করতে পারি যুক্তিবিধিটি এভাবে ব্যক্ত করে—

MP

> যদি '$p \supset q$' আর 'p' কোনো অবরোহ-পঙ্‌ক্তি* হয় তাহলে একটি নতুন পঙ্‌ক্তি হিসাবে 'p' লেখা যাবে।

এ কথার মানে

> যদি কোনো বাক্য-অনুক্রমে পূর্ববর্তী যে কোনো দুটি ছত্রে '$p \supset q$' আর 'p' থাকে তাহলে পরবর্তী যে কোনো ছত্রে পৃথকভাবে 'q' লেখা যাবে।

আমরা সব প্রাথমিক যুক্তিবিধি অনুরূপভাবে ব্যক্ত করব—তবে একটু সংক্ষিপ্ত আকারে। যুক্তিবিধি নিম্নোক্ত তিনটি আকারে ব্যক্ত হবে :

I	II	III
$\dfrac{\text{ব}}{\text{ক}}$	ব$_১$ ব$_২$	$\dfrac{\text{ব}}{\text{ক}}$ (double line)

---

* অবরোহ-পঙ্‌ক্তি মানে অবরোহিত পঙ্‌ক্তি নয়, অবরোহী প্রমাণের পঙ্‌ক্তি।

এখানে I ও II-এর " —— "-এর জায়গায় পড়তে হবে : " ∴ যদি পূর্ববর্তী অবরোহ পঙ্‌ক্তি হয় তাহলে কোনো অনুবর্তী পঙ্‌ক্তি হিসাবে লেখা যাবে—"

III আকারের যুক্তিবিধিতে " ═══ " ব্যবহার করে একথাই বলা হবে যে

> 'ব', 'ভ'—এদের কোনোটি যদি পূর্ববর্তী পঙ্‌ক্তি হয় তাহলে অনুবর্তী পঙ্‌ক্তি হিসাবে অন্যটি লেখা যাবে,
>
> এবং
>
> যদি 'ব' কোনো পঙ্‌ক্তির অংশ হয় বা 'ভ' কোনো পঙ্‌ক্তির অংশ হয় তাহলে পঙ্‌ক্তিটির অপর অংশ বজায় রেখে 'ব'-এর জায়গায় 'ভ' বা 'ভ'-এর জায়গায় 'ব' লিখে আর একটি অনুবর্তী পঙ্‌ক্তি গঠন করা যাবে।

বলা বাহুল্য, I, II আকারের বিধি পাই প্রতিপত্তি সূত্র থেকে আর III আকারের বিধি সমার্থতা সূত্র থেকে। III-এতে " ═══ "-এর উপরের আর নিচেকার বাক্য সমার্থক, আর I, II-এতে " —— "-এর উপরের বাক্য নিচেকার বাক্যের অসম প্রতিপাদক।

বৈধতা প্রমাণ করতে যে যুক্তিবিধির সাহায্য নেওয়া হবে সেগুলি প্রস্তাবিত আকারে নিচে উল্লেখ করা হল এদের নাম (বন্ধনীর মধ্যে, নামসংক্ষেপ) সহ।

১
সংযোগী সমুচ্ছেদ
Simplification (Simp)

$$\frac{p \cdot q}{p}$$

২
বিকল্পযোজনা
Addition (Add)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

৩
সংগ্রহণ*
Adjunction (Adj)

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \cdot q}$$

৪
পূর্বকল্প অন্বয়ী
Modus Ponendo Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{c} p \supset q \\ p \end{array}}{q}$$

৫
অনুকল্প ব্যতিরেকী
Modus Tollendo Tollens (MT)

$$\frac{\begin{array}{c} p \supset q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

৬
বিকল্প ব্যতিরেকী
Modus Tollendo Ponens (MTP)

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

৭
দ্বিকল্প অন্বয়ী
Constructive Dilemma (CD)

$$\frac{\begin{array}{c} (p \supset q) \cdot (r \supset s) \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s}$$

৮
দ্বিকল্প ব্যতিরেকী
Destructive Dilemma (DD)

$$\frac{\begin{array}{c} (p \supset q) \cdot (r \supset s) \\ \sim q \vee \sim s \end{array}}{\sim p \vee \sim r}$$

৯
প্রাকল্পিক যুক্তি
Hypothetical Syllogism (HS)

$$\frac{\begin{array}{c} p \supset q \\ q \supset r \end{array}}{p \supset r}$$

---

* বা সংযোজনা [Conjunction (Conj)]

১০
নিষেধের নিষেধ
Double Negation (DN)

$$\frac{\sim\sim p}{p}$$

১১
ব্যাবর্তন
Transposition (Trans)

$$\frac{p \supset q}{\sim q \supset \sim p}$$

১২
' ⊃ '-এর সংজ্ঞা
(Df ⊃)

$$\frac{p \supset q}{\sim p \vee q}$$

১৩
পূর্বকল্প লাঘবগৌরব†
Exportation (Expor)†

$$\frac{(p \cdot q) \supset r}{p \supset (q \supset r)}$$

১৪
পুনরুক্তি(সংকোচ)††
Idempotence (Idem)

$$\frac{p \cdot p}{p} \qquad \frac{p \vee p}{p}$$

১৫
ক্রমান্তরকরণ
Commutation (Com)

$$\frac{p \cdot q}{q \cdot p} \qquad \frac{p \vee q}{q \vee p}$$

১৬
যূথীবিযূথীকরণ
Association (Assoc)

$$\frac{p \cdot (q \cdot r)}{(p \cdot q) \cdot r} \qquad \frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r}$$

১৭
ডি মরগেন
(DM)

$$\frac{\sim(p \cdot q)}{\sim p \vee \sim q} \qquad \frac{\sim(p \vee q)}{\sim p \cdot \sim q}$$

১৮
সঞ্চালন
Distribution (Dist)

$$\frac{p \cdot (q \vee r)}{(p \cdot q) \vee (p \cdot r)} \qquad \frac{p \vee (q \cdot r)}{(p \vee q) \cdot (p \vee r)}$$

১৯
'≡'-এর সংজ্ঞা
(Df ≡)

$$\frac{p \equiv q}{(p \supset q) \cdot (q \supset p)} \qquad \frac{p \equiv q}{(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)}$$ †††

২০
স্বতসত্য বর্জন*
Dropping Tautologous Conjunct

$$\frac{p \cdot (q \vee \sim q)}{p}$$

২১
স্বতমিথ্যা বর্জন**
Dropping Inconsistent Alternant

$$\frac{p \vee (q \cdot \sim q)}{p}$$

২২
অসম্ভবতার নিয়ম***
Law of Absurdity (Absur)

$$\frac{p \supset (q \cdot \sim q)}{\sim p}$$

---

† '= '-এর উপর থেকে নিচের দিকে গেলে 'পূর্বকল্পলাঘব' (Expor), আর নিচের থেকে উপর দিকে গেলে 'পূর্বকল্পগৌরব' [Importation (Impor)]।

†† ' = ' এর উপর থেকে নিচের দিকে গেলে 'পুনরুক্তি সংকোচ', বিপরীতক্রমে গেলে 'পুনরুক্তি'।

††† Copi তাঁর বইতে ১—১৯ এ যুক্তিবিধি কয়টিই উল্লেখ করেছেন। যদি Copi-কে অনুসরণ করে প্রমাণ করতে চাও তাহলে শেষোক্ত তিনটি বিধি প্রয়োগ করবে না।

* '=-'এর নিচে থেকে ওপর দিকে গেলে—'স্বতসত্য সংযুক্তি' ('Introducing...')

** '='-এর নিচে থেকে ওপর দিকে গেলে—'স্বতমিথ্যা যোজনা' (Introducing...')

*** এ বিধিটি অধ্যায় ১২ বিভাগ ১৮তে (২২৪ পৃঃ) প্রতিপত্তি সূত্র হিসাবেও উল্লেখ করা হয়েছে। এখানে কেবল সমার্থতা সূত্র হিসাবে উল্লেখ করা হল।

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিকে আমরা বহু প্রতিপত্তি ও সমার্থতা বাক্য উল্লেখ করেছি। এদের প্রত্যেকটিকে যুক্তিবিধি আকারে ব্যক্ত করা যেত। এসব সম্ভাব্য যুক্তিবিধির মধ্য থেকে উপরের কয়টি বেছে নেওয়া হল কেন? তার কারণ, কেবল এ ২২টি বিধি মেনে নিলেই সব (বৈধ সত্যাপেক্ষ) যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়। তবে এ কথাও ঠিক যে, বৈধতা প্রমাণের জন্য এতগুলি বিধি মানবার দরকার হয় না, আরও অনেক কম সংখ্যক যুক্তিবিধি মেনে নিলেই চলে। আবার উক্ত তালিকা আরও বিস্তৃত হলে প্রমাণ ক্রিয়া আরও সহজ হত। এটা সহজবোধ্য যে, যত কমসংখ্যক বিধি প্রাথমিক বলে মেনে নেবে প্রমাণ তত দীর্ঘ ও প্রমাণক্রিয়া তত শ্রমসাপেক্ষ হবে। আর যত বেশী বিধি মেনে নেবে প্রমাণ তত হ্রস্ব ও প্রমাণক্রিয়া তত সহজ হবে। তবে এরকম ক্ষেত্রে অনেকগুলি যুক্তিবিধি মনে রাখা এবং এদের মধ্য থেকে যথাযথভাবে নির্বাচন করে প্রয়োগ করা দুঃসাধ্য হয়ে ওঠে। আমরা একটা মধ্যপন্থা অবলম্বন করলাম। আমাদের এ তালিকা নাতিদীর্ঘ, নাতিহ্রস্ব।

উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে, উক্ত বিধি-তালিকা আরও সংক্ষেপিত করলে প্রমাণক্রিয়া অধিকতর শ্রমসাপেক্ষ হত। আমরা আরও বলেছি, যে বিধিগুলি তালিকাভুক্ত হল তার সব কয়টি বৈধতা প্রমাণের জন্য অপরিহার্য নয়। এ কথার সমর্থনে কয়েকটি উদাহরণ।

লক্ষণীয়, MT (৫) ও MTP (৬) পৃথকভাবে স্বীকার না করলেও চলত ; MT ও MTP দিয়ে যা প্রমাণ করা যায়, MP (৪), ব্যাবর্তনের সূত্র (১১) ও '⊃'-এর সংজ্ঞা (১২) দিয়েই তা প্রমাণ করা যায়। এ প্রসঙ্গে অধ্যায় ১০ বিভাগ ২ দ্রষ্টব্য।

আবার, ব্যাবর্তনের সূত্রের সাহায্য নিয়ে CD (৭) থেকে DD (৮) পাওয়া যায়। তারপর,

২৩

$$\frac{(p \supset q) \cdot (r \supset s)}{(p \vee r) \supset (q \vee s)}$$

এ যুক্তিবিধি যদি আমাদের তালিকার অন্তর্ভুক্ত হত তাহলে পৃথকভাবে CD (৭) DD (৮) মানবার দরকার হত না। নিচের অবরোহ দুটি লক্ষ করলে এ উক্তির যাথার্থ্য বোঝা যাবে।

1.	$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$	
2.	$A \vee C$	$/ \therefore B \vee D$
3.	$(A \vee C) \supset (B \vee D)$	1, বিধি ২৩
4.	$B \vee D$	3, 2, MP

1.	$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$	
2.	$\sim B \vee \sim D$	$/ \therefore \sim A \vee \sim C$
3.	$(\sim B \supset \sim A) \cdot (\sim D \supset \sim C)$	1, Trans
4.	$(\sim B \vee \sim D) \supset (\sim A \vee \sim C)$	3, বিধি ২৩
5.	$\sim A \vee \sim C$	4, 2, MP

আর একটি উদাহরণ। পূর্বকল্প লাঘবগৌরব বিধিটিও (১৩) ইচ্ছা করলে এ তালিকা থেকে বাদ দিতে পারতাম। এ বিধিটি যদি আমাদের তালিকায় না থাকত তাহলে

....

3. $(A \cdot B) \supset C$

– $A \supset (B \supset C)$ 3, Expor

....

এ অবরোহের দ্বিতীয় পঙ্‌ক্তিটি আমরা এভাবে পেতে পারতাম :

....

3. $(A \cdot B) \supset C$
4. $\sim(A \cdot B) \vee C$ 3, Df $\supset$
5. $(\sim A \vee \sim B) \vee C$ 4, DM
6. $\sim A \vee (\sim B \vee C)$ 5, Assoc
7. $A \supset (\sim B \vee C)$ 6, Df $\supset$
8. $A \supset (B \supset C)$ 7, Df $\supset$

....

আবার, আমাদের প্রাথমিক বিধির তালিকায় যদি HS (৯) না থাকত তাহলে

1. $(A \supset B) \cdot (B \supset C)$ $\underline{/ \therefore A \supset C}$

— $A \supset C$ 1, HS

এ অবরোহে যে যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা হয়েছে তার বৈধতা প্রমাণ করা যেত এভাবে :

1. $(A \supset B) \cdot (B \supset C)$ $\underline{/ \therefore A \supset C}$
2. $(\sim A \vee B) \cdot (\sim B \vee C)$ 1, Df $\supset$
3. $[(\sim A \vee B) \cdot \sim B] \vee [(\sim A \vee B) \cdot C]$ 2, Dist
4. $[\sim B \cdot (\sim A \vee B)] \vee [C \cdot (\sim A \vee B)]$ 3, Com
5. $(\sim B \cdot \sim A) \vee (\sim B \cdot B) \vee (C \cdot \sim A) \vee (C \cdot B)$ 4, Dist
6. $(\sim A \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot C) \vee (B \cdot C) \vee (B \cdot \sim B)$ 5, Com
7. $(\sim A \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot C) \vee (B \cdot C)$ 6, স্বতমিথ্যা বর্জন
8. $[(\sim A \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot C)] \vee (B \cdot C)$ 7, Assoc
9. $[\sim A \cdot (\sim B \vee C)] \vee (B \cdot C)$ 8, Dist
10. $(B \cdot C) \vee [\sim A \cdot (\sim B \vee C)]$ 9, Com
11. $[(B \cdot C) \vee \sim A] \cdot [(B \cdot C) \vee (\sim B \vee C)]$ 10, Dist
12. $(B \cdot C) \vee \sim A$ 11, Simp
13. $\sim A \vee (B \cdot C)$ 12, Com
14. $(\sim A \vee B) \cdot (\sim A \vee C)$ 13, Dist
15. $(\sim A \vee C) \cdot (\sim A \vee B)$ 14, Com
16. $\sim A \vee C$ 15, Simp
17. $A \supset C$ 16, Df $\supset$

এমনকি Add আর অতিপরিচিত MP ছাড়াও কাজ চলে যেত*। যথা, যদি MP আমাদের জানা না থাকত তাহলে আমরা

$$A \supset B,\ A \quad \therefore\ B$$

এ যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করতে পারতাম এভাবে ঃ

1.	$A \supset B$	
2.	$A \quad / \therefore\ B$	
3.	$(A \supset B) \cdot A$	1, 2, Adj
4.	$(\sim A \vee B) \cdot A$	5, Df $\supset$
5.	$A \cdot (\sim A \vee B)$	4, Com
6.	$(A \cdot \sim A) \vee (A \cdot B)$	5, Dist
7.	$(A \cdot B) \vee (A \cdot \sim A)$	6, Com
8.	$A \cdot B$	7, স্বতমিথ্যা বর্জন
9.	$B \cdot A$	8, Com
10.	B	9, Simp

আর

$$A \quad \therefore\ A \vee B$$

-এর বৈধতা বৈধতা প্রমাণ করতে পারতাম এভাবে ঃ

1.	$A \quad / \therefore\ A \vee B$	
2.	$A \vee (B \cdot \sim B)$	1, স্বতমিথ্যা যোজনা
3.	$(A \vee B) \cdot (A \vee \sim B)$	2, Dist
4.	$A \vee B$	3, Simp

৯. যুক্তিবিধি প্রয়োগ সংক্রান্ত বিধিনিষেধ

অসংখ্য সম্ভাব্য যুক্তিবিধি থেকে আমরা খুশিমত কয়েকটি বেছে নিয়েছি। এ নির্বাচন কিন্তু এক প্রকারের অঙ্গীকারকরণ। অঙ্গীকারটি এই ঃ (আমরাই বেছে নিয়েছি, অন্য কোনো বিধিও বেছে নিতে পারতাম, ঠিক, কিন্তু) যে বিধিগুলি পূর্বস্বীকার বলে মেনে নিয়েছি সেগুলি ছাড়া অন্য কোনো বিধি প্রয়োগ করা চলবে না। নিয়মনির্বাচন খেলার নিয়মকরণের মত। খেলার নিয়ম আমাদের খেয়াল খুশিতে রচিত হয়েছে। কিন্তু খেলতে গিয়ে পদে পদে নতুন নিয়ম করলে আর খেলা হয় না।

অনেক যুক্তিবিধি আছে যেগুলি স্বতবোধ্য, স্বজ্ঞাতেই এদের যাথার্থ্য "দেখতে পাই"। কিন্তু স্বজ্ঞাগম্য, স্বতবোধ্য, হলেও এসব যদি আমাদের পূর্বস্বীকারের তালিকার অন্তর্ভুক্ত না হয় তাহলে বৈধতা প্রমাণে এদের প্রয়োগ করা চলবে না। উদাহরণ ঃ

আমাদের রচিত তালিকায় আছে

$$\frac{p \cdot q}{p} \quad \text{Simp}$$

$\frac{p \cdot q}{q}$ ঃ এটিও স্পষ্টতই নির্ভুল যুক্তিবিধি। কিন্তু শেষোক্ত বিধিটি আমাদের তালিকা বহির্ভূত, কাজেই এটির প্রয়োগ অনুমোদন করা যায় না। যথা, "$A \cdot B$" থেকে সরাসরি

* কেবল কতকগুলি সমার্থতা সূত্র আর Simp যুক্তিবিধিটি মেনে নিলেই চলত।

"B" নিষ্কাশন করা যাবে না। উক্ত হেতুবাক্য থেকে উক্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করতে হলে দরকার নিম্নোক্ত অবরোহ :

1.	$A \cdot B$	$/ \therefore B$
2.	$B \cdot A$	1, Com
3.	B	2, Simp

এ প্রসঙ্গে আর একটি কথা। আমরা প্রমাণ সংক্ষেপ করার কথা বলেছি। বলা বাহুল্য, একই অবরোহপর্বে একাধিক যুক্তিবিধি প্রয়োগ করলে প্রমাণ অপেক্ষাকৃত সংক্ষিপ্ত হয়। কিন্তু তাতে অবরোহী প্রমাণে অকারণে জটিলতা ও দুর্বোধ্যতার সঞ্চার করা হয়। এজন্য আমরা নিম্নোক্ত নিয়মটি মেনে চলব। (সাধারণভাবে)

> একই অবরোহপর্বে একাধিক বিধি প্রয়োগ করা চলবে না। একই পর্বে কেবল একটি যুক্তিবিধি প্রয়োগ করে বাক্য নিষ্কাশন করতে হবে।

এ কথার মানে

> কোনো পঙ্‌ক্তির ভাষ্যে একাধিক যুক্তিবিধির নামোল্লেখ থাকবে না। যথা

$$(A \vee B \vee \sim C) \supset \sim D, \quad \therefore \quad C \cdot (\sim B \cdot \sim A)$$

এ যুক্তির বৈধতা প্রমাণ নিম্নোক্তরূপে করলে চলবে না

1.	$(A \vee B \vee \sim C) \supset \sim D$	
2.	D	$/ \therefore C \cdot (\sim B \cdot \sim A)$
3.	$D \supset (\sim A \cdot B \cdot C)$	1, Trans, DM, DN
4.	$\sim A \cdot \sim B \cdot C$	3, 2, MP
5.	$C \cdot (\sim B \cdot \sim A)$	4, Com, Assoc

করতে হবে এভাবে :

1.	$(A \vee B \vee \sim C) \supset \sim D$	
2.	D	$/ \therefore C \cdot (\sim B \cdot \sim A)$
3.	$\sim \sim D \supset \sim (A \vee B \vee \sim C)$	1, Trans
4.	$D \supset \sim (A \vee B \vee \sim C)$	3, DN
5.	$D \supset (\sim A \cdot \sim B \cdot \sim \sim C)$	4, DM
6.	$D \supset (\sim A \cdot \sim B \cdot C)$	5, DN
7.	$\sim A \cdot \sim B \cdot C$	6, 2, MP
8.	$(\sim A \cdot \sim B) \cdot C$	7, Assoc
9.	$C \cdot (\sim A \cdot \sim B)$	8, Com
10.	$C \cdot (\sim B \cdot \sim A)$	9, Com

উপরে যে নিয়মের কথা বলা হয়েছে, একটি বিশেষ ক্ষেত্রে তার লঙ্ঘন অনুমোদন করব। DN-এর প্রয়োগ এত স্বাভাবিক ও সহজবোধ্য যে একই পর্বে কোনো যুক্তিবিধি ও DN প্রয়োগ করলে বুঝতে কোনো অসুবিধা হওয়ার কথা নয়।

> DN-এর প্রয়োগ পৃথকভাবে কোনো পর্বে না দেখালেও চলবে। মানে—একই পঙ্‌ক্তির ভাষ্যে, কোনো যুক্তিবিধির নামের সঙ্গে "DN"-ও থাকতে পারবে।

যথা, উক্ত অবরোহের চতুর্থ পঙ্‌ক্তির নিচে সরাসরি লিখতে পারতাম ঃ

$D \supset (\sim A \cdot \sim B \cdot C)$ 4, DM, DN

১০. নিষ্কাশন সম্বন্ধে কয়েকটি ইঙ্গিত

আমরা দেখেছি, অবরোহী পদ্ধতির প্রধান কাজ হল অনুক্ত অবয়ব উদ্ধার করা ও লুপ্ত অঙ্গযুক্তি পুনর্গঠন করা। কিভাবে এ কাজ সম্পন্ন করতে হবে তার বাঁধাধরা কোনো নিয়ম নেই। সত্যসারণী গঠনের, বা সত্যসারণীর সাহায্যে বৈধতা নির্ণয়ের, নিয়মগুলি যান্ত্রিকভাবে প্রয়োগ করলেই উদ্দেশ্য সিদ্ধি হয়। কিন্তু আলোচ্য পদ্ধতি এরকম যান্ত্রিকভাবে অগ্রসর হতে পারে না। এ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে কল্পনা করে, ভেবে চিন্তে, নির্ণয় করতে হবে কোন্ হেতুবাক্য থেকে কোন্ বাক্য নিষ্কাশন করা যায়, কিভাবে কোনো বাক্যকে রূপান্তরিত করলে অমুক ঈপ্সিত বাক্য (পঙ্‌ক্তি) পাওয়া যায়। এ সম্বন্ধে কোনো বাঁধাধরা নিয়ম নেই, ঠিক। তবু এ ব্যাপারে কয়েকটি ইঙ্গিত দিতে পারি।

> প্রথমে প্রদত্ত সিদ্ধান্তে কোন্ কোন্ আণবিক বাক্য আছে তা লক্ষ করবে। তারপর, এ আণবিক বাক্যগুলি ছাড়া হেতুবাক্যে আর যে সব আণবিক অঙ্গ আছে সেগুলির অপনয় করার চেষ্টা করবে।

সাধারণত বৈধ অবরোহযুক্তিতে হেতুবাক্যগুলির মধ্যে যত আণবিক বাক্য সিদ্ধান্তে ততগুলি থাকে না—সিদ্ধান্ত করা হয় মধ্যবাক্য অপনয় করে। কিন্তু মধ্যবাক্য কী ?

মধ্যবাক্য ঃ যে বাক্য দুটি হেতুবাক্যের মধ্যে সমভাবে বর্তমান তাকে বলে মধ্যবাক্য ("মধ্যপদ" —"middle term"-এর অনুকরণে "মধ্যবাক্য")। যথা ঃ $A \supset B, \sim B \therefore \sim A$—এখানে '$B$' মধ্যবাক্য, কেননা দুটি হেতুবাক্যের মধ্যেই 'B' সমভাবে বর্তমান।

এখন তোমার প্রধান লক্ষ্য হবে

মধ্যবাক্য খুঁজে বের করা এবং মধ্যবাক্য অপনয়ন করা।

মধ্যবাক্য খুঁজে পেলে, দেখবে—

> বাক্যটি কোনো যুক্তিবিধি* অনুসারে অপনয় করা যায় কিনা (এবং গেলে কোন্ যুক্তিবিধি অনুসারে ?)

উদাহরণ

1. $A \supset B$
2. $C \supset A$
3. $(\sim B \cdot \sim C) \supset D$
4. $\sim B$ $\quad / \therefore D$

মধ্যবাক্য সন্ধান করতে গিয়ে প্রথমেই দেখি 1 ও 2-এর মধ্যে আছে মধ্যবাক্য 'A' ; আরও দেখি HS-এর সাহায্যে 'A'-কে অপনয় করা যায়। কাজেই পরবর্তী পঙ্‌ক্তি হিসাবে লিখতে পারি

5. $C \supset B$ 2, 1, HS

* ৪—৯ সংখ্যক যুক্তিবিধির কোনোটি

এখন দেখছি 5 ও 4-এর মধ্যে 'B' সমভাবে বর্তমান। এ মধ্যবাক্য 'B'-কে অপনয় করা যায় MT-এর সাহায্যে। কাজেই লেখা যায়

6. $\sim C$ 5, 4, MT

এখন লক্ষ করছি 3-এর পূর্বকল্প অপনয় করতে পারলেই আকাঙ্খিত সিদ্ধান্ত 'D' পাওয়া যায়। আরও লক্ষ করছি 3-এর পূর্বকল্পের দুটি সংযোগীই আমরা পেয়েছি 4 ও 6-এতে। এ দুটিকে সংযুক্ত করে—Adj অনুসারে—একটি মধ্যবাক্য "$\sim B \cdot \sim C$" পাব এবং MP প্রয়োগ করে বাক্যটি অপনয় করতে পারব। কাজেই এভাবে অগ্রসর হতে পারি

7. $\sim B \cdot \sim C$ 4, 6, Adj
8. D 3, 7, MP

আবার হয়ত দেখবে

কোনো মধ্যবাক্য খুঁজে পেলেও অপনয়কারী কোনো যুক্তিবিধি খুঁজে পাচ্ছ না। সে ক্ষেত্রে রূপান্তরের কথা ভেবে দেখবে, কোনো বাক্যকে রূপান্তর করে নিলে* কোনো অপনয়কারী যুক্তিবিধি প্রযোজ্য কিনা তা ভেবে দেখবে।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, কোনো যুক্তির সিদ্ধান্ত "$D \cdot E$", আর অবরোহের দুটি পর্বে, মনে কর, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পর্বে, পেলাম ঃ

5. $[C \cdot (A \vee B)] \supset D$
6. C

স্পষ্টতই 'A', 'B', 'C'-এর অপনয় দরকার। এখন উক্ত পঙ্‌ক্তি দুটির মধ্যে 'C' মধ্যবাক্য হিসাবে থাকলেও কোনো যুক্তিবিধি অনুসারে 'C'-এর অপনয় সম্ভব নয়। কিন্তু লক্ষণীয়, Expor (১৫) বিধি প্রয়োগ করে পঞ্চম পঙ্‌ক্তির 'C'-কে পূর্বকল্প করা যায়। এবং পরে MP প্রয়োগ করা যায়। যায়, এভাবে—

7. $C \supset [(A \vee B) \supset D]$ 5, Expor
8. $(A \vee B) \supset D$ 7, 6, MP

আবার ধরা যাক, দেখা গেল যে

অপনয়ের জন্য যে মধ্যবাক্য দরকার তা পাওয়া গেল না, ঠিক ; কিন্তু আকাঙ্খিত মধ্যবাক্যের কোনো একটি উপকরণ (অঙ্গ) পাওয়া গেল।

এরকম ক্ষেত্রে

Add যুক্তিবিধির সাহায্যে মধ্যবাক্য গঠন করা যায় কিনা দেখবে।

ধরা যাক, আমাদের উদাহরণের নবম পর্বে পেলাম 'A'। তাহলে 'A' থেকে Add প্রয়োগ করে মধ্যবাক্য হিসাবে "$A \vee B$" পেতে পারি এবং পরবর্তী পঙ্‌ক্তিটি এভাবে লিখতে পারি

9. A
10. $A \vee B$ 9, Add

* ১০—২১ হল রূপান্তরকরণের বিধি।

আবার, মনে করা যাক, দেখা গেল যে

> মধ্যবাক্য পাওয়া গেল না, ঠিক ; কিন্তু এমন একটি সংযৌগিক বাক্য পাওয়া গেল যার কোনো সংযোগী আকাঙ্খিত মধ্যবাক্যের একটি অঙ্গ হিসাবে ব্যবহার-যোগ্য।

এরকম ক্ষেত্রে

> Simp-এর সাহায্যে অঙ্গটি বিচ্ছিন্ন করে নিয়ে, তারপর Add-এর সাহায্যে মধ্যবাক্য গঠন করবে।

ধরা যাক, আলোচ্য উদাহরণের একাদশ ও দ্বাদশ পর্বে পেলাম

11. $(F \vee G) \supset E$
12. $F \cdot I \cdot H$

এক্ষেত্রে 'F'-কে বিচ্ছিন্ন করে নিয়ে, "$F \vee G$" গঠন করে 11-এর পূর্বকল্প অপনয় করতে পারি এভাবে—

13.	F	12, Simp
14.	$F \vee G$	13, Add
15.	E	11, 14, MP

....

এবার একটি পূর্ণাঙ্গ উদাহরণ।

1.	$(A \vee B) \supset \sim C$	
2.	$C \vee B$	
3.	$(B \vee \sim A) \supset E$	
4.	$A \cdot D$	$/ \therefore E \vee \sim B$
5.	A	4, Simp
6.	$A \vee B$	5, Add
7.	$\sim C$	1, 6, MP
8.	B	2, 7, MTP
9.	$B \vee \sim A$	8, Add
10.	E	3, 9, MP
11.	$E \vee \sim B$	10, Add

আর একটি উদাহরণ।

1.	$(A \vee B) \supset (A \cdot B)$	
2.	$\sim A$	$/ \therefore B \supset C$
3.	$\sim A \vee \sim B$	2, Add
4.	$\sim (A \cdot B)$	3, DM
5.	$\sim (A \vee B)$	1, 4, MT
6.	$\sim A \cdot \sim B$	5, DM
7.	$\sim B \cdot \sim A$	6, Com
8.	$\sim B$	7, Simp
9.	$\sim B \vee C$	8, Add
10.	$B \supset C$	9, Df $\supset$

Exportation-এর গুরুত্ব

যদি কোনো হেতুবাক্য একাঙ্গী বাক্য (ধর 'p', '$\sim p$') হয়, তাহলে MP, MT, HS প্রয়োগের কথা ভাববে। তবে হয়ত দেখবে—'p', '$\sim p$' কোনো হেতুবাক্যের পূর্বকল্প বা অনুকল্প হিসাবে উপস্থিত নেই, আছে কোনো অঙ্গবাক্যের অঙ্গীভূত হয়ে, যথা "$(p \cdot q) \supset (p \vee \sim q)$"—এ বাক্যে। এরকম ক্ষেত্রে Expor করে 'p', '$\sim p$' ইত্যাদিকে পূর্বকল্প বা অনুকল্প করা যায় কিনা দেখবে।

উদাহরণ ঃ

1.	$A \supset [B \supset (\sim C \supset D)]$	
2.	$(C \cdot B) \supset \sim A$	
3.	B	$/ \therefore A \supset D$
4.	$(B \cdot C) \supset \sim A$	2, Com
5.	$B \supset (C \supset \sim A)$	4, Expor
6.	$C \supset \sim A$	5, 3, MP
7.	$(A \cdot B) \supset (\sim C \supset D)$	1, Expor
8.	$(B \cdot A) \supset (\sim C \supset D)$	7, Com
9.	$(B \supset [A \supset (\sim C \supset D)$	8, Expor
10.	$A \supset (\sim C \supset D)$	9, 3, MP
11.	$(A \cdot \sim C) \supset D$	10, Expor
12.	$(\sim C \cdot A) \supset D$	11, Com
13.	$\sim C \supset (A \supset D)$	12, Expor
14.	$\sim \sim A \supset \sim C$	6, Trans
15.	$A \supset \sim C$	14, DN
16.	$A \supset (A \supset D)$	15, 13, HS
17.	$(A \cdot A) \supset D$	16, Expor
18.	$A \supset D$	17, Idem

এতক্ষণ আমরা প্রধানত অপনয়ের দিকে নজর দিতে বলেছি। যে সব আণবিক বাক্য সিদ্ধান্তে নেই সেগুলি অপনয় করতে বলেছি, কেননা আশা করতে পারি এসব অপনীত হলে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত আপনিই বেরিয়ে আসবে। কিন্তু আর একটি দিকেও নজর রাখা ভাল। কি করে সিদ্ধান্তটি পাওয়া যায় সেদিকেও নজর রাখবে। এদিকে নজর রাখলে হয়ত দেখবে সব হেতুবাক্য নিয়ে বিশদভাবে অপনয় করার দরকার হবে না ; হয়ত দেখবে—সব হেতুবাক্য বিচারের দরকার নেই, দু-একটি নির্বাচিত হেতুবাক্য থেকেই প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা সম্ভব। উদাহরণ ঃ আবার ৪০৪ পৃষ্ঠার প্রথম যুক্তিটিই নেওয়া যাক। এভাবেও এর বৈধতা প্রমাণ করা যায়।

1.	$(A \vee B) \supset \sim C$	
2.	$C \vee B$	
3.	$(B \vee \sim A) \supset E$	
4.	$A \cdot B$	$/ \therefore E \vee \sim B$
5.	$\sim(B \vee \sim A) \vee E$	3, Df $\supset$
6.	$(\sim B \cdot A) \vee E$	5, DM, DN
7.	$E \vee (\sim B \cdot A)$	6, Com
8.	$(E \vee \sim B) \cdot (E \vee A)$	7, Dist
9.	$E \vee \sim B$	8, Simp

ভাষ্যে হেতুবাক্যের যে ক্রমিক সংখ্যা আছে তা লক্ষ করলে দেখবে সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশিত হয়েছে কেবল তৃতীয় হেতুবাক্য থেকে, দেখবে—এ অবরোহী প্রমাণে অন্য কোনো হেতুবাক্যের সাহায্য নেওয়া হয় নি। অবরোহটির বাম প্রান্তে যদি প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যা উল্লেখ করা হত তাহলে 5—9 এদের প্রত্যেকটির বামে লিখতে হত কেবল : { 3 } ।

উপরোহ অবরোহ থেকে বোঝা যাবে :

$$(B \vee \sim A) \supset E \therefore E \vee \sim B$$

এ যুক্তিও বৈধ। আরও অগ্রসর হয়ে বলতে পারি, এ যুক্তিটি বৈধ বলেই

$$(A \vee B) \supset \sim C, C \vee B, (B \vee \sim A) \supset E, A \cdot D \therefore E \vee \sim B$$

এ যুক্তিটিও বৈধ। লক্ষণীয়

'ব ∴ ভ' বৈধ হলে

ব · ক ∴ ভ

ব · ক · খ ∴ ভ

এসব যুক্তি আকারও বৈধ।*

Simp ও Dist : এদের গুরুত্ব

৪—৯ সংখ্যক যুক্তিবিধি প্রয়োগ করতে হলে মধ্যবাক্য অপনয় করতে হয়। কিন্তু মধ্যবাক্য না থাকলেও Simp-এর সাহায্যে অপনয় করা যায়। এদিক থেকে Simp বিধিটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। আর Dist বিধি Simp (বা সংযোগীসমুচ্ছেদ) সহায়ক।

> Simp বিধি সরাসরি প্রয়োগ না করতে পারলে কোনো রূপান্তরের বিধি প্রয়োগ করে, তারপর Dist প্রয়োগ করে পঙ্‌ক্তিটিকে সংযৌগিক আকারে আনা যায় কিনা দেখবে।

যে প্রাকল্পিক, বৈকল্পিক বা প্রাতিকল্পিক বাক্যের কোনো অঙ্গ সংযৌগিক সে বাক্যে Dist প্রয়োগ করে সংযৌগিক আকারে রূপান্তরিত করার, এবং তারপর Simp প্রয়োগ করে বাক্যটির অবাঞ্ছিত অংশ বর্জন করার, চেষ্টা করবে।

উদাহরণ : উদাহরণগুলিতে "ভাষ্য" অনুক্ত থাকল।

1. $(A \vee B) \supset C$ $\underline{/\therefore \sim C \supset \sim A}$
2. $\sim(A \vee B) \vee C$
3. $(\sim A \cdot \sim B) \vee C$
4. $C \vee (\sim A \cdot \sim B)$
5. $(C \vee \sim A) \cdot (C \vee \sim B)$
6. $C \vee \sim A$
7. $\sim\sim C \vee \sim A$
8. $\sim C \supset \sim A$

1. $(\sim A \cdot B) \vee C$ $\underline{/\therefore A \supset C}$
2. $C \vee (\sim A \cdot B)$
3. $(C \vee \sim A) \cdot (C \vee B)$
4. $C \vee \sim A$
5. $\sim A \vee C$
6. $A \supset C$

* অধ্যায় ১৬, বিভাগ ৭, পৃঃ ৩০৭ দ্রষ্টব্য

1.	$\sim[A \cdot (\sim B \vee C)]$	$/ \therefore C \supset \sim A$
2.	$\sim A \vee \sim(\sim B \vee C)$	
3.	$\sim A \vee (B \cdot \sim C)$	
4.	$(\sim A \vee B) \cdot (\sim A \vee \sim C)$	
5.	$(\sim A \vee \sim C) \cdot (\sim A \vee B)$	
6.	$\sim A \vee \sim C$	
7.	$\sim C \vee \sim A$	
8.	$C \supset \sim A$	

আরও দুটি উদাহরণ।

1.	$A \vee (B \cdot C)$	
2.	$A \supset C$ $\quad / \therefore C$	
3.	$(A \vee B) \cdot (A \vee C)$	1, Dist
4.	$(A \vee C) \cdot (A \vee B)$	3, Com
5.	$A \vee C$	4, Simp
6.	$C \vee A$	5, Com
7.	$\sim\sim C \vee A$	6, DN
8.	$\sim C \supset A$	7, Df $\supset$
9.	$\sim C \supset C$	8, 2, HS
10.	$C \vee C$	9, Df $\supset$, DN
11.	C	10, Idem

1.	$(A \vee B) \supset (C \cdot D)$ $\quad / \therefore A \supset C$	
2.	$\sim(A \vee B) \vee (C \cdot D)$	1, Df $\supset$
3.	$(\sim A \cdot \sim B) \vee (C \cdot D)$	2, DM
4.	$[(\sim A \cdot \sim B) \vee C] \cdot [(\sim A \cdot \sim B) \vee D]$	3, Dist
5.	$(\sim A \cdot \sim B) \vee C$	4, Simp
6.	$C \vee (\sim A \cdot \sim B)$	5, Com
7.	$(C \vee \sim A) \cdot (C \vee \sim B)$	6, Dist
8.	$C \vee \sim A$	7, Simp
9.	$\sim A \vee C$	8, Com
10.	$A \supset C$	9, Df $\supset$

সিদ্ধান্তের ঠিক তাই। যথা

$$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \quad \therefore (A \vee C) \supset (B \vee D)$$
$$(A \supset B) \cdot (C \supset D) \quad \therefore (A \cdot C) \supset (B \cdot D)$$

এ রকম ক্ষেত্রে Simp, Add ও Dist-এর প্রয়োগ অত্যাবশ্যক। উক্ত আকারের যুক্তির প্রমাণ বেশ জটিল। অন্যত্র* যুক্তি দুটির বৈধতা প্রমাণ করে দেওয়া হয়েছে।

ধর, কোনো প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্যগুলি সব অসংযৌগিক অনেকাঙ্গ বাক্য, যেমন : $A \supset B$, $C \vee D$, $A \equiv B$—ইত্যাদি, এবং এর কোনো হেতুবাক্য একাঙ্গী বাক্য ('A', '$\sim A$' ইত্যাদি) নয়। আর ধরে নাও, অবরোহের কোনো পর্বে কোনো সংযৌগিক পাওয়া যায় না। এ রকম ক্ষেত্রে সাধারণভাবে একাঙ্গী সিদ্ধান্ত পাওয়ার কথা নয়।

এখন মনে কর, এমন কোনো যুক্তির সাক্ষাৎ পেলে যার সব হেতুবাক্য অসংযৌগিক অনেকাঙ্গ বাক্য, অথচ সিদ্ধান্তটি একাঙ্গী বাক্য। এ রকম ক্ষেত্রে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করবে কি করে ? মনে রাখবে, এরূপ যুক্তির সিদ্ধান্ত পেতে হলে "$p \vee p$" বা "$\sim p \supset p$" আকারের বাক্য নিষ্কাশন করা প্রয়োজন।

* এ অধ্যায়ের অনুশীলনীর পরবর্তী অংশে

উদাহরণ

1.	$A \vee (B \cdot C)$	
2.	$A \supset C$	$/ \therefore C$
3.	$\sim A \supset (B \cdot C)$	1, Df $\supset$
4.	$\sim C \supset \sim A$	2, Trans
5.	$\sim C \supset (B \cdot C)$	4, 3, HS
6.	$\sim \sim C \vee (B \cdot C)$	5, Df $\supset$
7.	$C \vee (B \cdot C)$	6, DN
8.	$(C \vee B) \cdot (C \vee C)$	7, Dist
9.	$(C \vee C) \cdot (C \vee B)$	8, Com
10.	$C \vee C$	9, Simp
11.	C	10, Idem

আর একটি উদাহরণ।

1.	$A \vee B$	
2.	$A \supset C$	
3.	$C \supset \sim D$	
4.	$(B \supset E) \cdot (E \supset \sim D)$	$/ \therefore \sim D$
5.	$A \supset \sim D$	2, 3, HS
6.	$B \supset E$	4, Simp
7.	$(E \supset \sim D) \cdot (B \supset E)$	4, Com
8.	$E \supset \sim D$	7, Simp
9.	$B \supset \sim D$	6, 8, HS
10.	$(A \supset \sim D) \cdot (B \supset \sim D)$	5, 9, Adj
11.	$\sim D \vee \sim D$	10, 1, CD
12.	$\sim D$	11, Idem

আবার কখনও কখনও দেখতে পাবে—হেতুবাক্যের অন্তর্গত কোনো অঙ্গ অপনীত করা হল না, বরং হেতুবাক্যে নেই এমন বাক্য সিদ্ধান্তের অঙ্গবাক্য হিসাবে উপস্থিত করা হল। যথা

$$A \supset (B \supset \sim C) \quad \therefore \quad (A \cdot B \cdot C) \supset D$$

এ যুক্তিতে 'D' হেতুবাক্যে নেই কিন্তু সিদ্ধান্তে বর্তমান। বলা বাহুল্য, এরূপ ক্ষেত্রে Add-এর সাহায্যে ঈপ্সিত অঙ্গবাক্যকে (যথা 'D'কে) হেতুবাক্যের অঙ্গীভূত করতে হয়। যথা, এভাবে উক্ত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করতে পারি।

1.	$A \supset (B \supset \sim C)$	$/ \therefore (A \cdot B \cdot C) \supset D$
2.	$\sim A \vee (B \supset \sim C)$	1, Df $\supset$
3.	$\sim A \vee \sim B \vee \sim C$	2, Df $\supset$
4.	$(\sim A \vee \sim B \vee \sim C) \vee D$	3, Add
5.	$\sim(A \cdot B \cdot C) \vee D$	4, DM
6.	$(A \cdot B \cdot C \supset D$	5, Df $\supset$

১১. হেতুবাক্য নিয়ম (Premiss Rule)

যে ১৯টি যুক্তিবিধি* উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি বৈধতা প্রমাণের পক্ষে পর্যাপ্ত নয়। এমন বৈধ যুক্তি আছে যার বৈধতা কেবল উক্ত বিধিগুলির সাহায্যে প্রমাণ করা যায় না। যথা,

$A \quad \therefore \quad B \vee (B \supset C) \qquad\qquad A \quad \therefore \quad B \supset (B \vee C)$

এ যুক্তিগুলি বৈধ**, কিন্তু আমাদের গৃহীত যুক্তিবিধির সাহায্যে এদের বৈধতা প্রমাণ সম্ভব নয়। বৈধতা প্রমাণের জন্য আরও দু একটি নিয়ম মেনে নেবার দরকার। আমরা দুটি বিশেষ নিয়ম উল্লেখ করব: C.P. নিয়ম ও I.P. নিয়ম। তার আগে একটা সাধারণ নিয়ম ব্যাখ্যা করে নেব।

সাধারণ নিয়ম: হেতুবাক্য নিয়ম

> অবরোহের যে কোনো পর্বে যে কোনো বাক্য হেতুবাক্য-পঙ্‌ক্তি হিসাবে অনুপ্রবিষ্ট হতে পারে।

(এ নিয়মকে বলে হেতুবাক্য নিয়ম (Premiss rule)।

আমরা দেখেছি, প্রদত্ত হেতুবাক্যের যে কোনোটি যে কোনো পর্বে† উপস্থাপিত হতে পারে। এখন বলা হচ্ছে, যে কোনো বাক্যকে হেতুবাক্য হিসাবে উপস্থিত করা যায়, মানে—যে কোনো বাক্য অতিরিক্ত হেতুবাক্য বলে গণ্য হতে পারে। এ বিধান অত্যন্ত আজগুবী বলে মনে হওয়ার কথা। মনে হবে—যদি যে কোনো বাক্যকে হেতুবাক্য হিসাবে প্রয়োগ করা যায় তাহলে ত যা কিছু ইচ্ছা প্রমাণ করা যাবে। যথা, দেওয়া আছে "$A \supset B$"; তাহলে এ বাক্য থেকে প্রমাণ করা যাবে 'B' ('A'-কে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নিয়ে), প্রমাণ করা যাবে '$\sim A$' ('$\sim B$'-কে অতিরিক্ত হেতুবাক্য করে) বা প্রমাণ করা যাবে '$A \supset C$' ('$B \supset C$'-কে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নিয়ে)। কিন্তু উক্ত আশঙ্কা অমূলক। কেননা কোন্ কোন্ হেতুবাক্য থেকে সিদ্ধান্ত করা হয় তা ভাষ্যে এবং প্রতিপাদক-নির্দেশক স্তম্ভে স্পষ্টভাবে বলা হয়। ধরা যাক, 'ব' এবং অতিরিক্ত হেতুবাক্য 'ক' থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করে বলা হল 'ব' এবং 'ক' থেকে (কেবল 'ব' থেকে নয়) সিদ্ধান্ত নিষ্কাশিত হয়েছে, বলা হল "ব, ক ∴ ভ" বৈধ। এক্ষেত্রে আপত্তি করার কিছু নেই। কিন্তু যদি 'ব' থেকে, 'ক'-এর সাহায্য নিয়ে 'ভ' নিষ্কাশন করে দাবী করা হয়, সুতরাং "ব ∴ ভ" বৈধ তাহলে অবশ্যই দাবীটি অযৌক্তিক।

উদাহরণ

1.	$A \supset B$	/∴ B
2.	A	অতিরিক্ত হেতুবাক্য
3.	B	1, 2, MP

এ অবরোহী প্রমাণ অসঙ্গত। এতে প্রথম ছত্রে দাবী করা হয়েছে '$A \supset B$' থেকে 'B' নিষ্কাশন করা হবে, কিন্তু বস্তুত 'B' নিষ্কাশিত হয়েছে '$A \supset B$' এবং 'A' থেকে।

---

* যুক্তিবিধি ১-১৯।

** লক্ষণীয়, এদের সিদ্ধান্ত স্বতসত্য বাক্য। আর যে যুক্তির সিদ্ধান্ত স্বতসত্য বাক্য তা অবৈধ হতে পারে না।

† বলা বাহুল্য, অবরোহিত সিদ্ধান্ত-পঙ্‌ক্তির পূর্ববর্তী পর্বে।

কিন্তু

{ 1 }	1. $A \supset B$	প্রদত্ত হেতুবাক্য
{ 2 }	2. A	অতিরিক্ত হেতুবাক্য
{ 1, 2 }	3. B	1, 2, MP

এ অবরোহী প্রমাণ সম্বন্ধে কোনো আপত্তি উঠতে পারে না। সর্বশেষ পর্বে বাম ধারের সংখ্যা থেকে বোঝা যাচ্ছে, যে যুক্তির বৈধতা দাবী করা হচ্ছে সে যুক্তিটি হল : $A \supset B$, A ∴ B*। তার মানে—অতিরিক্ত হেতুবাক্য নিয়ে যে অবরোহটি পেলাম তা, "/∴ "-এর সংকেতলিপিতে, নিম্নোক্তরূপ গ্রহণ করবে।

1. $A \supset B$
2. A /∴ B
3. B 1, 2, MP

এখন আমরা যে দুটি বিশেষ নিয়ম বা বিশেষ প্রকারের বৈধতা-প্রমাণপদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি, দেখতে পাবে, তাতে প্রদত্ত হেতুবাক্যের সঙ্গে কোনো বাক্য অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে সংযুক্ত করতে হয়।

১২. C. P. নিয়ম

যে বিশেষ নিয়মটি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি তাকে বলে Rule of Conditional Proof, সংক্ষেপে C.P. (বা CP) নিয়ম। আর এ নিয়ম প্রয়োগ করে যে প্রমাণ বা অবরোহ পাওয়া যায় তাকে বলে CP, বাংলায়—পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণ বা পূর্বকল্প প্রক্ষেপকরণ।** CP নিয়ম অনুসারে

> কোনো যুক্তির প্রদত্ত হেতুবাক্যের সঙ্গে কোনো বাক্য 'ক' যুক্ত করে যদি 'ভ' বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে এ নিষ্কাশনের জোরে দাবী করা যায় যে ঐ প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকেই 'ক ⊃ ভ' বৈধভাবে নিঃসৃত হয়।

এ নিয়মের বক্তব্য আরো বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হল। যে যুক্তির সিদ্ধান্ত প্রাকল্পিক বাক্য সে যুক্তির বৈধতা প্রমাণে এ নিয়মটি প্রযোজ্য। ধরা যাক, প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্ত হল 'ক ⊃ ভ' (আমরা 'ব' অক্ষরটি দিয়ে প্রদত্ত হেতুবাক্য বা হেতুবাক্যসমষ্টি বোঝাব)। উক্ত নিয়ম অনুসারে

> কোনো যুক্তির প্রদত্ত হেতুবাক্য 'ব'-এর সঙ্গে প্রদত্ত প্রাকল্পিক সিদ্ধান্তের "ক ⊃ ভ"-এর পূর্বকল্প ('ক') সংযুক্ত** করে এবং "ব · ক" ("ব, ক"**)

---

* লক্ষণীয়, এ অবরোহে প্রথম ছত্রের ডান ধারে "/∴ " চিহ্ন নেই।

* বা সাধ্যাঙ্গহেতুক প্রমাণ। পরে দেখতে পাব, এরূপ প্রমাণকে প্রাকল্পিকীকরণ (Conditionalization) বলেও অভিহিত করা যায়।

** হেতুবাক্যগুলির প্রত্যেকটি একটি সংযৌগিক বাক্যের অন্তর্ভুক্ত সংযোগী হলেও, অবরোহী প্রমাণে হেতুবাক্যগুলিকে পৃথক পৃথক ছত্রে লেখা হয়। "ব ক"-এর মধ্যে এজন্য কমা দেওয়া হল। এখানে 'সংযুক্ত করা' বলতে বুঝতে হবে : একটি অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে উপস্থিত করা।

থেকে 'ভ' বৈধভাবে নিষ্কাশন করে, এ নিষ্কাশনের জোরেই দাবী করা যায় যে কেবল 'ব' থেকেই "ক ⊃ ভ" বৈধভাবে নিষ্কাশনযোগ্য।

উদাহরণ ১

'$A \therefore B \supset (B \vee C)$'-এর বৈধতা প্রমাণ করতে হবে।

প্রমাণ

[ব]	1.	A	প্রদত্ত হেতুবাক্য
[ক]	2.	B	অতিরিক্ত হেতুবাক্য (প্রদত্ত সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প)
[ভ]	3.	$B \vee C$	2, Add

সুতরাং 'A' থেকে "$B \supset (B \vee C)$" নিষ্কাশনযোগ্য ; সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।
[ব] [ক ⊃ ভ]

উদাহরণ ২

'$A \vee \sim B,\ B \vee C \therefore \sim A \supset C$'—এ যুক্তিবিধির বৈধতা প্রমাণ করতে হবে।

প্রমাণ

[ব	1.	$A \vee \sim B$	প্রদত্ত হেতুবাক্য
	2.	$B \vee C$	প্রদত্ত হেতুবাক্য
[ক]	3.	$\sim A$	অতিরিক্ত হেতুবাক্য (প্রদত্ত সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প)
	4.	$\sim B$	1, 3, MTP
[ভ]	5.	C	2, 4, MTP

সুতরাং "$(A \vee \sim B) \cdot (B \vee C)$" থেকে "$\sim A \supset C$" নিষ্কাশনযোগ্য ; সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ। [ব] [ক ⊃ ভ]

CP নিয়মের ভিত্তি হল নিম্নোক্ত সূত্র ঃ

যদি "(ব · ক) ⊃ ভ" বৈধ হয় তাহলে (এবং কেবল তাহলে) অবশ্যই "ব ⊃ (ক ⊃ ভ)" বৈধ।

স্মরণীয় যে, পূর্বকল্পলাঘব (গৌরব) সূত্র (Exportation) অনুসারে "$(P \cdot A) \supset Q$" সম "$P \supset (A \supset Q)$"। আলোচ্য নিয়মের জোরে আমরা নিম্নোক্ত যুক্তির বৈধতা দাবী করতে পারি ঃ

"ব · ক ∴ ভ" বৈধ

সুতরাং "ব ∴ ক ⊃ ভ" বৈধ।

লক্ষণীয়, উপরোক্ত ছত্র দুটি দিয়ে একটি যুক্তি গঠিত হয়েছে। এ বৈধ যুক্তির গুরুত্ব হল এই ঃ ধরা যাক, আমাদের লক্ষ্য হল কোনো যুক্তির, "ব ∴ ক ⊃ ভ"-এর বৈধতা প্রমাণ করা।

এরূপ ক্ষেত্রে আমরা সরাসরি 'ব' থেকে "ক ⊃ ভ" নিষ্কাশন করার চেষ্টা না করে, একটি অতিরিক্ত হেতুবাক্য 'ক' (সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প) নিয়ে, "ব · ক" থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করে দাবী করতে পারি : "ব ∴ ক ⊃ ভ" বৈধ। এক্ষেত্রে বস্তুত "ক ⊃ ভ" নিষ্কাশন করা হল না। নিষ্কাশন করা হল কেবল 'ভ'। তবু উক্ত নিয়মের জোরে দাবী করতে পারি 'ব' থেকে "ক ⊃ ভ" নিষ্কাশনযোগ্য।

উপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে

CP নিয়ম প্রয়োগ করে কোনো যুক্তির—যার সিদ্ধান্ত "ক ⊃ ভ" আকারের বাক্য—বৈধতা প্রমাণ করতে হলে নিম্নোক্ত নির্দেশগুলি মেনে চলার দরকার।

(১) যুক্তিটির প্রদত্ত হেতুবাক্যের সঙ্গে সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প ('ক') যুক্ত করবে, মানে সিদ্ধান্তের পূর্বকল্পকে একটি অবরোহ পঙ্‌ক্তি বলে গণ্য করবে।

(২) বর্ধিত হেতুবাক্যসমষ্টি থেকে অবরোহের সাধারণ নিয়ম (যুক্তিবিধি) অনুসারে প্রদত্ত সিদ্ধান্তের অনুকল্প ('ভ') নিষ্কাশন করার চেষ্টা করবে।

যদি দেখ মূল হেতুবাক্য ('ব') আর অতিরিক্ত হেতুবাক্য 'ক'—এদের সমষ্টি থেকে 'ভ' বৈধভাবে নিঃসৃত হয়েছে, তাহলে প্রদত্ত যুক্তি "ব ∴ ক ⊃ ভ" বৈধ বলে বিবেচ্য।

উদাহরণ : যুক্তি : $G \supset F, A \vee \sim F, \sim(\sim R \cdot A) \therefore G \supset R$

প্রমাণ

[ব]	1.	$G \supset F$	
	2.	$A \vee \sim F$	
	3.	$\sim(\sim R \cdot A)$	$/ \therefore G \supset R$
[ক]	4.	G	$/ \therefore R$ CP

চতুর্থ পঙ্‌ক্তির ডানধারে "$/ \therefore R$ CP" লিখে এ প্রস্তাব করা হয়েছে যে : আমরা CP প্রয়োগ করব ; 1, 2, 3 থেকে "$G \supset R$" নিষ্কাশন না করে, 1, 2, 3, 4 থেকে 'R' নিষ্কাশন করব। এখন 'R' নিষ্কাশন করা যায় এভাবে :

	5.	F	1, 4, MP
	6.	$\sim F \vee A$	2, Com
	7.	A	6, 5, MTP, DN
	8.	$R \vee \sim A$	3, DM, DN
	9.	$\sim A \vee R$	8, Com
[ভ]	10.	R	9, 7, MTP, DN

কোনো যুক্তির সিদ্ধান্তে যদি একাধিক '⊃' থাকে তাহলে CP নিয়ম একাধিক বার—যত '⊃' আছে ততবার, প্রযোজ্য। ধরা যাক, সিদ্ধান্ত হল : ক ⊃ [খ ⊃ (গ ⊃ ঘ)]।

এক্ষেত্রে প্রদত্ত হেতুবাক্যের সঙ্গে 'ক', 'খ', 'গ' সংযুক্ত করে তিন বার CP প্রয়োগ করতে পারি।

উদাহরণ

1.	$W \supset R$	
2.	$W \vee I$	
3.	$\sim I \vee \sim B \vee C \vee L$	
4.	$\sim (T \cdot R)$	$/ \therefore T \supset [B \supset (\sim C \supset L)]$
5.	T	$/ \therefore B \supset (\sim C \supset L)$ CP
6.	B	$/ \therefore \sim C \supset L$ CP
7.	$\sim C$	$/ \therefore L$ CP (সর্বশেষ প্রস্তাব : 1—7 থেকে 'L' নিষ্কাশন করা হবে)
8.	—	
....		বাকি অংশ নিজেরা কর। 1—7 থেকে 'L' নিষ্কাশন করা কঠিন নয়।
n.	L	

CP নিয়মের সুবিধা হল এই যে এ নিয়ম প্রয়োগ করলে বৈধতা প্রমাণের কাজ অনেক সহজ হয়, প্রমাণ ক্ষুদ্রতর আকার ধারণ করে।

উদাহরণ

1.	$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$	$/ \therefore (A \vee C) \supset (B \vee D)$
2.	$A \vee C$	$/ \therefore B \vee D$ CP
3.	$B \vee D$	1, 2, CD

এ প্রমাণের সঙ্গে উক্ত যুক্তির সাধারণ প্রমাণ তুলনা করে দেখ, দেখবে শেষোক্ত প্রমাণের পঙ্‌ক্তি সংখ্যা অনেক বেশী। আর উক্ত CP প্রমাণে মাত্র তিনটি পঙ্‌ক্তি।

১৩. পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণের যৌক্তিকতা

পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণের বা CP-র যৌক্তিকতা সমর্থক যুক্তিটি নিম্নরূপ

"ব, ক ∴ ভ" বৈধ

সুতরাং "ব ∴ ক ⊃ ভ" বৈধ।

আমরা এ যুক্তির বৈধতা প্রদর্শন করতে যাচ্ছি। নির্দেশনার সুবিধার জন্য

"ব, ক ∴ ভ"—এ যুক্তিকে A_1* বলে উল্লেখ করব

"ব ∴ ক ⊃ ভ"—এ যুক্তিকে A_2* বলে উল্লেখ করব।

আমরা দেখাব, A_1 বৈধ হলে A_2 অবৈধ হতে পারে না। ধরা যাক, প্রথম যুক্তি A_1 বৈধ এবং দ্বিতীয় যুক্তি A_2 অবৈধ। এখন, A_2 অবৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি ব$=1$, এবং ক ⊃ ভ$=0$ হয়। আবার, "ক ⊃ ভ"-এর মূল্য 0 হতে পারে যদি এবং কেবল

* A_1=Argument 1, A_2=Argument 2 ; পরের পৃষ্ঠার পাদটীকাও দ্রষ্টব্য।

যদি ক=1, ভ=0 হয়। তার মানে, নিম্নোক্ত মূল্যবিন্যাসেই A_2 অবৈধ হতে পারে ঃ

A_2	ব	∴	ক	⊃	ভ
	1		1	0	0
	(১)		(৩)	(২)	(৪)

এ অঙ্গমূল্যগুলি A_1-এর আণবিক অঙ্গে আরোপ করে পাই

A_1	ব	·	ক	∴	ভ
	1	1	1		0
	(৫)	(৮)	(৬)		(৭)

স্পষ্টতই উক্ত মূল্য বিন্যাসে A_1 অবৈধ (৮ ও ৭ সংখ্যক মূল্যগুলি লক্ষ কর)। অথচ আমরা এ কল্পনা করে সুরু করেছি যে A_1 বৈধ (আর A_2 অবৈধ)। দেখা গেল A_1 বৈধ আর A_2 অবৈধ এ কল্পনা করলে স্বীকার করতে হয় যে A_1 অবৈধ। কাজেই একথা কল্পনা করা যায় না যে A_1 বৈধ আর A_2 অবৈধ ; তার মানে—A_1 বৈধ হলে A_2 অবশ্যই বৈধ। শেষোক্ত বাক্যে "কাজেই" দিয়ে যা বলা হল তা নিম্নোক্ত যুক্তিতে আরও স্পষ্ট করে বলা হয়েছে।

1.	(A_1 বৈধ · ~A_2 বৈধ) ⊃ ~A_1 বৈধ*	
2.	A_1 বৈধ ⊃ (~A_2 বৈধ ⊃ ~A_1 বৈধ)	1, Expor
3.	A_1 বৈধ ⊃ (A_1 বৈধ ⊃ A_2 বৈধ)	2, Trans
4.	(A_1 বৈধ · A_1 বৈধ) ⊃ A_2 বৈধ	3, Expor
5.	A_1 বৈধ ⊃ A_2 বৈধ	4, Idem

CP-এর যৌক্তিকতা সমর্থক যুক্তিটির দিকে আবার নজর দাও

"ব · ক ∴ ভ" বৈধ

সুতরাং "ব ∴ ক ⊃ ভ" বৈধ।

এ যুক্তিটির বৈধতা আর একভাবে দেখানো হল। বলা বাহুল্য, এর বৈধতা নির্ভর করে নিম্নোক্ত সূত্রগুলির উপর ঃ

"P ∴ Q" বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি "($P \supset Q$)" বৈধ হয়

"($P \cdot A) \supset Q$" সম "$P \supset (A \supset Q)$"

এখন নিম্নোক্ত HS-শৃঙ্খলের সাহায্যে আলোচ্য যুক্তির বৈধতা প্রদর্শন করা যায় এভাবে—

যদি "(ব · ক) ∴ ভ" বৈধ হয় তাহলে "(ব · ক) ⊃ ভ" বৈধ

যদি "(ব · ক) ⊃ ভ" বৈধ হয় তাহলে "ব ⊃ (ক ⊃ ভ)" বৈধ

যদি "ব ⊃ (ক ⊃ ভ)" বৈধ হয় তাহলে "ব ∴ (ক ⊃ ভ)" বৈধ

∴ যদি "(ব ক) ∴ ভ" বৈধ হয় তাহলে "ব ∴ (ক ⊃ ভ)" বৈধ।

A_1 বৈধ='A_1' বৈধ, সেরূপ A_2 বৈধ='A_2' বৈধ। আবার,
~A_1 বৈধ=~(A_1 বৈধ)=A_1 অবৈধ, সেরূপ
~A_2 বৈধ=~(A_2 বৈধ)=A_2 অবৈধ।

১৪. CP নিয়ম ও যুক্তিবিধি

এতক্ষণ আমরা পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণের (CP-এর) যে সব উদাহরণ দিয়েছি তাতে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয় নি, নিষ্কাশন করা হয়েছে সিদ্ধান্তের অনুকল্প। আর, কোনো নিষ্কাশিত বাক্যের পাশে ভাষ্যতে "CP" লেখা হয় নি। তার মানে CP যুক্তিবিধি বা নিষ্কাশনবিধি হিসাবে ব্যবহৃত হয় নি। "CP" কথাটি ব্যবহৃত হয়েছে কেবল প্রদত্ত সিদ্ধান্তের নিচে—অনুকল্প নিষ্কাশনের প্রস্তাব হিসাবে। কিন্তু CP নিয়মের বলে আমরা প্রদত্ত সিদ্ধান্তও নিষ্কাশন করতে পারি। এজন্য CP নিয়মটি একটু পরিবর্তন করে ব্যক্ত করার দরকার।

এ প্রসঙ্গে আমরা "→" এ সংক্ষেপক প্রতীকটি প্রয়োগ করব। প্রতীকটি কিভাবে ব্যবহার করা হবে লক্ষ কর। প্রস্তাবিত প্রয়োগ অনুসারে

"ব, ক → ভ" মানে : 'ব, ক' থেকে 'ভ' বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে,

"$P_1, P_2, \cdots, P_n \rightarrow Q$" মানে : '$P_1, P_2, \cdots P_n$' থেকে '$Q$' বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে।*

এখন CP বিধি নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করতে পারি

$$\frac{\text{ব, ক} \rightarrow \text{ভ}}{\text{ক} \supset \text{ভ}}$$

এ বিধিটি পড়তে হবে এভাবে

যদি দেখা যায় 'ব, ক' থেকে 'ভ' বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে

তাহলে পরবর্তী পংক্তি হিসাবে লেখা যাবে—'ক ⊃ ভ'।

যুক্তিবিধি হিসাবে CP প্রয়োগ করলে '/∴ ___ '-এর মধ্যে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত আর সিদ্ধান্তের নিচে '/∴ ___ CP' আকারে অনুকল্প নিষ্কাশনের প্রস্তাব লেখা হবে না। "CP" থাকবে কেবল ভাষ্যে। আর প্রদত্ত হেতুবাক্যের পাশে ভাষ্যে থাকবে 'P' ('Premiss'-এর সংক্ষেপক) ; অতিরিক্ত হেতুবাক্যের পাশে থাকবে "অতিরিক্ত হেতুবাক্য" বা "পূর্বকল্প সংযোগ"। এমন কি অতিরিক্ত হেতুবাক্যের পাশে কেবল 'P' লিখতে পার।

এখন আলোচ্য যুক্তিবিধি প্রয়োগ করে ৪১২ পৃষ্ঠার প্রমাণটির পুনর্বিন্যাস করতে পারি এভাবে—

[ব]	1.	$G \supset F$	P
	2.	$A \vee \sim F$	P
	3.	$\sim(\sim R \cdot A)$	P
[ক]	4.	G	পূর্বকল্পসংযোগ (অতিরিক্ত হেতুবাক্য)
	5.	F	1, 4, MP
	6.	$\sim F \vee A$	2, Com
	7.	A	6, 5, MTP, DN
	8.	$R \vee \sim A$	3, DM, DN
	9.	$\sim A \vee R$	8, Com
[ভ]	10.	R	9, 7, MTP, DN
	11.	$G \supset R$	

* বা : এমন একটি অবরোহ আছে যাতে '$P_1, P_2, \cdots P_n$' হেতুবাক্য-পংক্তি আর 'Q' সিদ্ধান্ত-পংক্তি।

এখানে 'ব' (1, 2, 3) আর 'ক' (G) থেকে 'ভ' (R) নিষ্কাশিত হয়েছে, সুতরাং CP বিধি অনুসারে ১১শ পর্বে লেখা হল '$G \supset R$'।

প্রশ্ন হচ্ছে, '$G \supset R$' কোন্ কোন্ বাক্য থেকে নিষ্কাশিত হল, এ বাক্যটির পাশে কী ভাষ্য লিখব ? উত্তর : কোনো এক বা একাধিক বাক্য থেকে '$G \supset R$' নিষ্কাশিত হয় নি ; হয়েছে প্রদত্ত হেতুবাক্য (1, 2, 3) ও 'G' থেকে 'R' যে নিষ্কাশিত হয়েছে—এ বৈধ নিষ্কাশন ব্যাপার থেকে। তাহলে 11-সংখ্যক পর্বের ভাষ্য এভাবে লিখতে পারি

11. $G \supset R$ 1, 2, 3, 4 $\rightarrow$ 10, CP

বা এভাবে

11. $G \supset R$ প্রদত্ত হেতুবাক্য, 4 $\rightarrow$ 10, CP

তবে সংক্ষেপকরণের জন্য অনেক সময় প্রদত্ত হেতুবাক্যের ক্রমিক সংখ্যা বা "প্রদত্ত হেতুবাক্য" কথাটি ভাষ্যে অনুক্ত রাখা হয় : কেবল যে পর্বে পূর্বকল্প অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে উপস্থাপিত করা হয় সে পর্বের ক্রম সংখ্যা (উক্ত উদাহরণে 4) উল্লেখ করে তারপর যে পর্বে অনুকল্প সিদ্ধি হয় সে পর্বের ক্রমিক সংখ্যা (উক্ত উদাহরণে 10) উল্লেখ করা হয় এবং এদের মধ্যে "$\rightarrow$" চিহ্নটি স্থাপন করা হয়। CPবিধিলব্ধ পঙ্‌ক্তির পাশে সাধারণভাবে আমরা এরকম সংক্ষিপ্ত ভাষ্যই লিখব। তবে আরও দু একটি উদাহরণে বিশদ ভাষ্যও দেওয়া হবে।

১৫. বিচ্যুতি (Discharge), বিচ্যুতিলব্ধ পঙ্‌ক্তি (Discharge line) ও পূর্বকল্পীকরণ (Conditionalization)

আমরা দেখেছি, পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণে কোনো (অতিরিক্ত) হেতুবাক্যকে, 'ক'-কে, অন্য নিষ্কাশিত বাক্যের সঙ্গে, 'ভ'-এর সঙ্গে, পূর্বকল্প হিসাবে যুক্ত করে একটি প্রাকল্পিক গঠন করা হয়। এরকম ক্ষেত্রে বলা হয় যে : 'ক'-বাক্যটি বিচ্যুত (discharged) হল, বা 'ক'-বাক্যটি একটি বিচ্যুত হেতুবাক্য। বিচ্যুত হল মানে—হেতুবাক্যের স্থান থেকে অপসারিত হয়ে সিদ্ধান্তের অঙ্গীভূত হল। আর যে হেতুবাক্য এভাবে বিচ্যুত হল না, বলা বাহুল্য, তা অবিচ্যুত হেতুবাক্য। যথা, উক্ত উদাহরণে 4 সংখ্যক বাক্যটি বিচ্যুত হেতুবাক্য, আর 1, 2, 3 অবিচ্যুত। এখন, উক্তরূপে কোনো হেতুবাক্য পঙ্‌ক্তিকে কোনো নিষ্কাশিত বাক্যের পূর্বকল্প হিসাবে যুক্ত করে একটি নতুন পঙ্‌ক্তি (প্রাকল্পিক বাক্য) গঠন করাকে বলে পূর্বকল্পীকরণ বা প্রাকল্পিকীকরণ (conditionalization), আর পূর্বকল্পীকরণ করে যে পঙ্‌ক্তি পাওয়া যায় তাকে বলে বিচ্যুতিলব্ধ পঙ্‌ক্তি (discharge line) বা পূর্বকল্পীকৃত পঙ্‌ক্তি। যথা উক্ত উদাহরণে 'G' (4)-এর পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে, আর "$G \supset R$" (11) হল বিচ্যুতিলব্ধ পঙ্‌ক্তি।

এ প্রসঙ্গে একটি সহজবোধ্য বিধান—

কেবল হেতুবাক্যেরই* পূর্বকল্পীকরণ করা যাবে, কোনো নিষ্কাশিত বাক্যের পূর্বকল্পীকরণ করা চলবে না।

যথা, উক্ত উদাহরণে 'F' (5) নিষ্কাশিত বাক্য, কাজেই 'F'-এর পূর্বকল্পীকরণ করে সিদ্ধান্ত করা যাবে না "$F \supset R$", বা "$F \supset A$"। (যথাক্রমে 10, 7 দ্রষ্টব্য।)

ধরা যাক, কোনো অবরোহে একাধিকবার CP প্রয়োগ করা হল এবং ফলে একাধিক পূর্বকল্প অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে সংযুক্ত হল। এরকম ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি অতিরিক্ত হেতুবাক্যের বিচ্যুতিকরণ ও পূর্বকল্পীকরণ প্রয়োজন। এখন কোনো পূর্বকল্পের সঙ্গে কোন্ নিষ্কাশিত পঙ্‌ক্তি যুক্ত হল এবং যথাযথভাবে বিচ্যুতিকরণ ও পূর্বকল্পীকরণ হল কিনা—এ দিকে বিশেষ নজর রাখার দরকার।

কি করে অবরোহী প্রমাণে মূল-প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যাস্তম্ভ গঠন করতে হয় তা আমরা জানি। সাধারণভাবে বৈধতা প্রমাণ করতে গিয়ে আমরা এ স্তম্ভ গঠন করব না, ঠিক। তবু পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণে এরূপ স্তম্ভ গঠনের কী সুবিধা তা দেখে নাও। নিম্নোক্ত উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

{1}	1.	$W \supset R$	P
{2}	2.	$W \vee I$	P
{3}	3.	$\sim I \vee \sim B \vee C \vee L$	P
{4}	4.	$\sim(T \cdot R)$	P
{5}	5.	T	P
{6}	6.	B	P
{7}	7.	$\sim C$	P
{4}	8.	$\sim T \vee \sim R$	4, DM
{4, 5}	9.	$\sim R$	8, 5, MTP, DN
{1, 4, 5}	10.	$\sim W$	1, 9, MT
{1, 2, 4, 5}	11.	I	2, 10, MTP
{1, 2, 4, 5, 6, 7}	12.	$I \cdot B \cdot \sim C$	11, 6, 7, Adj, Adj**
{1, 2, 4, 5, 6, 7}	13.	$\sim(\sim I \vee \sim B \vee C)$	12, DM, DN
{3}	14.	$(\sim I \vee \sim B \vee C) \vee L$	3, Assoc
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}	15.	L	14, 13, MTP
{1, 2, 3, 4, 5, 6}	16.	$\sim C \supset L$	7 → 15, CP
{1, 2, 3, 4, 5}	17.	$B \supset (\sim C \supset L)$	6 → 16, CP
{1, 2, 3, 4}	18.	$T \supset [B \supset (\sim C \supset L)]$	5 → 17, CP

15—18 পঙ্‌ক্তির বাম প্রান্তের সংখ্যাগুলি লক্ষ্য কর। দেখতে পাবে—এক একবার CP বিধি প্রয়োগ করলে একটি করে, এবং কেবল একটি করে, প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যা

* এখানে 'হেতুবাক্য' মানে—অতিরিক্ত হেতুবাক্য। পরে দেখব, কেবল অতিরিক্ত হেতুবাক্য নয়, যে কোনো প্রদত্ত হেতুবাক্যকে পূর্বকল্পীকরণ করা যায়, বিচ্যুত করা যায়।

** দুবার Adj প্রযুক্ত হয়েছে: প্রথমে '$I \cdot B$', তারপর '$I \cdot B$'-এর সঙ্গে '$\sim C$'।

অপনীত হয়, যেমন 16 পর্বে '7' বাদ গেছে, 17 পর্বে '6'। যে সংখ্যাটি কোনো পর্বে '{ }-'এর মধ্য থেকে বাদ গেল, বুঝতে হবে অব্যবহিত পরবর্তী পর্বে সে সংখ্যা নির্দেশিত বাক্যটিরই পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে ; পরবর্তী পর্বের ভাষ্য দেখলেও তা বুঝতে পারবে। আরও লক্ষণীয়, নির্ভুল পূর্বকল্পীকরণে সব সময় '{ }'-এর ভেতরকার বৃহত্তম সংখ্যাটিই বাদ যাবে। তার মানে, অবিচ্যুত হেতুবাক্যগুলির মধ্যে যেটি সর্বশেষ হেতুবাক্য প্রথমে তারই পূর্বকল্পীকরণ করতে হবে।

আমরা জানি, কেবল হেতুবাক্যেরই (প্রদত্ত বা অতিরিক্ত) পূর্বকল্পীকরণ করা যায়, নিষ্কাশিত বাক্যের বিচ্যুতিকরণ বা পূর্বকল্পীকরণ অসঙ্গত। যথা, উক্ত উদাহরণে 11-এর পূর্বকল্পীকরণ করব না, কেননা 11 নিষ্কাশিত বাক্য (পার্শ্বস্থ "{1, 2, 4, 5}" দ্রষ্টব্য।) এখন যদি (ভুল করে) 11-এর পূর্বকল্পীকরণ করা হত তাহলে 15, 16 পর্ব লিখতে হত এভাবে

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} 15. L

———————— 16. $I \supset L$ 11 → 15 CP

কিন্তু এখানে 16-এর বাম ধারের শূন্যস্থান কি দিয়ে পূর্ণ করব। পূর্ববর্তী পর্বে '{ }'-এর ভেতর '11' নেই, তাহলে কোন্ সংখ্যাটি বাদ দেব ? বাদ দিতে গিয়ে বোঝা যাবে পূর্বকল্পীকরণে ভুল আছে।

বক্র তীর ও CP

কোন্ হেতুবাক্যের সঙ্গে কোন্ নিষ্কাশিত বাক্য যুক্ত হল, কিভাবে পূর্বকল্পীকরণ করা হল ভাষ্য দেখেই তা বোঝা উচিত। কিন্তু তা বোঝাবার জন্য অনেক সময় বক্র তীর ব্যবহার করা হয়। এ রীতি অনুসারে—

যে পঙ্‌ক্তিটি বিচ্যুত হল তার ক্রমিক সংখ্যার বাম ধারে থাকবে একটা অনুভূমিক তীরের ফলামুখ,

তীরের দণ্ডটি সমকোণ করে বক্র হয়ে পরবর্তী পঙ্‌ক্তি সংখ্যার গা ঘেঁসে বরাবর নিচের দিকে নেমে আসবে,

যে নিষ্কাশিত পঙ্‌ক্তি নিয়ে ফলা-চিহ্নিত বাক্যের পূর্বকল্পীকরণ করা হবে সে পঙ্‌ক্তি পর্যন্ত নেমে আসবে তীরদণ্ডটি,

আবার সমকোণে বক্র হয়ে পঙ্‌ক্তিটির (যাকে অনুকল্প করে পূর্বকল্পীকরণ হবে) তলা দিয়ে অনুভূমিকভাবে অবরোহী বাক্য অনুক্রমের মধ্যে প্রবেশ করবে,

এ অনুভূমিক "পালক"-এর, তীরের লেজের, ঠিক নিচে থাকবে পূর্বকল্পীকরণলব্ধ পঙ্‌ক্তিটি।

এভাবে বক্র তীর ব্যবহার করে পূর্বকল্পীকরণ দেখালে ৪১৫ পৃষ্ঠার অবরোহটি যে রূপ ধারণ করবে তা পরের পৃষ্ঠায় দেখানো হল।

1.	$G \supset F$	
2.	$A \vee \sim F$	
3.	$\sim(\sim R \cdot A)$	
→4.	G	
5.	F	
6.	$\sim F \vee A$	
7.	A	
8.	$R \vee \sim A$	
9.	$\sim A \vee R$	
10.	R	
11.	$G \supset R$	4 → 10, CP

লক্ষণীয়, এরূপ বিন্যাসে তীরের অনুভূমিক লেজের ঠিক নিচে যে বাক্যটি থাকে তা অবশ্যই পূর্বকল্পীকরণলব্ধ বাক্য, এবং, বলা বাহুল্য, এরূপ বাক্যের পাশে থাকবে "CP"। তীর ব্যবহার করে অতি সহজে পূর্বকল্পীকরণ দেখানো যায়। তীর ব্যবহারের আর একটি সুবিধা : তীর ব্যবহার করলে পূর্বকল্পীকৃত বাক্যের ভাষ্যের আর বিশেষ প্রয়োজন থাকে না। তীরের ফলা ও লেজ লক্ষ করলেই বোঝা যায় কোন্ বাক্য নিয়ে কোন্ বাক্যের সঙ্গে পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে। যেমন, উপরের উদাহরণে 11-এর ভাষ্যে কেবল CP লিখলেই চলত। বা কোনো ভাষ্য না থাকলেও ক্ষতি হত না ; আলোচ্য রীতির সঙ্গে পরিচয় থাকলে জানা যেত, 4 ও 10 নিয়ে পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে।

আবার ৪১৭ পৃষ্ঠার উদাহরণটি নেওয়া যাক। এ উদাহরণে একাধিকবার CP প্রয়োগ করা হয়েছে এবং ফলে একাধিক বক্র তীর ব্যবহার করতে হয়েছে।

যুক্তি : $W \supset R,\ W \vee I,\ \sim I \vee \sim B \vee C \vee L,\ \sim(T \cdot R)$

$\therefore\ T \supset [B \supset (\sim C \supset L)]$

প্রমাণ

1.	$W \supset R$	P	
2.	$W \vee I$	P	
3.	$\sim I \vee \sim B \vee C \vee L$	P	
4.	$\sim(T \cdot R)$	P	
→5.	T	P (পূর্বকল্পসংযোগ)	
→6.	B	P (ঐ)	
→7.	$\sim C$	P (ঐ)	
8.	$\sim T \vee \sim R$	4, DM	
9.	$\sim R$	8, 5, MTP, DN	
10.	$\sim W$	1, 9, MT	
11.	I	2, 10, MTP	
12.	$I \cdot B \cdot \sim C$	11, 6, 7, Adj, Adj	
13.	$\sim(\sim I \vee \sim B \vee C)$	12, DM, DN	
14.	$(\sim I \vee \sim B \vee C) \vee L$	3, Assoc	
15.	L	14, 13, MTP	[বিশদ ভাষ্য]
16.	$\sim C \supset L$	7 → 15, CP	[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → 15, CP]
17.	$B \supset (\sim C \supset L)$	6 → 16, CP	[1, 2, 3, 4, 5, 6 → 16, CP]
18.	$T \supset [B \supset (\sim C \supset L)]$	5 → 17, CP	[1, 2, 3, 4, 5 → 17, CP]

উক্ত অবরোহে অতিরিক্ত হেতুবাক্য (সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প) মূল হেতুবাক্যের অব্যবহিত পরে পর পর উল্লেখ করা হয়েছে। কিন্তু পূর্বকল্পগুলি পর পর, বা মূল হেতুবাক্যের অব্যবহিত পরেই উল্লেখ করতে হবে—এমন কথা নেই। এদের ক্রম বজায় রেখে, আমাদের প্রয়োজন মত, অবরোহের যে কোনো পর্বে এদের একটি একটি করে উপস্থিত করতে পারি। যথা, উপরোক্ত যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ করা যেত এভাবে—

1.	$W \supset R$	P	
2.	$W \vee I$	P	
3.	$\sim I \vee \sim B \vee C \vee L$	P	
4.	$\sim(T \cdot R)$	P	
5.	$\sim T \vee \sim R$	4, DM	
6.	$T \supset \sim R$	5, Df ⊃	
7.	$\sim R \supset \sim W$	1, Trans	
8.	$T \supset \sim W$	6, 7, HS	
→9.	T	P	
10.	$\sim W$	8, 9, MP	
11.	I	2, 10, MTP	
→12.	B	P	
13.	$I \cdot B$	11, 12, Adj	
→14.	$\sim C$	P	
15.	$I \cdot B \cdot \sim C$	13, 14, Adj	
16.	$\sim(\sim I \vee \sim B \vee C)$	15, DM, DN	
17.	$(\sim I \vee \sim B \vee C) \vee L$	3, Assoc	
18.	L	17, 16, MTP	
19.	$\sim C \supset L$	14 → 18, CP	[1,2,3,4,9,12,14→18, CP]
20.	$B \supset (\sim C \supset L)$	12 → 19, CP	[1,2,3,4,9,12→19, CP]
21.	$T \supset [B \supset (\sim C \supset L)]$	9 → 20, CP	[1,2,3,4,9→20, CP]

১৬. অপ্রাকল্পিক সিদ্ধান্ত ও CP

যে যুক্তির সিদ্ধান্ত প্রাকল্পিক বাক্য এতক্ষণ আমরা কেবল সে যুক্তির ক্ষেত্রেই CP নিয়ম প্রয়োগ করেছি। কিন্তু যে যুক্তির সিদ্ধান্ত অপ্রাকল্পিক তার বৈধতা প্রমাণের জন্যও CP প্রয়োগ করা যায়। যায়, কেননা হেতুবাক্য নিয়ম (premiss rule) অনুসারে যে কোনো বাক্যকেই হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহার করা চলে। কাজেই কোনো সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করতে হলে যে কোনো বাক্যকে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নিতে পার। নিতে পার, একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ সর্তে ঃ

> অবশ্যই অতিরিক্ত হেতুবাক্যটির, বা হেতুবাক্যগুলির প্রতিটির, পূর্বকল্পীকরণ করতে হবে।

যদি কোনো একটি অতিরিক্ত হেতুবাক্যের, 'ক'-এর, পূর্বকল্পীকরণ না করেও কোনো সিদ্ধান্ত 'ভ' নিষ্কাশিত হয় তাহলে বুঝতে হবে : সিদ্ধান্তটি মূল বাক্য 'ব' থেকে নিষ্কাশিত হয় নি, হয়েছে "ব · ক" থেকে। নিম্নোক্ত অবরোহটি লক্ষ কর।

[ব] 1. $A \supset B$
[ক] 2. A
3. B 1, 2, MP
[ভ] 4. $A \cdot B$ 2, 3, Adj

এখানে সিদ্ধান্ত নিষ্কাশিত হয়েছে 1,2 থেকে; কেবল 1 থেকে নয়। কাজেই এটি

$$A \supset B, A \therefore A \cdot B$$

-এর বৈধতার প্রমাণ।

$$A \supset B \therefore A \cdot B$$

এ যুক্তির বৈধতার প্রমাণ হিসাবে এ অবরোহ ভ্রান্ত। অপরপক্ষে,

1. $A \supset B$
→2. A
3. B
4. $A \cdot B$
5. $A \supset (A \cdot B)$

এ অবরোহ অভ্রান্ত। এখানে 'A'-এর পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে। কাজেই এটি

$$A \supset B \therefore A \supset (A \cdot B)$$

-এর বৈধতার (নির্ভুল) প্রমাণ।

নিম্নোক্ত অবরোহগুলি লক্ষ কর। লক্ষণীয়, যে যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ করা হল সেগুলির সিদ্ধান্ত অপ্রাকল্পিক।

যুক্তি

$A \supset B, B \supset [(C \supset \sim\sim C) \supset D]$
$\therefore \sim(A \cdot \sim D)$

অবরোহ

1. $A \supset B$
2. $B \supset [(C \supset \sim\sim C) \supset D$
→ 3. A
4. B 1, 3, MP
5. $(C \supset \sim\sim C) \supset D$ 2, 4, MP
→ 6. C*
7. $\sim\sim C$ 6, DN
8. $C \supset \sim\sim C$ 6→7, CP
9. D 5, 8, MP
10. $A \supset D$ 3→9, CP
11. $\sim A \vee D$ 10, Df ⊃
12. $\sim(\sim\sim A \cdot \sim D)$ 11, DM
13. $\sim(A \cdot \sim D)$ 12, DN

যুক্তি

$E \supset F, G \supset H,$
$(F \vee H) \supset \{[I \supset (I \vee J)] \supset (E \cdot G)\}$
$\therefore E \equiv G$

অবরোহ

1. $E \supset F$
2. $G \supset H$
3. $(F \vee H) \supset \{[I \supset (I \vee J)] \supset (E \cdot G)\}$
→ 4. $E \vee G$
5. $(E \supset F) \cdot (G \supset H)$ 1, 2 Adj
6. $F \vee H$ 5, 4, CD
7. $[I \supset (I \vee J)] \supset (E \cdot G)$ 3,6,MP
→ 8. I*
9. $I \vee J$ 8, Add
10. $I \supset (I \vee J)$ 8→9, CP
11. $E \cdot G$ 7, 10, MP
12. $(E \vee G) \supset (E \cdot G)$ 4→11, CP
13. $\sim(E \vee G) \vee (E \cdot G)$ 12,Df ⊃
14. $(\sim E \cdot \sim G) \vee (E \cdot G)$ 13, DM
15. $(E \cdot G) \vee (\sim E \cdot \sim G)$ 14,Com
16. $E \equiv G$ 15, Df ≡

---

* এ অতিরিক্ত হেতুবাক্যটির ব্যবহার লক্ষণীয়। এর থেকে বোঝা যাবে, যে বাক্য সিদ্ধান্তের কোনো অঙ্গবাক্য নয় তাও অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহার করা যায়। আরও লক্ষণীয়, এরূপ বাক্যের সাহায্য নিয়ে স্বতসত্য নিষ্কাশন করা হয়েছে (মধ্যবর্তী অবরোহে)।

প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্ত অপ্রাকল্পিক হলেও CP নিয়ম যে প্রয়োগ করা যায় তা এভাবেও দেখাতে পারি। অনেক বাক্যের সমার্থক প্রাকল্পিক বাক্য পাওয়া যায়। এখন সিদ্ধান্ত যদি অপ্রাকল্পিক হয় তাহলে মনে মনে একে প্রাকল্পিক বাক্যে রূপান্তরিত করে প্রাকল্পিকটির পূর্বকল্পকে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নিতে পারি। উদাহরণ

1.	$(A \vee B) \supset C$	
2.	$A \cdot D$	$[\therefore C]$
→3.	$\sim C$	
4.	$\sim(A \vee B)$	1, 3, MT
5.	$\sim A \cdot \sim B$	4, DM
6.	$\sim A$	5, Simp
7.	A	2, Simp
8.	$A \vee C$	7, Add
9.	C	8, 6 MTP
10.	$\sim C \supset C$	3→9, CP
11.	$\sim\sim C \vee C$	10, Df ⊃
12.	$C \vee C$	11, DN
13.	C	12, Idem

[মনে কর, প্রদত্ত সিদ্ধান্তটি হল আসলে : $\sim C \supset C$। বলা বাহুল্য, 'C' সম '$C \vee C$' সম '$\sim\sim C \vee C$' সম '$\sim C \supset C$'।]

১৭. ক্রমিক পূর্বকল্পীকরণ

এতক্ষণ আমাদের লক্ষ্য ছিল প্রদত্ত যুক্তির (প্রাকল্পিক) সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা। এজন্য আমরা প্রাকল্পিক সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প(গুলি) নিয়েছি অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে তারপর একে (এদের) বিচ্যুত করেছি এবং পূর্বকল্পীকরণ করেছি। এর থেকে ধারণা হতে পারে যে কেবল অতিরিক্ত হেতুবাক্যই (সিদ্ধান্তের পূর্বকল্পই) বিচ্যুত হতে পারে। এ ধারণা ভুল। দেখতে পাব, যেকোনো হেতুবাক্যের বিচ্যুতিকরণ ও পূর্বকল্পীকরণ হতে পারে। ধরা যাক, প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন আমাদের লক্ষ্য নয়। ধরা যাক, আমাদের লক্ষ্য হল :

> প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকে কী কী সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা যায় তা দেখা, বা কোনো অবরোহ দেওয়া থাকলে কী কী সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়, মানে কোন্ কোন্ অতিরিক্ত অবরোহ-পঙক্তি পাওয়া যায় তা দেখা।

পূর্বকল্প লাঘবগৌরব (Exportation) সূত্রটির তাৎপর্য বুঝে থাকলে একথাও বোঝা যাবে যে

> যেকোনো হেতুবাক্যকে—প্রদত্ত হেতুবাক্য হোক কি অতিরিক্ত হেতুবাক্য হোক—বিচ্যুতিকরণ ও পূর্বকল্পীকরণ করা যায়।

আমরা জানি Expor বিধি অনুসারে

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4) \supset Q$$
$$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3) \supset (P_4 \supset Q)$$
$$P_1 \cdot P_2 \supset [P_3 \supset (P_4 \supset Q)]$$
$$P_1 \supset \{P_2 \supset [P_3 \supset (P_4 \supset Q)]\}$$

এ বাক্যগুলি সমার্থক এবং ফলে প্রথম বাক্যটি যদি বৈধ হয় তাহলে অন্য সব কয়টি বৈধ। এর থেকে বোঝা যাবে : যদি এমন হয় যে

"$P_1, P_2, P_3, P_4 \therefore Q$" বৈধ

তাহলে "$P_1, P_2, P_3 \therefore P_4 \supset Q$" বৈধ

"$P_1, P_2 \therefore P_3 \supset (P_4 \supset Q)$" বৈধ

"$P_1, \therefore P_2 \supset [P_3 \supset (P_4 \supset Q)$" বৈধ।

আর এর থেকে বোঝা যাবে, যেকোনো হেতুবাক্যকে সিদ্ধান্তের অঙ্গীভূত করা যায়।

CP যুক্তিবিধি আমরা এভাবে ব্যক্ত করেছি :

$$\frac{\text{ব} \cdot \text{ক} \rightarrow \text{ভ}}{\text{ক} \supset \text{ভ}}$$

এখানে ধরে নিয়েছি, 'ব' প্রদত্ত হেতুবাক্য আর 'ক' অতিরিক্ত হেতুবাক্য, আর CP বিধি প্রয়োগ করতে গিয়ে কেবল 'ক'-কে বিচ্যুত করেছি। CP বিধিটি নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করা আরও সুবিধাজনক।

$$\frac{\text{ব}_1, \text{ব}_2, \cdots\cdots \text{ব}_n \rightarrow \text{ভ}}{\text{ব}_n \supset \text{ভ}}$$

বলা বাহুল্য, বিধিটি পড়তে হবে এভাবে

> যদি 'ব_1, $\text{ব}_2 \cdots\cdots \text{ব}_n$' থেকে 'ভ' নিষ্কাশিত হয় তাহলে 'ব_n'-এর বিচ্যুতিকরণ বা পূর্বকল্পীকরণ করা যায় (মানে—একটি অতিরিক্ত অবরোহ-পঙক্তি হিসাবে লেখা যায় "$\text{ব}_n \supset \text{ভ}$") এবং দাবী করা যায় বাকি হেতুবাক্য ("$\text{ব}_1 \cdots \text{ব}_{n-1}$") থেকেই "$\text{ব}_n \supset \text{ভ}$" নিষ্কাশনযোগ্য।

মনে করা যাক, 'p', 'q', 'r', 's'—এ হেতুবাক্যগুলি দেওয়া আছে, এবং আমরা 7 সংখ্যক পর্বে 't' বাক্যটি নিষ্কাশন করলাম। তাহলে নিম্নোক্ত অবরোহটি* পাই :

অবরোহ ১

1. p
2. q
3. r [এটা "$p, q, r, s \therefore t$"-এর বৈধতার প্রমাণ]
4. s [এখানে ব_n-এর $n=4$]

....

7. t

উক্ত অবরোহে $n=4$ এবং ব_n হল ৪র্থ হেতুবাক্য 's'। ব_n বা 's'-এর পূর্বকল্পীকরণ করে আরও একটি অবরোহ পঙক্তি পেতে পারি।

অবরোহ ২

1. p
2. q
3. r
→4. s

7. t
৮. $s \supset t$ 1, 2, 3, 4→7, CP

[এটা "$p, q, r \therefore s \supset t$"-এর বৈধতার প্রমাণ]
[$ব_n$-এর $n=3$]

4 বিচ্যুত হওয়ার পর এখন $n=3$, এবং $ব_n$ হল 3 সংখ্যক পঙ্‌ক্তি—'r'। আবার CP বিধি প্রয়োগ করে 'r'-কে বিচ্যুত করে পাই—

অবরোহ ৩

1. p
2. q
→3. r

8. $s \supset t$
9. $r \supset (s \supset t)$ 1, 2, 3→8, CP

[এটা "$p, q \therefore r \supset (s \supset t)$"-এর বৈধতার প্রমাণ]
[$ব_n$-এর $n=2$]

3 বিচ্যুত হওয়ার পর এখন $n=2$, কাজেই $ব_n$ বা ২য় হেতুবাক্য 'q'-কে বিচ্যুত করে নিম্নোক্তরূপে আরও একটি অবরোহ পঙ্‌ক্তি পেতে পারি।

অবরোহ ৪

1. p
→2. q

9. $r \supset (s \supset t)$
10. $q \supset [r \supset (s \supset t)$ 1, 2→9, CP

[এটা "$p \therefore q \supset [r \supset (s \supset t)]$"-এর বৈধতার প্রমাণ]
[এখানে $ব_n$-এর $n=1$]

এ (অসম্পূর্ণ) অবরোহগুলিকে একত্রিত করে, একটির উপর অন্যটি স্থাপিত করে, পাই :

1. p
→2. q
→3. r
→4. s
....
7. t
8. $s \supset t$ 1, 2, 3, 4→7, CP [1—8 : $p, q, r \therefore s \supset t$-এর বৈধতার প্রমাণ]
9. $r \supset (s \supset t)$ 1,2,3→8, CP [1—9 : $p, q \therefore r \supset (s \supset t)$-এর বৈধতার প্রমাণ]
10. $q \supset [r \supset (s \supset t)]$ 1, 2→9, CP [1—10 : $p \therefore q \supset [r \supset (s \supset t)]$-এর বৈধতার প্রমাণ]

লক্ষণীয়, এ অবরোহে একটি মাত্র (অবিচ্যুত) হেতুবাক্য—ব$_n$-এর $n=1$; অন্য সব হেতুবাক্যের পূর্বকল্পীকরণ করা হয়েছে। এখন এ অবিচ্যুত হেতুবাক্যের পূর্বকল্পীকরণ কি সম্ভব নয় ? যদি 1-কেও পূর্বকল্পীকরণ করা হত তাহলে অবরোহটি* নিম্নোক্ত আকার পরিগ্রহ করত :

→1. p
→2. q
→3. r
→4. s
....
7. t
8. $s \supset t$
9. $r \supset (s \supset t)$
10. $q \supset [r \supset (s \supset t)]$
11. $p \supset \{q \supset [r \supset (s \supset t)]\}$ 1→10, CP

[1—11 : কোন্ যুক্তির বৈধতার প্রমাণ ?**]

বক্র তীরের বদলে প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যাস্তম্ভ রচনা করলে অবরোহটি নিম্নোক্ত আকার ধারণ করত :

{ 1 } 1. p
{ 2 } 2. q
{ 3 } 3. r
{ 4 } 4. s
....
{ 1, 2, 3, 4 } 7. t
{ 1, 2, 3 } 8. $s \supset t$ 4→7, CP
{ 1, 2 } 9. $r \supset (s \supset t)$ 3→8, CP
{ 1 } 10. $q \supset [r \supset (s \supset t)]$ 2→9, CP
{ } 11. $p \supset \{q \supset [r \supset (s \supset t)]\}$ 1→10, CP

[11-এর '{ }'-এর মধ্যে কোন্ সংখ্যা থাকবে ?]

প্রশ্ন ওঠে, উক্ত অবরোহের সর্বশেষ পঙ্‌ক্তি কোন্ হেতুবাক্য থেকে নিষ্কাশিত হয়েছে ? এ অবরোহের হেতুবাক্য কোথায় ? (লক্ষণীয়, সব হেতুবাক্য বিচ্যুত হয়ে নিষ্কাশিত বাক্যের অঙ্গীভূত হয়ে গেছে।) এটা কোন্ যুক্তির বৈধতার প্রমাণ ?

এ প্রশ্নগুলির উত্তরে বলা যায় : উক্ত অবরোহটি একটি "হেতুবাক্যহীন অবরোহ"।

---

* এটি অবরোহ নয়, অবরোহের ছক। 'p', 'q'-এর পরিবর্তে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি বসালে একটি অবরোহ পাবে : $p=A$, $q=A \supset B$, $r=B \supset C$, $s=C \supset D$, $t=D$ ।

** 1—10—এ অংশের বেলায় বলা যায় : 1—10 বাক্য-অনুক্রমটি "$p \therefore q \supset [r \supset (s \supset t)]$" এ যুক্তির বৈধতার প্রমাণ। কিন্তু 11 পর্বে 'p'-এর পূর্বকল্পীকরণ হয়েছে। যেহেতু এ পর্বে কোনো হেতুবাক্য অবিচ্যুত নেই, এজন্য বলা যাবে না : অমুক হেতুবাক্য থেকে '$p \supset \{q \supset [r \supset (s \supset t)]\}$'—এ বাক্যটি নিষ্কাশিত হয়েছে।

এখুনি দেখতে পাব যে এরূপ হেতুবাক্যহীন অবরোহের সর্বশেষ বাক্যটি স্বতসত্য। দেখতে পাব ঃ

> যে (বৈধ) অবরোহে কোনো অবিচ্যুত হেতুবাক্য নেই সে অবরোহের সর্বশেষ পঙ্‌ক্তি স্বতসত্য।

দেখতে পাব ঃ

> যদি কোনো পঙ্‌ক্তির পার্শ্বস্থ '{ }'-এর মধ্যবর্তী স্থান শূন্য থাকে (যদি প্রতিপাদক নির্দেশকস্তম্ভ গঠন করা হয়) তাহলে সে পঙ্‌ক্তি স্বতসত্য।

নিচে উক্ত বাক্য দুটির যাথার্থ্য দেখানো হল।

১৮. হেতুবাক্যহীন অবরোহ ঃ সামগ্রিক বিচ্যুতি ও বাক্যের স্বতসত্যতা প্রমাণ

আবার CP যুক্তিবিধিটির দিকে নজর দেওয়া যাক।

$$\frac{\text{ব}_১ \cdots \text{ব}_n \rightarrow \text{ভ}}{\text{ব}_n \supset \text{ভ}}$$

সাধারণভাবে (আমরা ধরে নিই যে ঃ) এখানে ব_n-এর n হল ২ বা তার চেয়ে বড় কোনো সংখ্যা, মানে—যে অবরোহে CP বিধি প্রযোজ্য তাতে অন্তত দুটি হেতুবাক্য থাকবে। এখন, ধরা যাক, $n=1$, মানে কোনো অবরোহের একটি মাত্র হেতুবাক্য। তাহলে CP বিধি অনুসারে সে একক হেতুবাক্যেরও বিচ্যুতিকরণ বা পূর্বকল্পীকরণ করা যাবে। মানে, এরকম ক্ষেত্রে বলা যাবে

$$\frac{\text{ব}_১ \rightarrow \text{ভ}}{\text{ব}_১ \supset \text{ভ}}$$

কেননা ঃ আমরা জানি, কোনো বাক্য '$\text{ব}_১$' থেকে যদি কোনো বাক্য 'ভ' নিষ্কাশন করা যায়

তাহলে "$\text{ব}_১ \therefore \text{ভ}$" বৈধ

আর যদি "$\text{ব}_১ \therefore \text{ভ}$" বৈধ হয়

তাহলে "$\text{ব}_১ \supset \text{ভ}$" বৈধ বা স্বতসত্য।

কাজেই, '$\text{ব}_১$' থেকে 'ভ' নিষ্কাশিত হলে, '$\text{ব}_১$'-এর পূর্বকল্পীকরণ করে যে বাক্য পাব তা হবে স্বতসত্য।

উদাহরণ

→1.	$A \supset B$	P	[$\text{ব}_১$]
2.	$\sim B \supset \sim A$	1, Trans	[ভ]
3.	$(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	1→2, CP	

কোনো অবিচ্যুত হেতুবাক্য নেই, সুতরাং 3 সংখ্যক বাক্যটি স্বতসত্য।

{ 1 }	1.	$A \cdot B$	P	[$\text{ব}_১$]
{ 1 }	2.	A	1, Simp	[ভ]
{ }	3.	$(A \cdot B) \supset A$	1→2, CP	

অবিচ্যুত হেতুবাক্য নেই (লক্ষ কর, 3-এর পার্শ্বস্থ '{ }'-এর মধ্যে কোনো সংখ্যা নেই) সুতরাং 3 স্বতসত্য।

কোনো হেতুবাক্য 'ব' থেকে 'ভ' নিষ্কাশিত হলে কেবল একথাই প্রমাণিত হয় না যে "ব ∴ ভ" বৈধ, একথাও প্রমাণিত হয় যে "ব ⊃ ভ" বৈধ বা স্বতসত্য। কাজেই যে পদ্ধতিতে যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায় ঠিক সে পদ্ধতিতেই প্রাকল্পিক বাক্যের স্বতসত্যতা, মানে প্রতিপত্তি, প্রমাণ করা যায়। প্রমাণ করা যায়—প্রদত্ত প্রাকল্পিকের অনুকল্প নিষ্কাশন করে।

এখন দেখা গেল, CP বিধি প্রয়োগ করে আমরা কেবল প্রদত্ত অনুকল্প নয়, প্রদত্ত প্রাকল্পিক বাক্যটিও নিষ্কাশন করতে পারি। এরকম ক্ষেত্রে প্রাকল্পিকের বৈধতা প্রমাণ "হেতুবাক্যহীন অবরোহ"-এর আকার ধারণ করে।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ করতে হবে

$$[(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r)] \supset (q \vee s)$$

এ বাক্যটি স্বতসত্য।

প্রমাণ

→1.	$(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r)$	P
2.	$p \supset q$	1, Simp
3.	$\sim q \supset \sim p$	2, Trans
4.	$(p \vee r) \cdot (p \supset q) \cdot (r \supset s)$	1, Com
5.	$p \vee r$	4, Simp
6.	$\sim p \supset r$	5, Df ⊃, DN
7.	$\sim q \supset r$	3, 6, HS
8.	$(r \supset s) \cdot (p \supset q) \cdot (p \vee r)$	1, Com
9.	$r \supset s$	8, Simp
10.	$\sim q \supset s$	7, 9, HS
11.	$q \vee s$	10, Df ⊃, DN
12.	$[(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r)] \supset (q \vee s)$	1 → 11, CP

এ অবরোহের সর্বশেষ পঙ্‌ক্তিটি স্বতসত্য, কেননা এতে কোনো অবিচ্যুত হেতুবাক্য নেই।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ করতে হবে যে

$$[(A \vee B) \supset C] \supset [(D \supset A) \supset (D \supset C)]$$

এ বাক্যটি স্বতসত্য।

প্রমাণ

→1.	$(A \vee B) \supset C$	P
→2.	$D \supset A$	P
→3.	D	P
4.	A	2, 3, MP
5.	$A \vee B$	4, Add
6.	C	1, 5, MP
7.	$D \supset C$	1, 2, 3 → 6, CP
8.	$(D \supset A) \supset (D \supset C)$	1, 2 → 7, CP
9.	$[(A \vee B) \supset C] \supset [(D \supset A) \supset (D \supset C)]$	1 → 8, CP

এ অবরোহে প্রত্যেকটি হেতুবাক্য পূর্বকল্পীকৃত হয়েছে, সুতরাং সর্বশেষ বাক্যটি স্বতসত্য।

১৯. I. P. নিয়ম

এ বিভাগে অবরোহের আর একটি বিশেষ নিয়ম আলোচনা করতে যাচ্ছি। এ নিয়মটির নাম বিরুদ্ধ অসিদ্ধি নিয়ম, পরোক্ষ প্রমাণের নিয়ম, Rule of Indirect Proof বা, সংক্ষেপে—I.P. (বা IP) নিয়ম। এ নিয়ম প্রয়োগ করে যে প্রমাণ পাওয়া যায় তাকে বলে পরোক্ষ প্রমাণ বা IP।

পরোক্ষ সত্যসারণী প্রসঙ্গে আমরা বিরুদ্ধ অসিদ্ধি আলোচনা করেছি (২০০ পৃঃ দ্রষ্টব্য) ; আবার সত্যশাখী প্রসঙ্গেও। বস্তুত সত্যশাখী পদ্ধতি বিরুদ্ধ অসিদ্ধির উপরই প্রতিষ্ঠিত। তবু এ বিভাগের আলোচনা স্বয়ংসম্পূর্ণ করার জন্য আগে যা বলা হয়েছে তার কিছু পুনরাবৃত্তি করা হল।

আমরা জানি—

"$P \supset Q$" যদি সত্য হয় এবং 'Q' মিথ্যা হয় তাহলে 'P' অবশ্যই মিথ্যা

সুতরাং বলতে পারি ঃ

"$P \supset Q$" যদি স্বতসত্য হয় এবং 'Q' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে 'P' অবশ্যই স্বতমিথ্যা

বা 'P' যদি 'Q'-এর প্রতিপাদক হয় এবং 'Q' স্বতমিথ্যা হয়
তাহলে 'P' অবশ্যই স্বতমিথ্যা

বা 'P' থেকে যদি 'Q' বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয় এবং 'Q' স্বতমিথ্যা হয় তাহলে……

অথবা বলতে পারি—

কোনো বাক্য থেকে যদি কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয় তাহলে মূল বাক্যটি স্বতমিথ্যা।

আমরা আরও জানি,

স্বতমিথ্যা বাক্যের বিরুদ্ধ বাক্য স্বতসত্য ;

আরও জানি,

"~(ব · ~ভ)" equiv "ব ⊃ ভ"।

এবার IP নিয়ম। IP নিয়ম অনুসারে

যদি কোনো যুক্তির ("ব .. ভ"-এর) হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ-এর সংযোগ ("ব · ~ভ") স্বতমিথ্যা হয় তাহলে যুক্তিটি বৈধ।

এ নিয়মের যৌক্তিকতা দেখাতে পারি এভাবে—

যদি "ব · ~ভ" স্বতমিথ্যা হয় তাহলে "~(ব · ~ভ)" স্বতসত্য
যদি "~(ব · ~ভ)" স্বতসত্য হয় তাহলে (এর সমার্থক) "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য
যদি "ব ⊃ ভ" স্বতসত্য হয় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ
∴ যদি "ব · ~ভ" স্বতমিথ্যা হয় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ।

এখন, যে বাক্য থেকে স্বতমিথ্যা নিষ্কাশন করা যায় সে বাক্য স্বতমিথ্যা, কাজেই কোনো বাক্য যে স্বতমিথ্যা তা প্রতিপন্ন করার সহজ উপায় হল—বাক্যটি থেকে কোনো প্রকট স্বতমিথ্যা

('$A \cdot \sim A$', '$B \cdot \sim B$' ইত্যাদি আকারের বাক্য) নিষ্কাশন করা। তাহলে উক্ত যুক্তিটির সিদ্ধান্ত এভাবে লিখতে পারি :

$\therefore$ যদি "ব · ~ভ" থেকে কোনো স্বতমিথ্যা নিষ্কাশন করা যায় তাহলে "ব $\therefore$ ভ" বৈধ।

এখন, IP নিয়মটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

যদি "ব · ~ভ" থেকে কোনো (প্রকট) স্বতমিথ্যা নিষ্কাশন করা হয় তাহলে "ব $\therefore$ ভ" বৈধ বলে গণ্য।

বা এভাবে

যদি কোনো যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ দিয়ে গঠিত সংযৌগিক থেকে কোনো স্বতমিথ্যা নিষ্কাশন করা হয়, তাহলে প্রমাণিত হয় যে যুক্তিটি বৈধ বলে গণ্য।

বলা বাহুল্য, IP নিয়ম প্রয়োগ করতে হলে

(১) প্রদত্ত সিদ্ধান্তের নিষেধকে একটি অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে গণ্য করতে হবে,

(২) বর্ধিত হেতুবাক্যসমষ্টি থেকে অবরোহের সাধারণ নিয়ম অনুসারে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য নিষ্কাশন করতে হবে।

উদাহরণ :

I

{ 1 }	1.	$S \vee T \vee \sim C$	
{ 2 }	2.	$F \supset C$	
{ 3 }	3.	$\sim T \vee \sim C$	
{ 4 }	4.	F	$/ \therefore S$
{ 5 }	5.	$\sim S$	অতিরিক্ত হেতুবাক্য, IP
{ 2, 4 }	6.	C	2, 4 MP
{ 3 }	7.	$\sim C \vee \sim T$	3, Com
{ 2, 3, 4 }	8.	$\sim T$	7, 6 MTP, DN
{ 1 }	9.	$S \vee (T \vee \sim C)$	1, Assoc
{ 1, 5 }	10.	$T \vee \sim C$	9, 5, MTP
{ 1, 2, 3, 4, 5 }	11.	$\sim C$	10, 8, MTP
{ 1, 2, 3, 4, 5 }	12.	$C \cdot \sim C$	6, 11, Adj

সর্বশেষ পঙ্‌ক্তিটি স্বতমিথ্যা, সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

উক্তরূপ অবরোহী প্রমাণে কোনো না কোনো স্বতমিথ্যা বা স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করা হয়, এবং স্ববিরোধী নিষ্কাশিত হলেই প্রমাণটি সমাপ্ত হয়েছে বলে ধরে নেওয়া হয়। কোন্ স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশিত হল তা গৌণ, যে কোনো স্ববিরোধী নিষ্কাশন করলেই চলে (স্মরণীয়, সব স্বতমিথ্যা বাক্য পরস্পর সমার্থক)। পরের পৃষ্ঠার অবরোহগুলি লক্ষ করলে দেখবে একই যুক্তির (পূর্বোক্ত যুক্তির) পরোক্ষ প্রমাণ করা হয়েছে ভিন্ন ভিন্ন স্বতমিথ্যা অবরোহণ করে।

II

1.	$S \vee T \vee \sim C$	
2.	$F \supset C$	
3.	$\sim T \vee \sim C$	
4.	F	$/ \therefore S$
5.	$\sim S$	IP
6.	C	2, 4, MP
7.	$\sim C \vee \sim T$	3, Com
8.	$\sim T$	3, 7, MTP, DN
9.	$\sim T \cdot C$	8, 6, Adj
10.	$\sim(T \vee \sim C)$	9, DM, DM
11.	$S \vee (T \vee \sim C)$	1, Assoc
12.	$(T \vee \sim C) \vee S$	11, Com
13.	S	12, 10, MTP
14.	$S \cdot \sim S$	13, 5, Adj

III

1.	$S \vee T \vee \sim C$	
2.	$F \supset C$	
3.	$\sim T \vee \sim C$	
4.	F	$/ \therefore S$
5.	$\sim S$	IP
6.	$S \vee (T \vee \sim C)$	1, Assoc
7.	$T \vee \sim C$	6, 5, MTP
8.	$\sim C \vee \sim T$	7, Com
9.	C	2, 4, MP
10.	T	8, 9 MTP, DN
11.	$\sim C \vee \sim T$	3, Com
12.	$\sim T$	11, 9, MTP, DN
13.	$T \cdot \sim T$	10, 12, Adj

IV

1.	$S \vee T \vee \sim C$	
2.	$F \supset C$	
3.	$\sim T \vee \sim C$	
4.	F	$/ \therefore S$
5.	$\sim S$	IP
6.	$S \vee (T \vee \sim C)$	1, Assoc
7.	$T \vee \sim C$	6, 5, MTP
8.	$\sim C \vee T$	7, Com
9.	$C \supset T$	8, Df $\supset$
10.	$T \supset \sim C$	3, Df $\supset$
11.	$C \supset \sim C$	9, 10, HS
12.	$\sim C \vee \sim C$	11, Df $\supset$, DN
13.	$\sim C$	12, Idem
14.	$\sim F$	2, 13, MT
15.	$F \cdot \sim F$	4, 14, Adj

সাধারণ অবরোহী প্রমাণ ও পরোক্ষ প্রমাণের পার্থক্য লক্ষণীয়। সাধারণ প্রমাণে প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্ত অবরোহণ করা হয়, কিন্তু পরোক্ষ প্রমাণে অবরোহিত হয় কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য। পরোক্ষ প্রমাণে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত ত অবরোহিত হয় না। তাহলে একে অবরোহী প্রমাণ বলব কেন? উত্তর : দেখানো যাবে যে, পরোক্ষ প্রমাণেও প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা যায়। আমরা জানি

> যদি কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের পূর্বকল্প স্বতমিথ্যা হয় তাহলে প্রাকল্পিকটি বৈধ, মানে—যে প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প স্বতমিথ্যা তার পূর্বকল্প অনুকল্পকে প্রতিপাদন করে।

এ কথাটা এভাবেও বলতে পারি

যে কোনো স্বতমিথ্যা বাক্য থেকে যে কোনো বাক্য বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়।

উদাহরণ : উপরোক্ত IV-এর 1—14-এর মধ্যে আমরা পেয়েছি 'F', আর '$\sim F$'। এখন আমরা এভাবে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত 'S' নিষ্কাশন করতে পারি :

....

১৫.	$F \vee S$	4, Add
১৬.	S	১৫, 14, MTP

বা এভাবে

....

১৫′.	$\sim F \vee S$	14, Add
১৬′.	S	১৫′, 4, MTP, DN

লক্ষণীয় যে, 'S' কেবল 'F' বা '$\sim F$' থেকে নিঃসৃত হতে পারে না। 'S' নিষ্কাশনের জন্য 'F'ও দরকার আবার '$\sim F$'ও দরকার। কেননা 'F' থেকে '$F \vee S$' পাওয়া যায় ঠিক, কিন্তু এর থেকে MTP প্রয়োগ করে 'S' পেতে হলে '$\sim F$' দরকার। আবার '$\sim F$' থেকে '$\sim F \vee S$' পাই ঠিক, কিন্তু এর থেকে 'S' নিষ্কাশন করতে হলে 'F' প্রয়োজন। সাধারণভাবে বলতে পারি : কোনো বাক্য ও তার নিষেধ দেওয়া থাকলে Add ও MT-এর সাহায্যে যে কোনো সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা যায়। যথা, IV-এর 14 সংখ্যক পর্বে পৌঁছানোর পর আমরা 'A', 'B', 'D' ইত্যাদি যে কোনো বাক্যও (যা হেতুবাক্যে অনুপস্থিত তাও) নিষ্কাশন করতে পারি। পারি এভাবে—

1.	$S \vee T \vee \sim C$	
2.	$F \supset C$	
3.	$\sim T \vee \sim C$	
4.	F	
	.. ..	
14.	$\sim F$	
15.	$F \vee A$	4, Add
16.	A	15, 14, MTP

৪২৯ পৃষ্ঠায় IP নিয়ম এভাবে ব্যক্ত হয়েছে :

> যদি "ব · ~ভ" থেকে কোনো স্বতমিথ্যা (স্ববিরোধী) নিষ্কাশন করা যায় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ বলে গণ্য।

উপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে যে IP নিয়ম এভাবেও ব্যক্ত করতে পারি :

> যদি কোনো যুক্তির ('ব ∴ ভ'-এর) হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের-নিষেধ যুক্ত করে তার থেকে ('ব · ~ভ' থেকে) কোনো স্বতমিথ্যা নিষ্কাশন করা যায় তাহলে প্রদত্ত সিদ্ধান্তও নিষ্কাশনযোগ্য (এবং এ নিষ্কাশন থেকে প্রমাণিত হয় যে 'ব ∴ ভ' বৈধ)।

পরোক্ষ প্রমাণের যৌক্তিকতা সমর্থক যুক্তিটি এই :

"ব · ~ভ ∴ ভ" বৈধ

∴ "ব ∴ ভ" বৈধ

কেন ? "ব · ~ভ ∴ ভ" বৈধ হলে "ব ∴ ভ" বৈধ হবে কেন ?

উত্তর : স্মরণীয় যে

"(ব · ~ভ) ⊃ ভ" equiv "ব ⊃ (~ভ ⊃ ভ)" equiv "ব ⊃ (ভ v ভ)" equiv "ব ⊃ ভ"

এখন,

যদি "ব · ~ভ ∴ ভ" বৈধ হয় তাহলে "(ব · ~ভ) ⊃ ভ" বৈধ, এবং
যদি "(ব · ~ভ) ⊃ ভ" বৈধ হয়, তাহলে "ব ⊃ ভ" বৈধ, এবং
যদি "ব ⊃ ভ" বৈধ হয় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ ;
∴ যদি "ব · ~ভ ∴ ভ" বৈধ হয় তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ।

কাজেই কোনো প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্য 'ব' থেকে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত 'ভ' সরাসরি নিষ্কাশন না করে আমরা "ব · ~ভ" থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করার চেষ্টা করতে পারি। এবং যদি বস্তুত "ব · ~ভ" থেকে 'ভ' নিষ্কাশন করতে পারি তাহলে দাবী করতে পারি কেবল 'ব' থেকেই 'ভ' নিষ্কাশনযোগ্য, সুতরাং "ব ∴ ভ" বৈধ।

২০. স্ববিরোধিতা নিষ্কাশনের গুরুত্ব

যদি দুই বা ততোধিক বাক্যের মধ্যে এমন সম্পর্ক থাকে যে এরা যুগপৎ সত্য হতে পারে না, তাহলে বলা হয় : এদের মধ্যে অসঙ্গতি বা স্ববিরোধিতা আছে। ধরা যাক, '$ব_১$', '$ব_২$', '$ব_৩$' যুগপৎ সত্য হতে পারে না, তাহলে এদের মধ্যে, বা "$ব_১ \cdot ব_২ \cdot ব_৩$"—এ সংযৌগিকের মধ্যে, স্ববিরোধিতা আছে, বা "$ব_১ \cdot ব_২ \cdot ব_৩$" স্বতমিথ্যা। এখন,

যে যুক্তির হেতুবাক্যের মধ্যে অসঙ্গতি আছে তার বৈধতা (হেতুবাক্য স্বতমিথ্যা বলে এরূপ যুক্তি অবশ্যই বৈধ) প্রমাণ করা যায় কোনো স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করে (এবং তার থেকে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করে)।

অপরপক্ষে, যে যুক্তির প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকে স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করা যায় সে যুক্তির হেতুবাক্যের মধ্যে স্ববিরোধিতা লুক্কায়িত আছে বলে বুঝতে হবে।

উদাহরণ :

1.	$A \supset B$	
2.	$A \cdot \sim B$	$/ \therefore C$
3.	A	2, Simp
4.	B	1, 3, MP
5.	$\sim B \cdot A$	2, Com
6.	$\sim B$	5, Simp
7.	$B \cdot \sim B$	4, 6, Adj

লক্ষণীয়, এটা পরোক্ষ প্রমাণ (IP) নয় (সাধারণ অবরোহী প্রমাণ ; এতে সিদ্ধান্তের নিষেধ অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহৃত হয় নি)।

স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশিত হয়েছে, সুতরাং প্রদত্ত হেতুবাক্য স্ববিরোধী ; সুতরাং প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ। এ স্ববিরোধিতা থেকে আমরা ইচ্ছা করলে প্রদত্ত সিদ্ধান্তও নিম্নোক্তরূপে নিষ্কাশন করতে পারি।

8. $B \vee C$ 4, Add
9. C 8, 6, MTP

২১. হেতুবাক্যের স্ববিরোধিতা প্রমাণ

মনে করা যাক, প্রদত্ত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ আমাদের লক্ষ্য নয় ; আমাদের লক্ষ্য প্রদত্ত হেতুবাক্যের মধ্যে বা কোনো বাক্যসমষ্টির মধ্যে স্ববিরোধিতা যে আছে তা প্রমাণ করা। এ কথা সহজবোধ্য যে উক্তরূপ অবরোহী পদ্ধতিতে যদি প্রদত্ত বাক্য (সমষ্টি) বা হেতুবাক্য (সমষ্টি) থেকে কোনো স্ববিরোধী বাক্য নিষ্কাশিত হয় তাহলে প্রমাণিত হয় যে ঐ বাক্য বা হেতুবাক্য সমষ্টির মধ্যে স্ববিরোধিতা আছে। অসম্ভবতার নিয়ম* (Law of Absurdity) অনুসারে "(ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$) ⊃ (ক · ~ক)" equiv "~(ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$)"। তাহলে যদি "ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$" থেকে "ক · ~ক" নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে প্রমাণিত হয় যে "(ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$) ⊃ (ক · ~ক)" স্বতসত্য। বলতে পারি : সুতরাং সমার্থক "~(ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$)" স্বতসত্য, সুতরাং "ব$_১$ · ব$_২$ ··· · ব$_n$" স্বতমিথ্যা বা স্ববিরোধী।

উদাহরণ : $A \supset B, C \supset D, A \vee C, \sim B \cdot \sim D$ —এদের স্ববিরোধিতা প্রমাণ

1. $A \supset B$
2. $C \supset D$
3. $A \vee C$
4. $\sim B \cdot \sim D$
5. $\sim B$ 4, Simp
6. $\sim A$ 1, 5, MT
7. C 3, 6, MTP
8. D 2, 7, MP
9. $\sim D \cdot \sim B$ 4, Com
10. $\sim D$ 9, Simp
11. $D \cdot \sim D$ 8, 10, Adj

স্ববিরোধিতা নিষ্কাশিত হয়েছে, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যগুলির মধ্যে স্ববিরোধিতা লুক্কায়িত আছে।

২২. IP-এর প্রয়োজন
IP ও বাক্যের বৈধতা প্রমাণ

নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি লক্ষ কর :

$A \therefore B \vee \sim B$ $A \therefore B \vee (B \supset C)$

যুক্তিগুলি বৈধ (লক্ষণীয় এদের সিদ্ধান্ত স্বতসত্য)। কিন্তু যে ১৯টি যুক্তিবিধি প্রয়োগ

* ২২৪ পৃঃ দ্রষ্টব্য। এ নিয়মকে তর্কনিয়ম বলেও অভিহিত করা যায়।

করব বলে সাব্যস্ত করেছি কেবল সেগুলি দিয়ে এদের বৈধতা প্রমাণ করা যায় না। এদের বৈধতা প্রমাণের জন্য IP নিয়ম প্রয়োগ করা দরকার।* নিচে এদের পরোক্ষ প্রমাণ (IP) দিয়ে দেওয়া হল।

১

1.	A	$/\therefore B \vee \sim B$
2.	$\sim(B \vee \sim B)$	IP
3.	$\sim B \cdot B$	2, DM, DN
4.	$\sim B$	3, Simp
5.	$\sim B \vee B$	4, Add
6.	$B \vee \sim B$	5, Com

২

1.	A	$/\therefore B \vee (B \supset C)$
2.	$\sim[B \vee (B \supset C)]$	IP
3.	$\sim B \cdot \sim(B \supset C)$	2, DM
4.	$\sim B \cdot \sim(\sim B \vee C)$	3, Df $\supset$
5.	$\sim B \cdot B \cdot \sim C$	4, DM, DN
6.	$B \cdot \sim B \cdot \sim C$	5, Com
7.	$B \cdot (\sim B \cdot \sim C)$	6, Assoc
8.	B	7, Simp
9.	$B \vee \sim B$	8, Add
10.	$(B \vee \sim B) \vee C$	9, Add
11.	$B \vee (\sim B \vee C)$	10, Assoc
12.	$B \vee (B \supset C)$	11, Df $\supset$

লক্ষণীয় যে উক্ত বৈধতা প্রমাণে প্রদত্ত হেতুবাক্য 'A' ব্যবহার করা হয় নি। এ রকম ক্ষেত্রে হেতুবাক্যের সাহায্য নেবার প্রয়োজন হয় না। কেননা এ যুক্তিগুলির সিদ্ধান্ত স্বতসত্য ; আর, কোনো বাক্য স্বতসত্য—এ কথার মানে বাক্যটির সত্যতা অন্য কোনো বাক্যের (হেতুবাক্যের) উপর নির্ভর করে না।

আমরা দেখেছি, CP প্রয়োগ করে বাক্যের বৈধতা (কেবল যুক্তির নয়, বাক্যেরও) প্রমাণ করা যায়। উক্ত পরোক্ষ প্রমাণ দুটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে IP নিয়ম প্রয়োগ করেও সহজেই বাক্যের বৈধতা প্রমাণ করা যায়। এ উদ্দেশ্যে আলোচ্য নিয়ম প্রয়োগ করতে হলে

> প্রদত্ত বাক্যের নিষেধকে "হেতুবাক্য" করে নিয়ে তার থেকে কোনো স্বাবিরোধী বাক্য নিষ্কাশন করতে হয়,

এবং বলা বাহুল্য, স্ববিরোধী বাক্য থেকে যে কোনো বাক্য, সুতরাং প্রদত্ত বাক্যটি, নিষ্কাশন করা যায়।

উদাহরণ : উপরোক্ত অবরোহ দুটির প্রথম ছত্র বাদ দিয়ে লিখলে

(১′) $B \vee \sim B$ (২′) $B \vee (B \supset C)$

-এর বৈধতা প্রমাণ পাওয়া যাবে। যথা (১′)-এর বৈধতা প্রমাণ নিম্নোক্ত রূপ ধারণ করবে :

প্রদত্ত বাক্য : $B \vee \sim B$

বৈধতা প্রমাণ

1.	$\sim(B \vee \sim B)$	IP
2.	$\sim B \cdot B$	1, DM, DN
3.	$\sim B$	2, Simp
4.	$\sim B \vee B$	3, Add
5.	$B \vee \sim B$	4, Com

* তবে CP প্রয়োগ করেও এদের বৈধতা প্রমাণ করা যায়।

২৩. IP ও CP-এর সম্বন্ধ

আমরা দেখেছি যে

যদি "ব · ~ভ ∴ ভ" বৈধ হয়
তাহলে "ব ∴ ভ" বৈধ

এখন,

"ব · ~ভ ∴ ভ"-এর বৈধতা প্রমাণ হল "ব ∴ ভ"-এর পরোক্ষ প্রমাণ (IP)

"ব · ~ভ ∴ ভ"-এর বৈধতা প্রমাণ হল "ব ∴ ~ভ ⊃ ভ"-এর, বা "ব ∴ ভ"-এর পূর্বকল্পহেতুক প্রমাণ (CP) [কেননা '~ভ ⊃ ভ' equiv 'ভ']

তার মানে, যে প্রমাণ—"ব · ~ভ ∴ ভ"-এর বৈধতা প্রমাণ—"ব ∴ ভ"-এর IP—তা "ব ∴ ভ"-এর CP বলেও গণ্য হতে পারে। এর থেকে বোঝা যায় IP ও CP-এর মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে। এদের সম্পর্ক কী তা আলোচনার আগে এদের পার্থক্য বুঝে নেওয়া দরকার।

CP-তে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত কোনো বাক্য বা বাক্যসমষ্টি থেকে নিষ্কাশিত হয় না; নিষ্কাশিত হয়—কোনো বাক্য-অনুক্রম থেকে কোনো বিশেষ বাক্য (প্রদত্ত সিদ্ধান্তের অনুকল্প) যে নিষ্কাশিত হয়—এ ব্যাপার থেকে। কিন্তু IP-তে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশিত হয় কোনো বাক্য থেকে, একটি স্ববিরোধী বাক্য থেকে। CP ও IP-এর নিম্নোক্ত ছক দুটি লক্ষ কর। ('ব' কোনো হেতুবাক্য বা হেতুবাক্যসমষ্টি।)

1.	ব	/∴ ক ⊃ ভ
▸2.	ক	
....		
n.	ভ	
$n+1$.	ক ⊃ ভ	1, 2→n, CP

1.	ব	/∴ ভ
2.	~ভ	IP
....		
n.	খ	
$n+1$.	~খ	
$n+2$.	খ ∨ ভ	n, Add
$n+3$.	ভ	$n+2$, $n+1$, MTP

এখানে CP-তে 'ক ⊃ ভ' নিষ্কাশিত হয়েছে 'ব', 'ক' থেকে 'ভ' যে নিষ্কাশিত এ নিষ্কাশন-ব্যাপার থেকে, কোনো হেতুবাক্য বা হেতুবাক্য সমষ্টি থেকে নয়। অপরপক্ষে, এখানে IP-তে 'ভ' নিষ্কাশিত হয়েছে 1, 2, ···, n, $n+1$, $n+2$—এ পঙ্‌ক্তিগুলি থেকে।

এজন্য আমরা নিষ্কাশনবিধি (যুক্তিবিধি) হিসাবে CP প্রয়োগ করে আসছি। কিন্তু IP কোথাও নিষ্কাশনবিধি হিসাবে প্রযুক্ত হয় নি; IP নিয়ম উল্লেখ করেছি কেবল প্রস্তাবনা হিসাবে। মানে, কোনো নিষ্কাশিত বাক্যের পাশে ভাষ্যে "IP" লিখিত হয় নি; সিদ্ধান্তনিষেধের পাশে "IP" লিখে এ প্রস্তাবই করা হয়েছে যে IP নিয়ম অনুসারে একটি স্ববিরোধী বাক্য (বা প্রদত্ত সিদ্ধান্ত) নিষ্কাশন করা হবে। এবং পরবর্তী পর্বে নিষ্কাশন করা হয়েছে সাধারণ যুক্তিবিধি অনুসারে।

তবে একথাও ঠিক যে, নিষ্কাশনবিধি হিসাবেও IP ব্যক্ত হতে পারে ; পারে এভাবে

$$\frac{\text{ব} \cdot \sim\text{ভ} \rightarrow \text{স্ববিরোধী বাক্য}}{\text{ভ (বা যে কোনো বাক্য)}}$$

এ নিষ্কাশনবিধি প্রয়োগ করলে IP নিম্নোক্ত রূপ গ্রহণ করবে।

1.	ব	/∴ ভ
2.	~ভ	
n.	খ	
$n+1$.	~খ	
$n+2$.	ভ	$1, 2 \rightarrow n+1$, IP

কিন্তু এভাবে IP বিধি প্রয়োগ করে কী লাভ হল ? লাভ হল অতি সামান্য—কেবল একটি অবরোহ পর্ব বাদ দেওয়া গেল (প্রথম IP ছকের $n+2$ পর্বটি)। অথচ এ সামান্য লাভের সুযোগটুকু গ্রহণ না করলে আমরা আরও মিতব্যয়ী হতে পারি, IP নিয়ম বা নিষ্কাশনবিধি বাদ দিয়ে চলতে পারি। কেননা IP-কে CP-তে রূপান্তরিত করা যায়, IP দিয়ে যা প্রমাণ করা যায় CP বিধি দিয়েই তা প্রমাণ করা যায়। কি করে যায়, দেখ।

আমরা CP প্রয়োগ করতে গিয়ে এতক্ষণ কেবল প্রদত্ত সিদ্ধান্তের পূর্বকল্পকেই অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নিয়েছি। কিন্তু সিদ্ধান্তের-নিষেধকেও অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নেওয়া যায়।* CP বিধি অনুসারে

$$\frac{\text{ব} \cdot \text{ক} \rightarrow \text{ভ}}{\text{ক} \supset \text{ভ}}$$

এখানে 'ক' বলতে যে কোনো বাক্য বুঝতে পারি, সুতরাং ক' সিদ্ধান্তের পূর্বকল্পও হতে পারে সিদ্ধান্তের নিষেধও হতে পারে, তার মানে এ বিধি এভাবেও ব্যক্ত করা যেত**

$$\frac{P \cdot \sim Q \rightarrow Q}{\sim Q \supset Q}$$

এখন যদি অবরোহী প্রমাণে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে

সিদ্ধান্তের পূর্বকল্প বা
সিদ্ধান্তের নিষেধ

নেওয়া হয় তাহলে আর IP-এর প্রয়োজন থাকে না। এতক্ষণ যা IP দিয়ে প্রমাণ করেছি

* ৪০৯ পৃষ্ঠায় সাধারণ নিয়ম বলে একটা নিয়ম উল্লেখ করেছি। এ নিয়ম অনুসারে অবরোহের যেকোনো পর্বে যেকোনো বাক্য হেতুবাক্য হিসাবে অনুপ্রবিষ্ট হতে পারে।

** এ বিধিটি পেলাম প্রথমোক্ত বিধিতে 'ব'-এর বদলে 'P', 'ক'-এর বদলে '$\sim Q$' আর 'ভ'-এর জায়গায় 'Q' বসিয়ে।

তা CP দিয়ে প্রমাণ করা যায়। যায়, দু ভাবে। ধরা যাক, প্রমাণ করতে হবে— '$P \therefore Q$' বৈধ। এর বৈধতা প্রমাণ করতে পারি :

(১) '$P, \sim Q$' থেকে 'Q' নিষ্কাশন করে, তার থেকে CP-এর বলে '$\sim Q \supset Q$' নিষ্কাশন করে এবং '$\sim Q \supset Q$'-এর থেকে এর সমার্থক 'Q' অবরোহণ করে,

(২) '$P, \sim Q$'থেকে কোনো স্ববিরোধী, '$R \cdot \sim R$' নিষ্কাশন করে, তার থেকে CP-এর বলে '$\sim Q \supset (R \cdot \sim R)$' নিষ্কাশন করে এবং তারপর Absur প্রয়োগ করে।

উদাহরণ

(১')

1.	$(A \supset B) \supset A$	$/\therefore A$
→2.	$\sim A$	
3.	$\sim A \vee B$	2, Add
4.	$A \supset B$	3, Df ⊃
5.	A	1, 4, MP
6.	$\sim A \supset A$	2→5, CP
7.	$\sim \sim A \vee A$	6, Df ⊃
8.	$A \vee A$	7, DN
9.	A	8, Idem

(২')

1.	$A \supset B$	
2.	$C \supset D$	
3.	$A \vee C$	$/\therefore B \vee D$
→4.	$\sim (B \vee D)$	
5.	$\sim B \cdot \sim D$	4, DM
6.	$\sim B$	5, Simp
7.	$\sim A$	1, 6, MT
8.	$\sim D \cdot \sim B$	5, Com
9.	$\sim D$	8, Simp
10.	$\sim C$	2, 9, MT
11.	$C \vee A$	3, Com
12.	A	11, 10, MTP
13.	$A \cdot \sim A$	12, 7, Adj
14.	$\sim (B \vee D) \supset (A \cdot \sim A)$	4→13, CP
15.	$B \vee D$	14, Absur, DN

(১') সম্বন্ধে প্রশ্ন উঠতে পারে 5 পর্বেই ত প্রদত্ত সিদ্ধান্ত 'A' পেয়ে গেলাম, তাহলে আরও অগ্রসর হওয়ার কী দরকার ছিল ? উত্তর 'A' নিষ্কাশিত হয়েছে 1, 2 থেকে, কেবল প্রদত্ত হেতুবাক্য 1 থেকে নয়। কাজেই 2-এর বিচ্যুতিকরণ দরকার, আর এজন্য পরবর্তী পর্বগুলির প্রয়োজন। যদি প্রতিপাদক নির্দেশক স্তম্ভ গঠন করতাম তাহলে (১') নিম্নোক্ত আকার ধারণ করত :

{1}	1.	$(A \supset B) \supset A$	P
{2}	2.	$\sim A$	P
{2}	3.	$\sim A \vee B$	2, Add
{2}	4.	$A \supset B$	3, Df ⊃
{1, 2}	5.	A	1, 4, MP

এখানে 5 পর্বে '{ }'-এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলি দেখলে বোঝা যায় 'A' নিসৃত হয়েছে 1 ও 2 থেকে, প্রদত্ত হেতুবাক্য 'A' থেকে নয়। কাজেই 2-এর বিচ্যুতি দরকার, '{ }'-এর মধ্য থেকে '2'-এর অপসারণ দরকার। এ বিচ্যুতিকরণ হতে পারে এভাবে

{1}	6.	$\sim A \supset A$	2→5 CP
{1}	7.	$\sim \sim A \vee A$	6, Df ⊃
{1}	8.	$A \vee A$	7, DN
{1}	9.	A	8, Idem

IP-এর গুরুত্বের কথা বলতে গিয়ে আমরা বলেছিলাম, কোনো কোনো যুক্তির, যথা

$A \therefore B \vee \sim B$ $\qquad$ $A \therefore B \vee (B \supset C)$

—এদের বৈধতা প্রমাণের জন্য IP-এর প্রয়োগ প্রয়োজন। এখন দেখা গেল, IP প্রয়োগ না করেও এ জাতীয় যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়। নিচে দ্বিতীয় যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ করে দেওয়া হল—প্রমাণ করা হল দু ভাবে (লক্ষণীয় প্রমাণ দুটিতে IP প্রয়োগ করা হয় নি)।

1.	$A \quad / \therefore B \vee (B \supset C)$	
→2.	$\sim[B \vee (B \supset C)]$	
3.	$\sim B \cdot \sim(B \supset C)$	2, DM
4.	$\sim B \cdot \sim(B \vee C)$	3, Df ⊃
5.	$\sim B \cdot B \cdot \sim C$	4, DM,DN
6.	$B \cdot \sim B \cdot \sim C$	5, Com
7.	B	6, Simp
8.	$B \vee \sim B$	7, Add
9.	$B \vee \sim B \vee C$	8, Add
10.	$B \vee (\sim B \vee C)$	9, Assoc
11.	$B \vee (B \supset C)$	10, Df ⊃
12.	$\sim[B \vee (B \supset C)] \supset [B \vee (B \supset C)]$	2→11, CP
13.	$[B \vee (B \supset C)] \vee [B \vee (B \supset C)]$	12, Df ⊃, DN
14.	$B \vee (B \supset C)$	13, Idem

1.	$A \quad / \therefore B \vee (B \supset C)$	
→2.	$\sim[B \vee (B \supset C)]$	
3.	$\sim B \cdot \sim(B \supset C)$	2, DM
4.	$\sim B \cdot \sim(\sim B \vee C)$	3, Df ⊃
5.	$\sim B \cdot B \cdot \sim C$	4, DM, DN
6.	$B \cdot \sim B \cdot \sim C$	5, Com
7.	$B \cdot \sim B$	6, Simp
8.	$\sim[B \vee (B \supset C)] \supset (B \cdot \sim B)$	2→7, CP
9.	$\sim\sim[B \vee (B \supset C)]$	8, Absur
10.	$B \vee (B \supset C)$	9, DN

আবার, IP প্রয়োগ না করে অপ্রাকল্পিক স্বতসত্য বাক্যের বৈধতাও (৪২০ পৃঃ দ্রষ্টব্য) প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ : "$B \vee \sim B$"-এর বৈধতা প্রমাণ (৪৩৪ দ্রষ্টব্য)

প্রমাণ :

→1.	$\sim(B \vee \sim B)$	
2.	$\sim B \cdot B$	1, DM, DN
3.	$B \cdot \sim B$	2, Com
4.	$\sim(B \vee \sim B) \supset (B \cdot \sim B)$	1→3, CP
5.	$\sim\sim(B \vee \sim B)$	4, Absur
6.	$B \vee \sim B$	5, DN

২৪. অবরোহবিন্যাস সম্বন্ধে কয়েকটি কথা

অতিরিক্ত হেতুবাক্যের ভাষ্যে আমরা কখনও "অতিরিক্ত হেতুবাক্য" বা "পূর্বকল্প" আবার কখনও কখনও "IP" বা কেবল 'P' লিখেছি। যেখানে CP-তে বক্র তীর ব্যবহার করা হয়েছে সেখানে অতিরিক্ত হেতুবাক্যের পাশে কখনও 'P' লেখা হয়েছে, কখনও বা ভাষ্যের জায়গায় কিছুই লেখা হয় নি। যেখানে অতিরিক্ত হেতুবাক্যের পাশে কোনো ভাষ্য নেই সেখানেও বক্র তীর দেখে বোঝা যায় CP যুক্তিবিধি প্রয়োগ করা হচ্ছে। কিন্তু অতিরিক্ত হেতুবাক্য নেওয়ার সমর্থনে ভাষ্য যুক্ত হওয়া বাঞ্ছনীয়। আমরা অতিরিক্ত হেতুবাক্যের ডান পাশে সর্বক্ষেত্রে 'LA' ('Law of Assumption'-এর সংক্ষেপক) লেখার প্রস্তাব করছি। এ প্রস্তাব অনুসারে

$$(A \supset B) \supset A \mathrel{.\,.\,.} A$$

এ যুক্তির অবরোহী প্রমাণ লিখতে হবে নিচের আকার দুটির কোনো এক আকারে।

1.	$(A \supset B) \supset A$	P		1.	$(A \supset B) \supset A$	$/ \therefore A$
2.	$\sim A$	LA		→2.	$\sim A$	LA

যারা সব হেতুবাক্যের—প্রদত্ত কি অতিরিক্ত হেতুবাক্যের—পাশে 'P' লেখেন তারাও এ কথা বলতে চান যে, বাম ধারের বাক্যটি Premiss Rule অনুসারেই অবরোহের অন্তর্ভুক্ত হয়েছে। তবে প্রদত্তের পাশে 'P' আর অতিরিক্তের পাশে 'LA' লিখলে বুঝতে সুবিধা হয় কোন্‌টি প্রদত্ত হেতুবাক্য, কোন্‌টি অতিরিক্ত হেতুবাক্য।

আর একটা কথা।

বিভিন্ন যুক্তিবিজ্ঞানী ভিন্ন ভিন্ন অবরোহবিন্যাস পছন্দ করেন। কেউ মূল প্রতিপাদক নির্দেশক স্তম্ভ গঠন করেন, কেউ বা করেন না। আবার কেউ কেউ "$/ \therefore$ ___" বা এ জাতীয় কোনো চিহ্ন (যথা "$/ \therefore$") ব্যবহার করে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত সর্বশেষ হেতুবাক্যের পাশে উল্লেখ করেন, আর কেউ কেউ প্রতিজ্ঞা বাক্য উল্লেখ করেন না। কোনো কোনো যুক্তিবিজ্ঞানী আবার আগে ভাষ্য লিখে তারপর ভাষ্যকৃত বাক্যটি উত্থাপন করেন; এরা ভাষ্যে '×' চিহ্নটি ব্যবহার করেন "অমুক থেকে, অমুক বিধি অনুসারে পাওয়া গেল"—এ কথার সংক্ষেপক হিসাবে। যথা,

"1, 2, MP×3" মানে : 1, 2 থেকে MP অনুসারে পাওয়া গেল 3

P×1 মানে : Premiss Rule থেকে পাওয়া গেল 1, মানে 1 সংখ্যক হেতুবাক্য উত্থাপিত হল।

নিচে উক্তরূপ অবরোহ বিন্যাসের একটি উদাহরণ দেওয়া হল।

1.	$(A \vee B) \supset C$	P×1
→2.	$D \supset A$	P×2
→3.	D	P×3
4.	A	2, 3, MP×4
5.	$A \vee B$	4, Add×5
6.	C	1, 5, MP×6
7.	$D \supset C$	3→6, CP×7
8.	$(D \supset A) \supset (D \supset C)$	2→7, CP×8

এ অবরোহের সাহায্যে প্রমাণিত হল যে

$$(A \vee B) \supset C \therefore (D \supset A) \supset (D \supset C)$$

—এ যুক্তিটি বৈধ।

অনুশীলনী

১. সমার্থক নিষ্কাশন করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত প্রত্যেক পঙ্‌ক্তির বাক্য দুটি সমার্থক :

$p \equiv q$	$(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$\sim(p \equiv q)$	$p \equiv \sim q$
$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$	$(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)$

২. প্রতিপাদ্য নিষ্কাশন করে প্রমাণ কর যে প্রত্যেক পঙ্‌ক্তির (a) (b)-এর প্রতিপাদক :

(a) $\sim(A \cdot B \cdot C) \cdot \sim(A \cdot \sim C)$ (b) $\sim(A \cdot B) \cdot \sim(A \cdot \sim C)$

(a) $(A \supset B) \cdot (B \supset C)$ (b) $A \supset C$

৩. MP বিধির সাহায্য না নিয়ে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত যুক্তিটি বৈধ :

$$A \supset B, A \therefore B$$

৪. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবরোহী বৈধতা-প্রমাণ দাও :

(১) $A \supset B, \sim B \vee C, \sim(C \cdot \sim D) \quad \therefore \quad A \supset D$

(২) $A \supset B, \sim C \vee D, \sim(B \cdot D) \quad \therefore \quad A \supset C$

(৩) $A \supset \{B \supset [(A \supset (\sim D \cdot \sim E)]\}, \sim(\sim A \vee \sim B \vee \sim C)$
$\therefore \quad D \supset (E \supset F)$

(৪) $E \supset F, E \vee F \vee \sim G, \sim F \quad \therefore \quad \sim G \vee H$

(৫) $(E \supset \sim F) \cdot (G \supset \sim H), (I \supset \sim J) \cdot (K \supset \sim L), (G \supset J) \cdot$
$(H \supset F), I \vee E, \quad \therefore \quad G \supset \sim H$

(৬) $(E \supset F) \cdot (G \supset H), E \vee G, (E \supset \sim H) \cdot (G \supset \sim H)$
$\therefore \quad \sim F \equiv H$

(৭) $(H \supset I) \cdot (J \supset K), (I \vee K) \supset L, \sim L \cdot \sim M \quad \therefore \quad H \supset \sim J$

(৮) $(E \supset \sim F) \cdot (G \supset H), (\sim F \supset I) \cdot (H \supset \sim J), (I \supset \sim K) \cdot$
$(\sim J \supset L), E \cdot G \quad \therefore \quad \sim(\sim K \supset \sim L)$

(৯) $K \vee L, (K \vee M) \supset (N \cdot O), \sim N \quad \therefore \quad L \vee M$

(১০) $A \supset (B \cdot C), (B \vee C) \supset D \quad \therefore \quad A \supset D$

(১১) $(A \cdot B) \supset C, (A \cdot \sim B) \supset \sim C \quad \therefore \quad A \supset [(B \cdot C) \vee$
$(\sim B \cdot \sim C)]$

(১২) $(A \vee B) \supset (C \cdot D), (C \vee E) \cdot \sim E \quad \therefore \quad \sim A$

(১৩) $M \vee (N \cdot O), M \supset O \quad \therefore \quad O$

(১৪) $J \supset (K \supset L), (L \cdot M) \supset N, O \supset (M \cdot \sim N)$
$\therefore \quad J \supset (K \supset \sim O)$

(১৫) $(R \supset S) \cdot (T \supset U), (S \vee U) \supset V, \sim V \quad \therefore \quad \sim R \vee \sim T$

(১৬) $(G \vee H) \supset \sim I, I \vee H, G, (H \vee \sim G) \supset J \quad \therefore \quad \sim J \supset \sim H$

(১৭) $A \supset B, C \supset D \quad \therefore \quad (A \cdot C) \supset (B \cdot D)$

(১৮) $A \supset B, A \supset (B \supset C), B \supset (C \supset D) \quad \therefore \quad A \supset D$

(১৯) $A \supset (B \vee C), D \supset (C \vee E), \sim C$
$\therefore \quad (\sim B \cdot \sim E) \supset (\sim A \cdot \sim D)$

(২০) $(A \vee B) \supset [(C \vee D) \supset (\sim E \cdot F)], (\sim E \vee \sim G) \supset H$
$\therefore \quad A \supset (C \supset H)$

(২১) $A \supset B, C \supset D \quad \therefore \quad (A \vee C) \supset (B \vee D)$

(২২) $(A \cdot B) \equiv (A \cdot C), (A \vee B) \equiv (A \vee C) \quad \therefore \quad B \equiv C$

৫. $S \vee T \vee \sim C, F \supset C, \sim T \vee \sim C, F \therefore S$

এ যুক্তিতে IP প্রয়োগ করে নিষ্কাশন কর : $C \cdot \sim C, S \cdot \sim S, F \cdot \sim F, T \cdot \sim T$

৬. IP প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

$A \supset (B \cdot C), (B \vee D) \supset E, A \vee D \quad \therefore \quad E$

$(D \vee E) \supset (F \supset G), (\sim G \vee H) \supset (D \cdot F) \quad \therefore \quad G$

$(A \vee B) \supset (C \cdot D), (C \vee E) \supset (\sim F \cdot G), (F \vee H) \supset (A \cdot I) \therefore \sim F$

৭. CP প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

$\sim U \vee (V \cdot R), (\sim E \cdot U) \vee \sim C, (\sim M \vee \sim F) \supset \sim V \quad \therefore \quad C \supset F$

$(\sim A \vee B) \cdot (A \supset C), B \supset (C \supset D) \quad \therefore \quad A \supset D$

$J \supset (K \supset L), (L \cdot M) \supset N, O \supset (M \cdot \sim N) \quad \therefore \quad J \supset (K \supset \sim O)$

৮. অনুশীলনী ৪-এর ১৬-২০ সংখ্যক যুক্তির বৈধতা CP প্রয়োগ করে প্রমাণ কর।

৯. নিচে কয়েকটি হেতুবাক্য সমষ্টি উল্লেখ করা হল। প্রত্যেকটি সমষ্টির অন্তর্গত বাক্যের মধ্যে অসঙ্গতি, নাকি সংগতি, আছে তা নির্ণয় কর।

(১) যদি অসঙ্গতি থাকে বলে মনে কর তাহলে কোনো স্ববিরোধিতা নিষ্কাশন করে তোমার উক্তি সমর্থন কর ; আর

(২) যদি মনে কর যে সংগতি আছে তাহলে অঙ্গবাক্যগুলিতে সত্যমূল্য বসিয়ে দেখাও যে বাক্যগুলি যুগপৎ সত্য হতে পারে।

(i) $A \supset B, B \supset C, C \vee D, \sim D$

(ii) $E \supset (F \cdot \sim G), F, G \supset H, \sim (H \vee E)$

(iii) $A \equiv B, B \equiv C, D \equiv \sim A, C \equiv D$

(iv) $F \equiv G, G \equiv H, \sim H \vee I, \sim F \supset I, \sim I$

(v) $A \supset B, B \equiv C, (C \vee D) \equiv \sim B$*

(vi) $\sim (\sim A \vee B), B \vee \sim C, A \supset C$ (সুপ্পেস্ অনুসরণে)

১০. IP পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি স্বতসত্য :

(1) $p \equiv \sim \sim p$

(2) $p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$

(3) $p \equiv [p \vee (p \cdot q)]$

(4) $(p \supset q) \vee (p \supset \sim q)$

(5) $(p \supset q) \vee (q \supset p)$

(6) $(p \supset q) \vee (q \supset r)$

(7) $(p \supset q) \vee (\sim p \supset r)$

(8) $(p \supset q) \vee (\sim p \supset q)$

১১. CP পদ্ধতি প্রয়োগ করে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি স্বতসত্য :

(1) $p \supset \sim \sim p$

(2) $\sim \sim p \supset p$

(3) $(p \cdot q) \supset p$

(4) $p \supset (p \vee q)$

(5) $p \supset (q \supset p)$

(6) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

(7) $[(p \supset q) \supset p] \supset p$

(8) $(p \supset q) \supset [p \supset (p \cdot q)]$

(9) $(p \supset q) \supset [(r \supset p) \supset (r \supset q)]$

(10) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

(11) $[(p \supset q) \cdot (p \supset r)] \supset [p \supset (q \vee r)]$

(12) $[(p \supset q) \cdot (p \supset r)] \supset [p \supset (q \cdot r)]$

(13) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

(14) $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$

(15) $(p \supset q) \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot r)]$

---

* (v)-এর অন্তর্গত বাক্যগুলির মধ্যে যে সংগতি আছে তা এভাবে দেখানো যায় :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (A & \supset & B) & \cdot & (B & \equiv & C) & \cdot & [(C & \vee & D) & \equiv & \sim B] \\ f & T & f & & f & T & f & & f & t & t & T & t\,f \\ 7 & 1 & 6 & & 4 & 2 & 5 & & 11 & 10 & 12 & 3 & 9\,8 \end{array}$$

(16) $(p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$
(17) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \cdot q) \supset r]$
(18) $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$
(19) $[(p \cdot q) \supset r] \supset (p \supset r) \vee (q \supset r)$
(20) $[(p \vee q) \supset r] \supset (p \supset r) \cdot (q \supset r)$

১২. CP প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

(1) $A \supset B,\ B \supset [(C \supset \sim\sim C) \supset D] \quad \therefore\ A \supset D$
(2) $(E \vee F) \supset G,\ H \supset (I \cdot J) \quad \therefore\ (E \supset G) \cdot (H \supset I)$
(3) $I \vee (J \supset K),\ J \supset (J \cdot K) \supset (L \vee M),\ (L \supset I) \cdot (M \supset N) \quad \therefore\ I \vee N$
(4) $J \supset (\sim K \cdot \sim L),\ M \supset \sim(K \vee L),\ (\sim N \supset J) \cdot (\sim O \supset M),\ (N \supset K) \cdot (O \supset L) \quad \therefore\ K \equiv L$
(5) $(S \vee T) \supset (U \supset V),\ [U \supset (U \cdot V)] \supset W,\ W \supset [(\sim X \vee \sim\sim X) \supset (S \cdot X)] \quad \therefore\ S \equiv W$

১৩. $A \ \therefore\ \sim A \supset \{B \supset [C \supset (D \supset E)]\}$

এ যুক্তিটি বৈধ। এ যুক্তি থেকে আর কোন্ কোন্ বৈধ যুক্তি পেতে পার ?

১৪. একটি উদাহরণ নিয়ে CP ও IP-এর সম্পর্ক ব্যাখ্যা কর।

১৫. প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর। প্রত্যেকটি প্রমাণ যেন নিম্নোক্ত চারটি স্তম্ভে বিন্যস্ত থাকে : মূল-প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যা-স্তম্ভ, অবরোহ পঙ্‌ক্তির ক্রমজ্ঞাপক সংখ্যা স্তম্ভ, অবরোহ পঙ্‌ক্তি স্তম্ভ ও ভাষ্য স্তম্ভ।

(1) $(\sim A \cdot B) \supset (C \supset D),\ \sim A \supset (C \supset E),\ A \vee (D \supset F),\ B \cdot \sim A \quad \therefore\ E \vee F$
(2) $(A \supset B) \cdot (B \supset \sim C),\ C \supset \sim D,\ B \supset E,\ \sim D \supset F,\ \sim E \vee \sim F \quad \therefore\ \sim A \vee \sim C$
(3) $(G \vee H) \supset \sim I,\ I \vee H,\ (H \vee \sim G) \supset J,\ G \cdot K \quad \therefore\ \sim J \supset \sim H$
(4) $(K \cdot L) \supset M,\ (L \supset M) \supset N,\ K \ \therefore\ N$
(5) $(L \cdot M) \vee (N \cdot O),\ \sim L, \quad \therefore\ O \vee M$

১৬. CP পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত বাক্যগুলির ও যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর। বক্র তীরের পরিবর্তে প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যা ব্যবহার করবে। মানে অবরোহগুলির সর্ববামে থাকবে প্রতিপাদক নির্দেশক সংখ্যাস্তম্ভ।

(1) $(A \supset B) \supset [A \supset (A \cdot B)]$
(2) $[A \supset (B \cdot C)] \supset \{[B \supset (D \cdot E)] \supset (A \supset D)\}$
(3) $(A \vee B) \supset (C \cdot D),\ (D \vee E) \supset F \quad \therefore\ A \supset F$
(4) $A \supset (B \cdot C),\ (B \vee C) \supset D \quad \therefore\ A \supset D$

১৭. CP প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

$A \ \therefore\ B \vee \sim B \qquad\qquad A \ \therefore\ B \vee (B \supset C)$

১৮. IP প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর :

$A \ \therefore\ B \supset (B \vee C) \qquad\qquad A \ \therefore\ B \vee (B \supset C)$

১৯. CP বা IP প্রয়োগ না করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা প্রমাণ কর* ঃ

$A \quad \therefore \quad B \vee \sim B$

$A \quad \therefore \quad B \vee (B \supset C)$

$A \quad \therefore \quad B \supset (B \vee C)$

উত্তর ঃ অনুশীলনী ৪-এর সবশেষ যুক্তির বৈধতা-প্রমাণ

1.	$(A \supset B) \cdot (C \supset D)$	$/ \therefore (A \vee C) \supset (B \vee D)$
2.	$A \supset B$	1, Simp
3.	$\sim A \vee B$	2, Df ⊃
4.	$(\sim A \vee B) \vee D$	3, Add
5.	$\sim A \vee (B \vee D)$	4, Assoc
6.	$(B \vee D) \vee \sim A$	5, Com
7.	$(C \supset D) \cdot (A \supset B)$	1, Com
8.	$C \supset D$	7, Simp
9.	$\sim C \vee D$	8, Df ⊃
10.	$(\sim C \vee D) \vee B$	9, Add
11.	$\sim C \vee (D \vee B)$	10, Assoc
12,	$\sim C \vee (B \vee D)$	11, Com
13.	$(B \vee D) \vee \sim C$	12, Com
14.	$[(B \vee D) \vee \sim A] \cdot [(B \vee D) \vee \sim C]$	6, 13, Adj
15.	$(B \vee D) \vee (\sim A \cdot \sim C)$	14, Dist
16.	$(\sim A \cdot \sim C) \vee (B \vee D)$	15, Com
17.	$\sim(A \vee C) \vee (B \vee D)$	16, DM
18.	$(A \vee C) \supset (B \vee D)$	17, Df ⊃

যেভাবে উপরোক্ত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা হল ঠিক সেভাবেই ৪-এর ১৭ সংখ্যক যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়। তবে এক্ষেত্রে '$\sim A \vee B$'-এর সঙ্গে '$\sim C$', আর '$\sim C \vee D$' এর সঙ্গে '$\sim A$', বিকল্প হিসাবে যুক্ত করতে হবে। মানে এ প্রমাণের ৪র্থ পর্ব হবে ঃ $(\sim A \vee B) \vee \sim C$, আর ১০ম পর্ব ঃ $(\sim C \vee D) \vee \sim A$।

উত্তর ঃ অনুশীলনী ১২-এর (3)-এর বেলায় '$\sim I$', (4)-এর বেলায় '$K \vee L$', আর (5)-এর বেলায় 'X', '$\sim W$' অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নাও।

উত্তর ঃ অনুশীলনী ১৭-এর ১ম যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ

1. A
→2. B
3. $B \vee \sim B$
4. $B \supset (B \vee \sim B)$
5. $\sim B \vee (B \vee \sim B)$
6. $(B \vee \sim B) \vee \sim B$
7. $B \vee \sim B \vee \sim B$
8, $B \vee \sim B$

কোন্ পঙ্‌ক্তিতে কী ভাষ্য থাকার কথা তা সহজবোধ্য।

---

* ১—২২ এ বিধিগুলির যে কোনোটি (২০—২২৩) প্রয়োগ করতে পার।

১০

অবরোহতন্ত্রীকরণ ঃ PM তন্ত্র

১. তন্ত্রীকরণ ঃ ভূমিকা

আমরা শেষ অধ্যায়ে এসে পৌঁছেছি। এখন একবার পিছনের দিকে তাকিয়ে দেখতে চাই, এতক্ষণ পর্যন্ত কী করেছি তার পর্যালোচনা করতে চাই। বিশেষ করে, এতক্ষণ ধরে যা করেছি তাতে যুক্তিবিজ্ঞান রচনার কাজ কতটা অগ্রসর হয়েছে, এ কাজে কতটা সফল হয়েছি, চাই তা বিচার করতে।

এতক্ষণ আমরা প্রধানত বৈধতা নির্ণয় ও বৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি আলোচনা করেছি—কি করে বৈধ বাক্যকে অবৈধ বাক্য থেকে, বৈধ যুক্তিকে অবৈধ যুক্তি থেকে, পৃথক করা যায়, কি করে কোন বাক্যের বা যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায়—তাই ব্যাখ্যা করেছি।

এ রকমের আলোচনা যুক্তিবিজ্ঞানের প্রয়োগসংক্রান্ত আলোচনা, বা যুক্তিবৈজ্ঞানিক পদ্ধতির ব্যাখ্যা। আমরা দেখতে পাব, এ কাজ বিশুদ্ধ যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ নয়, এ কাজ করলে (বিশুদ্ধ) যুক্তিবিজ্ঞান রচনা করা হয় না। যুক্তিবিজ্ঞান রচনা, যুক্তিবিজ্ঞান ব্যাখ্যা, যুক্তিবিজ্ঞানের প্রয়োগ—এদের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। (বিশুদ্ধ) যুক্তিবিজ্ঞান বলতে কী বোঝায়, যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ কী, 'যুক্তিবিজ্ঞান রচনা' বলতেই বা কী বোঝায় তা বুঝে নিলে আমরা দেখতে পাব ঃ পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে যা করেছি যুক্তিবিজ্ঞানে হাতে খড়ি দিতে হলে সে কাজ অপরিহার্য, ঠিক ; কিন্তু সে কাজকে যুক্তিবিজ্ঞান রচনার কাজ বলা যায় না।

সংক্ষেপে বলতে গেলে, (বিশুদ্ধ) যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ হল যুক্তিবৈজ্ঞানিক নিয়মের (আকারসর্বস্ব স্বতসত্যের) অনুসন্ধান ও সুবিন্যস্তকরণ। সুবিন্যস্তকরণ কথাটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। কেননা যুক্তিবিজ্ঞান হল বিজ্ঞান, আর বিজ্ঞান হল সুবিন্যস্ত, তন্ত্রবদ্ধ জ্ঞান বা (জ্ঞান-প্রকাশক) বাক্যসমষ্টি। কোনো বাক্যতালিকা—সে তালিকা সর্বগ্রাহী হলেও, তালিকাভুক্ত বাক্যগুলি অভ্রান্ত সত্য হলেও—বিজ্ঞান পদবাচ্য হতে পারে না। তালিকাভুক্ত সত্য বাক্যগুলি বিশেষভাবে বিন্যস্ত হলেই বিজ্ঞানের মর্যাদা পায়। এখন, বিশেষভাবে বাক্য বিন্যস্তকরণ বলতে বোঝায় ঃ অবরোহতন্ত্রীকরণ, মানে অবরোহ তন্ত্রের আকারে বিন্যাসকরণ, মানে বাক্যগুলিকে অবরোহী সম্বন্ধে, প্রতিপাদক প্রতিপাদ্য সম্বন্ধে, আবদ্ধকরণ—দেখানো যে বাক্যগুলির কয়েকটি থেকে অন্য সব কয়টি বৈধভাবে নিষ্কাশনযোগ্য।

"বিজ্ঞান" কথাটি এখানে যে অর্থে ব্যবহৃত হচ্ছে সে অর্থে বিজ্ঞানের আদর্শ হল অবরোহী বিজ্ঞান। এ অর্থে ইউক্লিডীয় জ্যামিতি হল প্রথম (বিশুদ্ধ) বিজ্ঞান।

"অবরোহ তন্ত্র" বলতে ঠিক কী বোঝায়, কেন ইউক্লিডীয় জ্যামিতিকে প্রথম বিশুদ্ধ বিজ্ঞান বলা হয় এসব পরে বোঝা যাবে। আপাতত যুক্তিবিজ্ঞানের কথায় ফিরে যাই। যুক্তিবিজ্ঞান রচনাকরণ বলতে বোঝায় যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্রের উক্তরূপ সুবিন্যস্তকরণ। যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ আমাদের আলোচ্য সে অংশকে—বাক্যকলনকে—বিজ্ঞান (খণ্ড) পদবাচ্য করে তুলতে হলে, আমাদের কাজ হবে বাক্যকলনের সব স্বতসত্যের একত্রীকরণ, সুবিন্যস্তকরণ—মানে অবরোহী সম্বন্ধে আবদ্ধকরণ। এখন, বোঝা যাবে, আমরা এতক্ষণ যা করেছি কেন তাকে যুক্তিবিজ্ঞান রচনাকরণ বা বাক্যকলনের তন্ত্রীকরণ বলা চলে না।

কয়েকটি অধ্যায়ে আমরা বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করেছি—কি করে বৈধ বাক্যকে পরতসাধ্য (অবৈধ) বাক্য থেকে, বৈধ যুক্তিকে অবৈধ যুক্তি থেকে, পৃথক করা যায় তা ব্যাখ্যা করেছি। (বিশুদ্ধ) যুক্তিবিজ্ঞানী বলবেন : কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞানে পরতসাধ্য বাক্যের বা অবৈধ যুক্তির স্থান নেই। কাজেই বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় বিশুদ্ধ যুক্তিবৈজ্ঞানিক কর্ম নয়। এটা হল যুক্তিবিজ্ঞানের প্রয়োগ ॥

অব্যবহিত পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা একটি প্রমাণ পদ্ধতি আলোচনা করেছি। এ পদ্ধতি প্রয়োগ করে যেসব প্রমাণ গঠন করা হয়েছে তাদের (প্রায় সব কয়টির) হেতুবাক্যও পরতসাধ্য, সিদ্ধান্তও পরতসাধ্য বাক্য। যুক্তিবিজ্ঞানী প্রশ্ন তুলবেন, এ পদ্ধতির কী প্রয়োজন ? বলবেন : কি করে কোনো পরতসাধ্য বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করতে হয় —এ সম্বন্ধে যুক্তিবিজ্ঞানী সম্পূর্ণ উদাসীন। যুক্তিবিজ্ঞানীর দরকার এমন পদ্ধতি যা দিয়ে যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্র প্রমাণ করা যায়, স্বতসত্য বাক্য নিষ্কাশন করা যায়। আর অবশ্যই এরূপ সূত্র পরতসাধ্য বাক্য থেকে নিষ্কাশনযোগ্য নয় ॥

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে আমরা বহু যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্র (বাক্যকলনের অন্তর্ভুক্ত স্বতসত্য) উল্লেখ করেছি। কিন্তু, আমরা দেখেছি, এলোমেলোভাবে, প্রয়োজনমত, স্বতসত্য উল্লেখ করলে বা এদের তালিকাভুক্ত করলেই, যুক্তিবিজ্ঞান রচনা করা হয় না। যুক্তিবিজ্ঞান রচনা করতে হলে দরকার এমন পদ্ধতি* যা প্রয়োগ করে শৃঙ্খলাবদ্ধভাবে স্বতসত্য উদ্ভাবন করা যায়, সব স্বতসত্য নিষ্কাশন করা যায়। দরকার, এমন পদ্ধতি যা দিয়ে কয়েকটি মূল স্বতসত্য (স্বতসিদ্ধ বা প্রাথমিক সূত্র বলে গৃহীত) বাক্য থেকে সব স্বতসত্য নিষ্কাশন করা যায়। এখন আমরা এ পদ্ধতিই আলোচনা করতে যাচ্ছি। এর লক্ষ্য হল স্বতসত্য বাক্য উদ্ভাবন ও নিষ্কাশন—দেখানো যে, গৃহীত যুক্তিবিধি অনুসারে গৃহীত মৌল বাক্য (স্বতসিদ্ধ) থেকে সব স্বতসত্য নিষ্কাশনযোগ্য। এজন্য এ পদ্ধতিকে বলে স্বতসিদ্ধমূলীকরণ (axiomatization) বা অবরোহতন্ত্রীকরণ। আর এভাবে তন্ত্রীকরণ করে যে বাক্য-অনুক্রম পাওয়া যায় তাকে বলে অবরোহ তন্ত্র।

বর্তমান অধ্যায়ের লক্ষ্য হল : যুক্তিবিজ্ঞানের যে অংশ আমাদের আলোচ্য সে অংশের, অর্থাৎ বাক্যকলনের, (অবরোহ)তন্ত্রীকরণ। বলা বাহুল্য, জ্যামিতি যেমন নানা রূপ

* বলা বাহুল্য, অধ্যায় ১৯-এতে যে পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে তা দিয়ে এ কাজ হতে পারে না।

গ্রহণ করতে পারে—ইউক্লিডীয় রূপ, বিভিন্ন অ-ইউক্লিডীয় রূপ—সেরকম বাক্যকলন অবরোহতন্ত্র নানা রূপের হতে পারে। কেননা, বিভিন্ন তন্ত্রে ভিন্ন ভিন্ন বাক্যসমষ্টিকে স্বতসিদ্ধ হিসাবে নেওয়া যেতে পারে। যথা এমন হতে পারে যে, কোনো তন্ত্রে "$p \vee \sim p$" হল মৌল বাক্য, আর অন্য তন্ত্রে এ বাক্যটি নিষ্কাশিত বা উপপন্ন বাক্য।

আমরা এ অধ্যায়ে একটি বিশিষ্ট বাক্যকলনতন্ত্র উপস্থাপিত করব—হোয়াইটহেড্ ও রাসেল-কৃত Principia Mathematica-র অন্তর্ভুক্ত বাক্যকলনতন্ত্র। (এ তন্ত্রকে সংক্ষেপে PM তন্ত্র বলে উল্লেখ করব)। তার আগে সাধারণভাবে অবরোহতন্ত্র সম্পর্কে দু একটা কথা বলে নেওয়া ভাল মনে করছি।

অবরোহতন্ত্র

কোনো বিজ্ঞান রচনা করতে গিয়ে

(ক) বিজ্ঞানটিতে ব্যবহৃত প্রত্যেকটি (পারিভাষিক) প্রতীকের বা শব্দের অর্থ বলে নিতে পারলে বা সংজ্ঞা দিতে পারলে, আর

(খ) প্রত্যেকটি বিবৃতির, বিজ্ঞান-অন্তর্ভুক্ত বাক্যের, সমর্থনে যুক্তি দিতে পারলে, প্রত্যেকটি বাক্য প্রমাণ করতে পারলে ভাল হত; কোনো শব্দের অর্থ সম্বন্ধে, বা কোনো বাক্যের সত্যতা সম্বন্ধে, সংশয় থাকত না।

কিন্তু তা সম্ভব নয়।

প্রথমত (ক)। প্রত্যেক শব্দের বা প্রতীকের সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়। প্রত্যেক শব্দের অর্থ ব্যাখ্যা করতে বা সংজ্ঞা দিতে চেষ্টা করলে, হয় অনবস্থা নয়ত চক্রক দোষ হবে। কোনো শব্দের '$শ_1$'-এর সংজ্ঞা দিতে গেলে অন্য শব্দ (সমষ্টি) '$শ_2$' প্রয়োগ করতে হয়, আবার, ধর, '$শ_2$'-এর সংজ্ঞা দিতে গিয়ে '$শ_3$', '$শ_3$'-এর সংজ্ঞা দিতে গিয়ে '$শ_4$'......। এর পরিণতি হল অনবস্থা। এ প্রক্রিয়া এমন যে এর শেষ নেই; এমন কোনো অবস্থান নেই যেখানে দাঁড়িয়ে বলা যায় ঃ এই শেষ, আর অগ্রসর হতে হবে না। কিন্তু কোথাও থামতে না পারলে, এ দাবীও করা যায় না যে এ সংজ্ঞা-শৃঙ্খলের প্রথম অঙ্গশব্দটির, '$শ_1$'-এর*, পরিপূর্ণ অর্থ দেওয়া হল। আর অনবস্থা এড়াবার জন্য উক্তরূপ শব্দ-অনুক্রমের কোনো পূর্ববর্তী শব্দ দিয়ে আবার পরবর্তী শব্দের সংজ্ঞা দিলে চক্রক দোষ হবে—যথা, যদি '$শ_{10}$'-এর সংজ্ঞা দেওয়া হয় '$শ_1$' দিয়ে তাহলে সংজ্ঞাটি চক্রক দোষে দুষ্ট হবে। এর থেকে বোঝা যায়, প্রত্যেক বিজ্ঞানে এমন কিছু শব্দ থাকবে যার সংজ্ঞা দেওয়া হয় না, বা সংজ্ঞা দেওয়া যায় না—যার অর্থ সহজবোধ্য বলে ধরে নেওয়া হয়। যথা, জ্যামিতিতে "ত্রিভুজ"-এর সংজ্ঞা দিতে গিয়ে, "রেখা", "সরল রেখা" প্রয়োগ করা হয়, "সরল রেখা"র সংজ্ঞা দিতে গিয়ে প্রয়োগ করা হয় "বিন্দু", "ক্ষুদ্রতম", "রেখা" ইত্যাদি ("সরল রেখা"র সংজ্ঞা ঃ সরল রেখা হল দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম রেখা)। এখন ধরা যাক, "রেখা", "বিন্দু"—এ সবের আবার সংজ্ঞা দেওয়া হল। কিন্তু "মধ্যবর্তী"র সংজ্ঞা? এর সংজ্ঞা কী?

* বা অন্য কোনো অঙ্গ শব্দের, '$শ_2$', '$শ_3$',......'$শ_n$'-এর,

জ্যামিতিবিদ্‌রা এর আবার সংজ্ঞা দেওয়ার প্রয়োজন বোধ করেন না। ধরে নেওয়া হয় যে এর অর্থ সহজবোধ্য, শ্রোতা এর অর্থ জিজ্ঞাসা করবে না। যে বিজ্ঞানী অবরোহ তন্ত্রের আকারে তার বিজ্ঞানকে বিশেষভাবে সুবিন্যস্ত করতে চান তিনি বলবেন : এ এ প্রতীকের সংজ্ঞা দেওয়া হবে না, আর অন্যগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হবে। প্রথম প্রকারের শব্দ বা প্রতীককে বলে প্রাথমিক বা মৌল প্রতীক (primitive symbol)।

এবার (খ)। অনুরূপভাবে বলা যায়, প্রত্যেক বক্তব্যের সমর্থক যুক্তি দেওয়া, প্রত্যেকটি ঘোষিত বাক্য প্রমাণ করা সম্ভব নয়। যথা ধরা যাক, '$ব_১$'-এর সত্যতা প্রমাণ করা হল '$ব_২$' দিয়ে, '$ব_২$'-এর '$ব_৩$' দিয়ে……'$ব_{n-1}$'-এর '$ব_n$' দিয়ে। এভাবে চলার বিরাম না হলে অনবস্থা হবে। আর অনবস্থা এড়াতে গিয়ে এ বাক্য অনুক্রমের কোনো পরবর্তী (উপপাদক) বাক্যের সমর্থনে কোনো পূর্ববর্তী (উপপাদ্য) বাক্য উত্থাপন করলে হবে চক্রক দোষ। যথা $ব_১ \because ব_২$, $ব_২ \because ব_৩$……$ব_{n-1} \because ব_n$—এর পরে যদি বলা হয় $ব_n \because ব_১$ তাহলে চক্রক দোষ হবে। এর থেকে বোঝা যাবে, প্রত্যেক বিজ্ঞানে এমন কিছু উক্তি (বাক্য) থাকবে যার সত্যতা প্রমাণ করা হয় না, বা প্রমাণ করা যায় না, যার সত্যতা সহজগ্রাহ্য বলে ধরে নেওয়া হয়। যে বিজ্ঞানী অবরোহ তন্ত্রের আকারে তার বিজ্ঞানকে বিশেষভাবে সুবিন্যস্ত করতে চান তিনি বলবেন : এ এ বাক্যের সমর্থক যুক্তি দেওয়া হবে না, এসব আমি স্বতসিদ্ধ বলে মেনে নিলাম ; আর এদের সাহায্য নিয়ে আমি ঐ ঐ বাক্য প্রমাণ করব। প্রথম শ্রেণীর বাক্যকে বলে স্বতসিদ্ধ বা মৌল (axiom) বাক্য, আর দ্বিতীয় শ্রেণীর বাক্যকে উপপাদ্য (theorem)। তাহলে প্রত্যেক (অবরোহ)তন্ত্রীকৃত বিজ্ঞানে এ চারটি অংশ বা পরিচ্ছেদ থাকবে :

> মৌল প্রতীক (primitive symbols), সংজ্ঞা (definitions), মৌল বাক্য (axioms) ও উপপাদ্য (theorems)।

যে সব যুক্তিবিধি বা নিষ্কাশনবিধি প্রয়োগ করে উপপাদ্য নিষ্কাশন (অবরোহণ) করা হয় সাধারণত তা স্পষ্টভাবে উল্লেখ করা হয় না। এমন কি ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মত বিশুদ্ধ বিজ্ঞানেও সব প্রযুক্ত যুক্তিবিধির উল্লেখ নেই। কিন্তু কোনো অবরোহতন্ত্রীকৃত বিজ্ঞানে, সংক্ষেপে, অবরোহ তন্ত্রে, কোন্ কোন্ বা কী কী যুক্তিবিধি প্রয়োগ করা হবে তা স্পষ্টভাবে উল্লেখ থাকার দরকার। অবরোহ তন্ত্র হবে নিরন্ধ্র, নিরবচ্ছিন্ন (ও বাহুল্যবর্জিত), এতে কোনো ফাঁক থাকবে না (বা কোনো বাহুল্য থাকবে না)। প্রয়োজনমত যখন তখন খেলার নিয়ম বানাতে (বা পাল্টাতে) হলে খেলা হয় না, কি নিয়মে খেলা হবে তা পূর্বেই নির্ধারিত হওয়া দরকার। সে রকম, সুবিধামত যে কোনো সময় যে কোনো যুক্তিবিধি প্রয়োগ করলে চলবে না। কী কী বা কোন্ কোন্ যুক্তিবিধি প্রয়োগ করা হবে তা পূর্বেই পরিষ্কারভাবে বলে নেওয়া দরকার। এসব যুক্তিবিধির সাধারণ নাম রূপান্তরের* বিধি (transformation rules)।

* এখানে "রূপান্তর" মানে অবরোহণ, কেবল সমার্থক বাক্যে রূপান্তর নয়।

আমাদের লক্ষ্য—যেকোনো বিজ্ঞানের তন্ত্রীকরণ নয়, যুক্তিবিজ্ঞানের তন্ত্রীকরণ। যে যুক্তিবিজ্ঞান বা যুক্তিবিজ্ঞানখণ্ড রচনা করতে যাচ্ছি তার ভাষা সম্পর্কে একটা কথা বলার দরকার। যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষা হল বিশেষ ধরনের সাংকেতিক ভাষা। এ ভাষার উপকরণ হল আকারক ও গ্রাহক প্রতীক। এসব প্রতীক প্রয়োগ করে কিভাবে কোন্ নিয়মে সুবা পাওয়া যায় তাও পরিষ্কারভাবে তন্ত্রীকৃত যুক্তিবিজ্ঞানে বলে নেওয়া দরকার। এরূপ নিয়মকে বলে বাক্য গঠনের বা সুবা গঠনের নিয়ম, সংক্ষেপে—গঠনের নিয়ম (formation rules)। অবরোহতন্ত্রের যে সব অংশ বা পরিচ্ছেদের কথা বলা হল সেগুলি এই :

(১) মৌল প্রতীক, (২) (বাক্য) গঠনের নিয়ম, (৩) সংজ্ঞা, (৪) মৌল বাক্য, (৫) রূপান্তরের নিয়ম, (৬) উপপাদ্য।

এদের মধ্যে (১)—(৫) দিয়ে গঠিত হয় অবরোহতন্ত্রের ভিত্তি (axiomatic basis)। এ ভিত্তির উপরই গড়ে ওঠে উপপাদ্য সমষ্টি। আর উপপাদ্য সমষ্টিই তন্ত্রীকরণের মুখ্য বিষয়। মৌল বাক্য আর উপপাদ্য দিয়ে গঠিত হয় একটি বিশাল যুক্তিশৃঙ্খল। একটি অবরোহ তন্ত্রকে একটি মাত্র বিশাল জটিল যুক্তি বলেও বর্ণনা করা যায়।

তন্ত্রবাক্য : আমরা দেখলাম, অবরোহতন্ত্রে দু রকম বাক্য পাওয়া যায়—মৌল বাক্য ও উপপাদ্য। এ দু রকম বাক্যের সাধারণ নাম তন্ত্রবাক্য (thesis)। মানে, উপপাদ্য যেমন তন্ত্রবাক্য, সেরকম মৌল বাক্যও তন্ত্রবাক্য। মনে রাখতে হবে, সুবা মাত্রই তন্ত্রবাক্য নয়। যে সুবা স্বতসত্য তাই তন্ত্রবাক্যের মর্যাদা পায়। আমরা জানি, যুক্তিবিজ্ঞানের কাজ হল স্বতসত্যের অনুসন্ধান ও সুবিন্যস্তকরণ। এখন, সব সুবা স্বতসত্য নয়। কাজেই যুক্তিবিজ্ঞানতন্ত্রে সব সুবার স্থান থাকতে পারে না। যথা, "$p \cdot q$" বাক্যকলনের সুবা, কিন্তু তন্ত্রবাক্য নয়। কেননা, এ বাক্য স্বতসত্য নয়, সুতরাং বাক্যকলন তন্ত্রের স্বতসিদ্ধও নয়, উপপাদ্যও নয়। এ প্রসঙ্গে বলে নিতে পারি, যে কোনো ক্ষেত্রে, ক-ক্ষেত্রে, যথা জ্যামিতিতে, অবরোহতন্ত্রীকরণ করতে হলে, ক-তন্ত্র গঠন করতে হলে, দেখতে হবে তন্ত্রটি যেন নিম্নোক্ত সর্ত দুটি পূরণ করে :

(১) প্রত্যেক ক-তন্ত্র বাক্যকে ক-ক্ষেত্রে স্বতসত্য সুবা হতে হবে

(২) ক-ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি স্বতসত্য সুবাকে ক-তন্ত্রবাক্য হতে হবে।

২. PM তন্ত্রের বিভিন্ন অংশ সম্পর্কে

পূর্ববর্তী বিভাগে সাধারণভাবে অবরোহতন্ত্রের কথা বলেছি। এখন আমরা PM তন্ত্রের সংক্ষিপ্ত পরিচয় দেব, এর বিভিন্ন অংশের বা পরিচ্ছেদের উপকরণগুলির কথা বলব। তার আগে একটা কথা। আমরা "PM তন্ত্র" কথাটি ব্যবহার করছি, ঠিক। কিন্তু, মনে রাখতে হবে, এখানে যাকে PM তন্ত্র বলা হচ্ছে তা আসলে বিশাল PM তন্ত্রের একটা খণ্ডিত অংশ, আসলে তা PM-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যকলন তন্ত্র। এ কথা মনে রেখে "PM তন্ত্র" ব্যবহার করলে ক্ষতি নেই।

মৌল প্রতীক

PM-এর মৌল প্রতীক হল

(১) বাক্য গ্রাহক ঃ $p, q, r, s \ldots$ ইত্যাদি

(২) একাঙ্গী যোজক ঃ $\sim$

(৩) দ্বৈতাঙ্গী যোজক ঃ $\vee$

(৪) বন্ধনী বা যতিচিহ্ন ঃ (,), [,], { , }

(৪) সম্পর্কে একটা কথা। প্রকৃতপক্ষে PM-এতে ধনুর্বন্ধনী ও বাক্সবন্ধনীর ব্যবহার নেই, এতে ব্যবহার করা হয়েছে ভ্রূবন্ধনী ও বিন্দুবন্ধনী। PM তন্ত্রবাক্য ব্যক্ত করতে আমরা কিন্তু উক্ত তিন প্রকারের বন্ধনী ব্যবহার করব। কেবল সংজ্ঞাগুলিতে বিন্দুবন্ধনী ব্যবহার করব।

গঠনের নিয়ম

[১৪৪ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য। ওখানে সাধারণভাবে গঠনের নিয়মের কথা বলা হয়েছে।]
PM তন্ত্রে গঠনের নিয়ম নিম্নরূপ ঃ

১. যে কোনো নিঃসঙ্গ বাক্যগ্রাহক ('*p*', '*q*' ইত্যাদি) সুবা বলে গণ্য।

২. যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '$\sim$(ব)'ও সুবা বলে গণ্য।*

৩. যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '(ব) $\vee$ (ভ)'ও সুবা বলে গণ্য।*

৪. যা উক্ত ১, ২, ৩ থেকে পাওয়া যায় না, যা উক্ত নিয়মানুসারে গঠিত বাক্য থেকে সংজ্ঞা প্রয়োগ করেও পাওয়া যায় না, তা সুবা বলে গণ্য নয়।

লক্ষণীয় যে, 'ব', 'ভ'—এসব PMতন্ত্রভুক্ত প্রতীক নয়। কিন্তু (PM) তন্ত্র সম্পর্কে বলতে গেলে এদের প্রয়োজন হয়। এজন্য এদের বলে অধিতান্ত্রিক (metalogical) প্রতীক। এসব বাক্যকলনের ভাষাবিষয়ক ভাষার প্রতীক। বাক্যকলনের ভাষা সম্পর্কে উক্তি করতে এদের দরকার হয়, কিন্তু বাক্যকলনে '*p*', '*q*', '*r*' ইত্যাদি ছাড়া অন্য বাক্যপ্রতীকের ব্যবহার নেই। 'ব', 'ভ' প্রভৃতি অধিতান্ত্রিক প্রতীকের কি প্রয়োজন, দেখ। ধর, দ্বিতীয় নিয়মটি ব্যক্ত করতে চাই। 'ব', 'ভ' ইত্যাদি ব্যবহার না করে এ নিয়ম সুনির্দিষ্টভাবে ব্যক্ত করা যেত না। বলতে হত

যদি "p" সুবা হয় তাহলে "$\sim p$"ও সুবা

যদি "$p \vee q$" সুবা হয় তাহলে "$\sim(p \vee q)$"ও সুবা

যদি "$p \vee q \vee r$" সুবা হয় তাহলে "$\sim(p \vee q \vee r)$"ও সুবা, ইত্যাদি ইত্যাদি।

কিন্তু "ইত্যাদি" দিয়ে যা বলা হল তার মানে হয়ত বোঝা যাবে, কিন্তু যা বলতে চেয়েছি তা সুনির্দিষ্টভাবে বলা হল না। অধিতান্ত্রিক প্রতীক দিয়ে তা সহজেই বলা যায়।

---

* 'ব' ও 'ভ' যদি একবর্ণ সুবা হয় তাহলে বন্ধনী বাদ দেওয়া যাবে।

মৌল বাক্য

মৌল বাক্যগুলি মূল হেতুবাক্য। এ বাক্যগুলি থেকে যুক্তিবিধি অনুসারে অপর তন্ত্রবাক্য (উপপাদ্য) নিষ্কাশন করা হয়। আবার প্রত্যেকটি প্রমাণিত উপপাদ্য পরবর্তী উপপাদ্যের প্রমাণে হেতুবাক্যের কাজ করতে পারে।

অধ্যায় ১৯-এতে যে অবরোহ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে তা প্রয়োগ করে বহু বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করা হয়েছে। কিন্তু প্রত্যেক ক্ষেত্রে দরকার হয়েছে বিভিন্ন হেতুবাক্য সমষ্টি। আমরা যে পদ্ধতির কথা এখন বলতে যাচ্ছি তাতে বাক্যের সত্যতা নয়, স্বতসত্যতা প্রমাণ করা হয়। আর তা প্রমাণ করা হয় মুষ্টিমেয় মৌল বাক্যকে (আর প্রমাণিত উপপাদ্যকে) হেতুবাক্য হিসাবে নিয়ে। মৌল বাক্যগুলি বাক্যকলন অবরোহের মূল হেতুবাক্য। PM তন্ত্রের মৌল বাক্য নিম্নোক্ত পাঁচটি।

(১) $(p \vee p) \supset p$

এ সূত্রটির নাম পুনরুক্তি সংকোচের সূত্র, Tautology-র সূত্র, সংক্ষেপে Taut। আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে পুনরুক্তি সংকোচ বলে যে সূত্রের কথা বলেছি, লক্ষণীয়, সেটি সমার্থতার সূত্র, আর বর্তমান সূত্রটি প্রতিপত্তির সূত্র।

(২) $q \supset (p \vee q)$

এ সূত্রটির নাম বিকল্পযোজনার সূত্র, Addition-এর সূত্র। এর সংক্ষিপ্ত নাম Add। আমরা যে Add-এর কথা বলে আসছি তার বলে কোনো বাক্যের সঙ্গে অন্য বাক্য যোজনা করা হয় এর দক্ষিণ অঙ্গ হিসাবে (যথা, 'p'-এর সঙ্গে 'q' Add করে পাই '$p \vee q$')। কিন্তু, লক্ষণীয়, PM-এর Add সূত্র অনুসারে যোজিত বাক্যটি হবে বাম অঙ্গ (বিকল্প)।

(৩) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

এ সূত্রটিকে বিন্যাসান্তরের সূত্র বলে অভিহিত করা যায়। PM-এতে এর নাম Permutation-এর সূত্র, সংক্ষেপে—Perm। এটা আসলে আমরা যাকে Com বলে আসছি তারই এক রূপ (দুর্বলতর রূপ)। PM-এতে আলোচ্য সূত্রকে Com বলা হয় না, Comm বলে অভিহিত করা হয় অন্য একটি সূত্রকে (উপপাদ্য 4 দ্রষ্টব্য)। পূর্ববর্তী অধ্যায়ের Com হল সমার্থতার সূত্র।

(৪)* $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$

এ সূত্রটির নাম যোগকরণের সূত্র, Summation-এর সূত্র, আর এর সংক্ষিপ্ত নাম হল Sum। এ মৌল বাক্যটির বক্তব্য হল : যদি কোনো প্রাকল্পিক বাক্য সত্য হয় তাহলে—যে কোনো বাক্য এর পূর্বকল্প ও অনুকল্পের প্রত্যেকটির সঙ্গে যোগ করলে (বিকল্প হিসাবে যোজনা করলে) যে বাক্য পাওয়া যাবে তাও সত্য।

* এটি PM তন্ত্রের পঞ্চম মৌল বাক্য।

(৫)* $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$

এ সূত্রটিকে বলে যুথ্যান্তরকরণের সূত্র, Association-এর সূত্র, সংক্ষেপে Assoc। আমরা Assoc বলে যে সূত্রের কথা বলে আসছি সেটি সমার্থতার সূত্র ; কিন্তু, লক্ষণীয়, এটি প্রতিপত্তির সূত্র। আরও লক্ষণীয়, পূর্বকথিত Assoc অনুসারে, অঙ্গবাক্যের ক্রম বজায় রেখে, কেবল বন্ধনীর ক্রম পরিবর্তন করা যায়। কিন্তু আলোচ্য সূত্র অনুসারে কেবল যুথী-করণ নয়, অঙ্গবাক্যের ক্রমও পরিবর্তন করা হয়। পূর্বকল্প ও অনুকল্পের অন্তর্ভুক্ত অঙ্গগুলির ক্রম লক্ষ কর। প্রথমটিতে : p, q, r আর দ্বিতীয়টিতে : q, p, r। আমাদের পূর্বপরিচিত Assoc ও Com-কে এভাবে ব্যক্ত করার তাৎপর্য হল এই : এর উপপাদন ক্ষমতা অনেক বেশী।

PM-এর মৌল আকারক প্রতীক হল : '~' ও 'v'। কাজেই এর মৌল বাক্যগুলিও 'v' (ও '~') দিয়েই ব্যক্ত হবে—এটাই আমরা আশা করেছিলাম। কিন্তু, লক্ষণীয়, প্রত্যেকটি সূত্রের মুখ্য যোজক হল '⊃', যে যোজক সংজ্ঞার বলে উপস্থিত করা যায়। এমন যোজক (সংজ্ঞা দিয়ে যা আমদানি করতে হয়) দিয়ে মৌল বাক্যগুলি ব্যক্ত হল কেন ? এর উত্তর হল : '⊃' দিয়ে ব্যক্ত বাক্য আরও সহজবোধ্য। যথা, প্রথম মৌল বাক্যটি ব্যক্ত করা যেত এভাবে : "$\sim(p \vee p) \vee p$", কিন্তু এর চেয়ে "$(p \vee p) \supset p$" আরও সহজবোধ্য।

এখানে PM সংকেতলিপি সম্পর্কে একটা কথা বলে নিতে চাই। PM-এতে প্রত্যেক তন্ত্রবাক্যের—কি মৌল বাক্যের কি উপপাদ্যের—বামধারে '⊢' চিহ্নটি থাকে আর সমগ্র বাক্যটিকে বিন্দুবন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়। '⊢' হল ঘোষনার, গ্রহণের, বা সত্যতাদাবী-করণের চিহ্ন (assertion sign) ; বলা যায়, প্রতীকটি "এটা সত্য যে"-এর সংক্ষেপক। যথা এ সংকেতলিপিতে প্রথম মৌল বাক্যটি লেখা হয় এভাবে

$$\vdash : p \vee p \cdot \supset \cdot p$$

লক্ষণীয়, প্রথম বিন্দুযুগল বাম ধারের বহির্বন্ধনীর কাজ করছে (আর ডান ধারের বহির্বন্ধনী উহ্য আছে)। বিন্দুবন্ধনীর বদলে সাধারণ বন্ধনী ব্যবহার করলে এ বাক্যটি এ আকার ধারণ করত :

$$\vdash [(p \vee p) \supset p]$$

আমরা কিন্তু '⊢' চিহ্নটি ব্যবহার করব না, আর বহির্বন্ধনীও বাদ দেব। PM তন্ত্রের পরিচয় দিতে গিয়ে বাক্যগুলি (পৃথক পৃথক ছত্রে) লিখব। ধরে নিতে হবে, প্রত্যেকটির পূর্বে একটি '⊢' প্রচ্ছন্ন আছে, বা প্রত্যেকটি তন্ত্রবাক্য। আমাদের প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে উক্ত সূত্রটি লেখা হবে এভাবে

$$(p \vee p) \supset p$$

সংজ্ঞা

সংজ্ঞা সম্পর্কে এ বইতে এতক্ষণ পর্যন্ত কিছু বলা হয় নি। কথাটি আমরা প্রয়োগ করেছি ইংরেজী 'definition'-এর প্রতিশব্দ হিসাবে। 'Definition' কথাটি একাধিক অর্থে

* এটি PM তন্ত্রের চতুর্থ মৌল বাক্য।

ব্যবহৃত হয়, এবং দার্শনিকরা বিভিন্ন প্রকারের সংজ্ঞার কথা বলেন। আমরা কথাটি প্রয়োগ করেছি শাব্দিক সংজ্ঞা (verbal definition) অর্থে। আরও সঠিকভাবে বলতে গেলে, 'সংজ্ঞা' বলতে আমরা বুঝছি প্রয়োগপ্রদর্শক সংজ্ঞা (definition in use)। এ অর্থে সংজ্ঞা মাত্রই কোনো প্রতীকের সংজ্ঞা। এ সংজ্ঞার দু অংশ ঃ যে প্রতীকের অর্থ বা প্রয়োগবিধি বলে দেওয়া হয়, আর যে শব্দ বা শব্দসমষ্টি দিয়ে অর্থ বলে দেওয়া বা প্রয়োগ দেখানো হয়। এ সংজ্ঞার আদর্শ আকার হল

"———"-এর অর্থ হল "———"-এর যা অর্থ তাই

"———" বলতে বুঝব "———" যা বোঝায় তাই

সংকেতলিপিতে

$$——— \cdot = \cdot ——— \quad \text{Df}$$

মানে, সংজ্ঞা হল কোনো প্রতীকবিষয়ক এমন বাক্য—যে বাক্যে বলা হয় অমুক প্রতীকটির অর্থ হবে অমুক পূর্বপরিচিত প্রতীকটির যা অর্থ তাই। যথা

$$p \supset q \cdot = \cdot \sim p \vee q \qquad \text{Df}$$

এতে '$\supset$'-এর অর্থ বলে দেওয়া হয়েছে, এর প্রয়োগ দেখিয়ে দেওয়া হয়েছে। এ সংজ্ঞার বলে (যে কোনো বাক্যের অন্তর্গত) '$\sim p \vee q$'-এর জায়গায় '$p \supset q$', আর '$p \supset q$'-এর জায়গায় '$\sim p \vee q$' নিবেশন করা যাবে।

যেহেতু সংজ্ঞার এক ধারের বাক্যের পরিবর্তে অন্য ধারের বাক্য নিবেশন করা যায়, সেজন্য মনে হতে পারে যে সংজ্ঞা আর সমার্থতা সূত্রের মধ্যে কোনো ভেদ নেই। বস্তুত আমরা অধ্যায় ৫ ও ৬-এতে, 'সংজ্ঞা', 'লিপ্যন্তরের সূত্র', 'সমার্থতার সূত্র'—এ কথাগুলি একই অর্থে প্রয়োগ করেছি। এরূপ প্রয়োগ করেছি জটিলতা এড়াবার জন্য। ওখানে সংজ্ঞা সম্পর্কে কিছু বলিনি, ফলে সংজ্ঞা ও সমার্থতা সূত্রের পার্থক্য অগ্রাহ্য করাতে কিছু ক্ষতি হয় নি। এখন সংজ্ঞা সম্পর্কে বলতে গিয়ে এদের পার্থক্যের কথা বলে নিতে চাই। সমার্থতা সূত্র হল উক্তি বা বিবৃতি। এবং বিবৃতি মাত্রই সত্য অথবা মিথ্যা। আর সংজ্ঞা হল কোনো বিশেষ অর্থে কোনো প্রতীক প্রয়োগের প্রস্তাব। আর প্রস্তাব বা সাব্যস্তকরণ কোনো বিবৃতি নয়। সুতরাং সংজ্ঞা সম্পর্কে সত্যতা মিথ্যাত্বের কথা ওঠে না। একটা উদাহরণ।

$$p \cdot q \cdot = \cdot \sim (\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df}$$

$$p \cdot q \cdot \equiv \cdot \sim (\sim p \vee \sim q)$$

এ বাক্য দুটি তুলনা করা যাক। প্রথমটিতে " · "-এর অর্থ বলা হয়েছে। এটি তন্ত্রবাক্য নয়, এতে কোনো উক্তি বা বিবৃতি করা হয় নি। এতে কেবল একটি প্রতীক প্রয়োগের প্রস্তাব করা হয়েছে, প্রয়োগবিধান দেওয়া হয়েছে, বা তন্ত্রকার কিভাবে একটি প্রতীক ব্যবহার করবেন বলে সাব্যস্ত করেছেন—তা বলা হয়েছে। দ্বিতীয় বাক্যটিতে একটি স্বতসত্য ব্যক্ত হয়েছে। এটি একটি তন্ত্রবাক্য—PM-এর উপপাদ্য। এর প্রমাণ দরকার। তারপর, প্রথমটির '=' সত্যাপেক্ষ যোজক নয়, (PM) বাক্যকলনের তন্ত্রবাক্যে ও সূত্রে এর স্থান

নেই। PM-এর সংকেতলিপিতে লিখলে উক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য আরও সহজে ধরা পড়ত। ঐ লিপিতে

$$p \cdot q \cdot = \cdot \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df}$$
$$\vdash p \cdot q \cdot \equiv \cdot \sim(\sim p \vee \sim q)$$

প্রথমটির বামে '⊢' চিহ্ন থাকতে পারে না।

উক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য এভাবে ব্যাখ্যা করা যেত। প্রথম বাক্যে একটি প্রতীক সম্পর্কে বলা হয়েছে, এতে '$p \cdot q$' উল্লেখ* করা হয়েছে। আর দ্বিতীয় বাক্যে '$p \cdot q$, প্রয়োগ* করা হয়েছে এবং এর অশাব্দ বাচ্য সম্বন্ধে কিছু বলা হয়েছে। আরও একটা কথা। উক্ত সংজ্ঞার জোরেই '$\sim(\sim p \vee \sim q)$'-এর জায়গায় '$p \cdot q$' লেখা যায়। এ সংজ্ঞার "$\cdot = \cdot$ Df" হল অধিতান্ত্রিক প্রতীক, এটি এ বিধান দেয় যে অমুক প্রতীকের পরিবর্তে অমুক প্রতীক নিবেশন করতে পার। কিন্তু 'ব ≡ ভ' আকারের কোনো বাক্যের জোরে এমন কি "'ব' সম 'ভ'" আকারের বাক্যের বলে 'ব'-এর পরিবর্তে 'ভ' বা 'ভ'-এর পরিবর্তে 'ব' নিবেশন করা যায় না। কেননা, 'ব ≡ ভ' বা "'ব' সম 'ভ'" আকারের বাক্য, সংজ্ঞার মত, নিবেশনের নিয়ম নয়। এরূপ বাক্যের বক্তব্য হল '≡'-এর বা 'সম'-এর দু ধারের বাক্যের সত্যমূল্য অভিন্ন। এরূপ নিবেশন করতে একটি যুক্তিবিধির (Interchange বা সমনিবেশন বিধির) সাহায্য দরকার। আমরা পরে দেখব যে, PM তন্ত্রে এ বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা নেই। PM বাক্যকলন তন্ত্রে যে কয়টি সংজ্ঞা প্রয়োগ করা হয় সেগুলি নিচে উল্লেখ করা হল।

1. $p \supset q \cdot = \cdot \sim p \vee q$ Df
2. $p \cdot q \cdot = \cdot \sim(\sim p \vee \sim q)$ Df
3. $p \equiv q \cdot = \cdot (p \supset q) \cdot (q \supset p)$ Df

PM বাক্যকলনে আরও দুটি সংজ্ঞার সাক্ষাৎ পাই ঃ

4. $p \vee q \vee r \cdot = \cdot (p \vee q) \vee r$ Df
5. $p \cdot q \cdot r \cdot = \cdot (p \cdot q) \cdot r$ Df

শেষের দুটি গৌণ সংজ্ঞা, এদের লক্ষ্য হল বন্ধনীমুক্তি।

PM-এতে সংজ্ঞাগুলি উক্তরূপে ব্যক্ত হয়েছে। কিন্তু এদের অধিতান্ত্রিক প্রতীক দিয়ে ব্যক্ত করা আরও সুবিধাজনক। যথা

প্রথম সংজ্ঞাটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

১. ব ⊃ ভ · = · ~ব ∨ ভ Df

ধরা যাক, উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে আমরা "$\sim(p \cdot q) \vee [p \supset (p \cdot q)]$" থেকে "$(p \cdot q) \supset [p \supset (p \cdot q)]$" নিষ্কাশন করতে চাই। এ নিষ্কাশন করা যায় এভাবে অতি সহজে

(1) $\sim(p \cdot q) \vee [p \supset (p \cdot q)]$
(2) $(p \cdot q) \supset [p \supset (p \cdot q)]$ [সংজ্ঞা ১ অনুসারে]

---

* ৩২ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।

উক্ত সংজ্ঞায় 'ব', 'ভ' কিন্তু 'p', 'q'-এর মত একবর্ণ বাক্যগ্রাহক নয়। 'ব', 'ভ'-এর আকার নির্দিষ্টভাবে বলা হয় নি, এসব একবর্ণ প্রতীকও বোঝাতে পারে, জটিল বাক্যও বোঝাতে পারে, যথা, '$p \cdot q$' যেমন 'ব' বলে গণ্য, সেরূপ "$p \cdot (q \vee r)$"ও 'ব' বা 'ভ' বলে গণ্য। কিন্তু একবর্ণ প্রতীক 'p', 'q' ইত্যাদি দিয়ে সংজ্ঞা দিলে অকারণ জটিলতার সৃষ্টি হয়। যথা উক্ত (1) থেকে (2) নিষ্কাশন করতে হলে প্রথমে সংজ্ঞা 1-এতে 'p'-এর বদলে '$p \cdot q$' আর 'q'-এর জায়গায় '$p \supset (p \cdot q)$' বসিয়ে নিতে হবে।

'ব', 'ভ' ব্যবহার করে প্রথম তিনটি সংজ্ঞা (প্রধানত এ তিনটিই আমরা ব্যবহার করব) আবার লেখা হল, এবং এদের নামকরণ করা হল।

১. ব ⊃ ভ · = · ~ব ∨ ভ Df — এ সংজ্ঞাটির নাম Def ⊃
২. ব · ভ · = · ~(~ব ∨ ~ভ) Df — ,, ,, ,, Def ·
৩. ব ≡ ভ · = · (ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব) Df — ,, ,, ,, Def ≡

রূপান্তরবিধি

রূপান্তরবিধি বা যুক্তিবিধির সাহায্যে মৌল বাক্য থেকে উপপাদ্য নিষ্কাশন করা হয়। PM তন্ত্রে স্বীকৃত যুক্তিবিধি মাত্র দুটি : নিবেশনবিধি (নিবেশনের নিয়ম)* ও বিচ্ছেদন বিধি (বিচ্ছেদনের নিয়ম)**। অধ্যায় ১৯-এতে যে পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে তা প্রয়োগ করে বাক্য নিষ্কাশন করতে হলে দরকার অসংখ্য হেতুবাক্য আর বহু (দেখেছি, অন্তত ১৯টি) যুক্তিবিধি। আমরা দেখছি ঐ অধ্যায়ের ১৯টি যুক্তিবিধিও পর্যাপ্ত নয়, এগুলি দিয়ে সব অবরোহণযোগ্য সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা যায় না। কিন্তু PM-তন্ত্রকারদের অনন্য-সাধারণ কৃতিত্ব হল এই যে এ তন্ত্রে কেবল ৫টি (বা ৪টি†) মৌল বাক্য থেকে কেবল দুটি যুক্তিবিধির (ও সংজ্ঞার) সাহায্যে অসংখ্য স্বতসত্য—বস্তুত বাক্যকলনের সকল স্বতসত্য—নিষ্কাশন করা যায়। এখন PM-স্বীকৃত বিধি দুটি আলোচনা করব। বলা বাহুল্য, এ বিধিগুলি হল স্বতসত্য-উদ্ভাবন প্রক্রিয়া।

নিবেশনের নিয়ম অধ্যায় ৪-এতে বিশদভাবে আলোচিত হয়েছে (৮০ পৃঃ দ্রষ্টব্য)। নিবেশন প্রক্রিয়ার বৈশিষ্ট্য হল এই যে এ প্রক্রিয়ার সাহায্যে কোনো স্বতসত্য থেকে অসংখ্য স্বতসত্য উদ্ভাবন করা যায়। এ প্রক্রিয়া মূল বাক্যের স্বতসত্যতা বজায় রাখে। মানে নির্ভুলভাবে নিবেশন করলে স্বতস্বত্য বাক্য কখনও অ-স্বতসত্য বাক্যে পরিণত হতে পারে না। কোনো স্বতসত্য বাক্যে বার বার নিবেশন করে অসংখ্য স্বতসত্য পাওয়া যায়। উদাহরণ : আমরা জানি $p \supset p$

স্বতসত্য। এখন, এ বাক্যে নিবেশন করে পেতে পারি (কি নিবেশন করা হল তা সহজবোধ্য) :

* Rule of Substitution
** Rule of Detachment
† পঞ্চম বাক্য Assoc-কে মৌল বাক্য বলে স্বীকার না করলেও চলে।

$$(p \cdot q) \supset (p \cdot q)$$
$$\sim(p \cdot q) \supset \sim(p \cdot q)$$
$$(p \vee q \vee r) \supset (p \vee q \vee r)$$
$$[p \supset (p \supset q)] \supset [p \supset (p \supset q)]$$

কোনো বাক্যে কোন্ বাক্যগ্রাহকের ('p', 'q' ইত্যাদির) পরিবর্তে কী নিবেশন করা হল, এবং নিবেশন করে কি পাওয়া গেল তা সংকেতলিপিতে কিভাবে ব্যক্ত হয়, দেখ। ধরা যাক, 'ব' কোনো বাক্য, আর 'p' এর অন্তর্ভুক্ত কোনো আণবিক বাক্য। আরও ধরা যাক, 'p'-এর পরিবর্তে কোনো বাক্য 'ভ' নিবেশন করা হল। ব্যাপারটা বোঝানো হবে এভাবে—

$$\text{ব}\frac{\text{ভ}}{p}$$

যথা, '$p \supset p$' থেকে '$(p \cdot q) \supset (p \cdot q)$' যদি নিষ্কাশন করি, ('$p \supset p$'-এর '$p$'-তে '$p \cdot q$' নিবেশন করে) তাহলে তা ব্যক্ত করা হবে "ভগ্নাংশ"-এর আকারে এভাবে ঃ

$$p \supset p \frac{p \cdot q}{p} \qquad [\text{ব} = p \supset p, \ \text{ভ} = p \cdot q]$$

এ প্রতীক সমষ্টি পড়তে হবে এভাবে ঃ '$p \supset p$'-এর 'p'-তে '$p \cdot q$' নিবেশন করা হল (বা, করে পেলাম······)। মনে রাখতে হবে, যাতে পরিবর্ত নিবেশন করা হয় তা থাকে '—'-এর নিচে, আর যা নিবেশন করা হয় তা থাকে '—'-এর উপরে*। এখন, যে বাক্যের, 'ব'-এর, কোনো অংশে নিবেশন করা হয় সে সম্পূর্ণ বাক্য উক্তরূপ ভাষ্যে উল্লেখ করা হয় না ; 'ব'-এর অবরোহ বাক্য-অনুক্রমে 'ব'-এর ক্রমিক সংখ্যাই উল্লেখ করা হয়। যথা,

$$p \supset p \quad (1)$$
$$(p \cdot q) \supset (p \cdot q) \quad (2) \qquad \left[p \supset p \frac{p \cdot q}{p}\right]$$

এ অবরোহটি উক্ত সংকেতলিপিতে এভাবে ব্যক্ত হয় ঃ

$$p \supset p \quad (1)$$
$$\left[(1) \frac{p \cdot q}{p}\right] (p \cdot q) \supset (p \cdot q) \quad (2)$$

অধ্যায় ১৯-এর অবরোহে আমরা ভাষ্য লিখেছি অবরোহিত বাক্যের ডান ধারে। লক্ষণীয়, PM-এর অবরোহে (উপপাদ্যের প্রমাণে) আমরা ভাষ্য লিখব বাম ধারে বাক্সবন্ধনীর মধ্যে। আরও লক্ষণীয় যে, যে বিধি (Substitution বিধি) প্রয়োগ করা হল ভাষ্যে তার নাম উল্লেখের প্রয়োজন নেই। উক্ত অবরোহের দ্বিতীয় পঙ্‌ক্তি নিয়োক্তরূপে লেখার দরকার নেই ঃ

$$(p \supset p) \quad (১)$$
$$\left[(১) \ \frac{p \cdot q}{p} \text{ Subs}\right] (p \cdot q) \supset (p \cdot q) \quad (২).$$

* PM-এর রীতি থেকে ১৬৪ পৃষ্ঠায় অনুসৃত রীতির পার্থক্য লক্ষ কর। ওখানে যাতে নিবেশন করা হয়েছে তা '—'-এর উপরে, আর যা নিবেশন করা হয়েছে তা '—'-এর নিচে লেখা হয়েছে।

উক্তরূপ "ভগ্নাংশ" দেখেই বুঝতে হবে নিবেশনবিধি প্রয়োগ করা হয়েছে। উক্ত (2) থেকে আর একটি পর্বে পেতে পারি

$$\left[(2)\ \frac{r}{p},\ \frac{s}{q}\right]\quad (r\cdot s)\supset(r\cdot s)\qquad(3)$$

অবশ্য এ পর্বটি আমরা সরাসরি (1) থেকেই পেতে পারতাম এভাবে

$$\left[(1)\ \frac{r\cdot s}{p}\right]\quad (r\cdot s)\supset(r\cdot s)$$

৮০ পৃষ্ঠায় সাধারণভাবে নিবেশনের নিয়মের কথা বলা হয়েছে। ঐ নিয়ম অনুসারে যেকোনো বাক্যস্থ প্রতীকের (সে বাক্য স্বতসত্য হোক কি পরতসাধ্য হউক) জায়গায় কিছু নিবেশন করা যায়। PM-এর তন্ত্রবাক্য স্বতসত্য। কাজেই এ তন্ত্রে যে নিবেশনবিধি সে বিধি অনুসারে কেবল স্বতসত্য বাক্যেই, তন্ত্রবাক্যেই, পরিবর্ত নিবেশন করা যায়। এজন্য PM-এর নিবেশনবিধি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

যদি 'ব' তন্ত্রবাক্য হয়,

'p_1', 'p_2',......'p_n' 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগ্রাহক হয়

'ভ১', 'ভ২',......'ভ$_n$'—এসব সুবা হয়*।

তাহলে

$$\text{'ব}\left[\frac{\text{ভ}_১}{p_1},\ \frac{\text{ভ}_২}{p_2},\ldots\ldots\frac{\text{ভ}_n}{p_n}\right]\text{'ও তন্ত্রবাক্য।}$$

মনে রাখতে হবে, এ বিধির 'ভ১', 'ভ২' ইত্যাদিকে যে পৃথক পৃথক সুবা হতে হবে এমন কথা নেই। ধরা যাক, প্রদত্ত 'ব' হল : $(p\cdot q)\supset(p\vee q\vee r)$। এমন হতে পারে যে : ভ১$=s$, ভ২$=s$, ভ৩$=s$। মানে উক্ত বাক্য থেকে এ অবরোহটি পেতে পারি

$$(p\cdot q)\supset(p\vee q\vee r)\qquad(1)$$

$$\left[(1)\ \frac{s}{p},\ \frac{s}{q},\ \frac{s}{r}\right](s\cdot s)\supset(s\vee s\vee s)\qquad(2)$$

PMতন্ত্র-অনুমোদিত দ্বিতীয় যুক্তিবিধিটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :

যদি 'ব ⊃ ভ', এবং 'ব' এদের উভয়ই তন্ত্রবাক্য হয়, তাহলে 'ভ'ও তন্ত্রবাক্য

মানে যদি 'ব ⊃ ভ' স্বতসত্য হয়, আবার 'ব'ও স্বতসত্য হয়, তাহলে 'ভ'ও স্বতসত্য। একে বলে বিচ্ছেদনের বিধি বা বিচ্ছিন্নকরণের বিধি (Rule of Detachment)**।

* বলা বাহুল্য, এখানে 'তন্ত্রবাক্য' বলতে PM-এর তন্ত্রবাক্য আর 'সুবা' বলতে PM-এর সুবা বুঝতে হবে।

** কেউ কেউ একে MP বলেও অভিহিত করেন।

আমরা একে Rule of Inference বা সংক্ষেপে Inf বলে উল্লেখ করব। এ নিয়মের সঙ্গে MP-এর সাদৃশ্য লক্ষণীয়। আমরা MP লিখেছি এভাবে—

$$\frac{p \supset q \quad p}{q}$$

Inf বিধিকেও অনুরূপভাবে নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

$$\frac{\text{ব} \supset \text{ভ} \quad \text{ব}}{\text{ভ}}$$

আকারগত সাদৃশ্য থাকলেও এদের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ বৈসাদৃশ্যও আছে। প্রথমেই MP-এর বাক্যগ্রাহক 'p', 'q' আর Inf-এর বাক্যগ্রাহক 'ব', 'ভ'-এর পার্থক্য লক্ষণীয়। 'p', 'q'-এতে নিবেশন করা যাবে যেকোনো সত্য বা মিথ্যা বাক্য, কিন্তু Inf-এর অধিতান্ত্রিক প্রতীক 'ব', 'ভ'-এতে নিবেশন করা যাবে কেবল স্বতসত্য বাক্য—তন্ত্রবাক্য। Inf বিধি PM-এতে ব্যবহার করা হয় কোনো তন্ত্রবাক্য থেকে অন্য তন্ত্রবাক্য নিষ্কাশনের জন্য। কাজেই 'ব ⊃ ভ'-এর পূর্বকল্প ও অনুকল্প, এবং বিচ্ছিন্নকৃত (নিষ্কাশিত) বাক্য 'ভ'—এদের সবগুলিকে হতে হবে স্বতসত্য। Inf ও MP একইভাবে প্রয়োগ করা হয়, ঠিক। কিন্তু Inf-এর বাক্যগ্রাহকে নিবেশন করা যায় তন্ত্রবাক্য, আর MP-এতে যেকোনো বাক্য। MP দিয়ে কোনো বাক্যের সত্যতা প্রমাণ করা হয়, আর Inf দিয়ে কোনো বাক্যের স্বতসত্যতা।

Inf বিধি প্রয়োগের একটা উদাহরণ।

[Add]	$q \supset (p \vee q)$	(1)
$\left[\text{Add } \frac{(p \vee p) \supset p}{q}\right]$	$[(p \vee p) \supset p] \supset \{p \vee [(p \vee p) \supset p]\}$	(2)
[Taut]	$(p \vee p) \supset p$	(3)
[(2), (3), Inf]	$p \vee [(p \vee p) \supset p]$	

উক্ত উদাহরণ থেকে বোঝা যাবে PM উপপাদ্য প্রমাণ কিরূপ আকার পরিগ্রহ করে। PM উপপাদ্যের প্রমাণ কী আকার ধারণ করে তার আরও দু একটি নমুনা এ প্রসঙ্গে দেওয়া হল।

উদাহরণ ১

[Add]	$q \supset (p \vee q)$	(1)
$\left[\text{Add } \frac{\sim p}{p}\right]$	$q \supset (\sim p \vee q)$	(2)
[(2), Def ⊃]	$q \supset (p \supset q)$	

সহজবোধ্য করার জন্য Add সূত্রটি উক্ত অবরোহের অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। কিন্তু তার প্রয়োজন ছিল না, এভাবেও অবরোহটি লেখা যেত

$$\left[\text{Add}\ \frac{\sim p}{p}\right] \quad q \supset (\sim p \vee q) \quad (১)$$

$$[\ (১),\ \text{Def} \supset\ ] \quad q \supset (p \supset q)$$

PM অবরোহে হেতুবাক্য হিসাবে কেবল মৌল বাক্যগুলিই যে ব্যবহৃত হয় তা নয়। যে উপপাদ্যের প্রমাণ হয়ে গেছে পরবর্তী উপপাদ্যের প্রমাণে সে উপপাদ্যও হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে। মনে কর, প্রমাণ হয়ে গেছে যে

$$\sim p \vee p$$

এবং মনে কর, এটি PM-এর নবম উপপাদ্য—এর ক্রমিক সংখ্যা হল 9। এবার নিয়োক্ত প্রমাণটি দেখ।

উদাহরণ ২

$$[\ \text{Perm}\ ] \qquad (p \vee q) \supset (q \vee p) \qquad (1)$$

$$\left[\ (1)\ \frac{\sim p}{p},\ \frac{p}{q}\ \right] \qquad (\sim p \vee p) \supset (p \vee \sim p) \quad (2)$$

$$[\ 9\ ] \qquad \sim p \vee p \qquad (3)$$

$$[\ (2), (3), \text{Inf}\ ] \qquad p \vee \sim p$$

এ প্রমাণটি আরও সংক্ষেপে লেখা যায়। কেননা মৌল বাক্যগুলি বা যে উপপাদ্য পরবর্তী উপপাদ্যের হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহৃত হয়, প্রমাণে সেগুলির পুনরাবৃত্তির প্রয়োজন হয় না, সেগুলির নাম বা ক্রমিক সংখ্যা উল্লেখ করলেই চলে। কাজেই উক্ত অবরোহটি এভাবে লেখা যেত ঃ

$$\left[\ \text{Perm}\ \frac{\sim p}{p},\ \frac{p}{q}\ \right] \qquad (\sim p \vee p) \supset (p \vee \sim p) \qquad (১)$$

$$[\ ১,\ 9,\ \text{Inf}\ ] \qquad p \vee \sim p$$

দ্বিতীয় পঙ্‌ক্তিতে বলা হয়েছে প্রথম পঙ্‌ক্তি, (১), ও 9 সংখ্যক উপপাদ্য থেকে Inf-এর বলে পাওয়া গেল ঃ $p \vee \sim p$।

উক্তরূপ অবরোহে, সর্বশেষ বাক্যটি কোনো ক্রমিক সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করার দরকার নেই, কেননা পরবর্তী কোনো ভাষ্যে এ বাক্যের উল্লেখ থাকে না। লক্ষণীয় যে উক্ত উদাহরণগুলির সর্বশেষ বাক্যে কোনো ক্রমিক সংখ্যা নেই।

আর একটা কথা। PM-এতে বাক্য নিষ্কাশন করতে গিয়ে প্রয়োগ করা হয় সংজ্ঞা (Def —), নিবেশনবিধি ও Inf বিধি। নিবেশন বিধির প্রয়োগ বোঝা যায় "ভগ্নাংশ" দেখে। এজন্য PM অবরোহের ভাষ্যে বাক্সবন্ধনীর মধ্যে থাকে কেবল ঃ

মৌল বাক্যের বা প্রমাণিত উপপাদ্যের নাম*, প্রমাণিত উপপাদ্যের ও পূর্ববর্তী পঙ্‌ক্তির ক্রমজ্ঞাপক সংখ্যা, ভগ্নাংশ, আর "Def" ও "Inf"—এ কথাগুলি।

এছাড়া ভাষ্যে আর কিছুর স্থান নেই।

PM উপপাদ্য প্রমাণ করতে আমরা যে ভাষ্য লিখব তার কোনো কোনোটিতে কিন্তু

Adj, HS, Int

এ কথাগুলি থাকবে। "Adj" হল "Adjunction"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ, "HS" "Hypothetical Syllogism"-এর, "Int" "Rule of Interchange"-এর। কিন্তু উক্ত নামের যুক্তিবিধি ত PM-অনুমোদিত নয়। তাহলে ভাষ্যে এদের নামের স্থান হবে কি করে? নিচের অংশে এ প্রশ্নের জবাব পাবে।

উপবিধি

অধ্যায় ৪-এতে ৪ ও ৯ সংখ্যক বিভাগে আমরা দু রকম নিবেশনের কথা বলেছি, পরিবর্ত নিবেশন ও সমনিবেশন, সমবেশন বা Interchange বা Substitution of Equivalents। PM-এতে সমনিবেশনের স্থান নেই, এখানে নিবেশন বলতে বুঝতে হবে কেবল পরিবর্ত নিবেশন। এটা কিন্তু সহজবোধ্য যে যদি 'ব' ও 'ভ' সমার্থক হয় তাহলে কোনো স্বতসত্য বাক্যের কোনো অংশে 'ব'-এর পরিবর্তে 'ভ' আর 'ভ'-এর পরিবর্তে 'ব' নিবেশন করলে মূল বাক্যের স্বতসত্যতা নিষ্কাশিত বাক্যে বজায় থাকবে। উদাহরণ।

নিম্নোক্ত বাক্য দুটি PM তন্ত্রবাক্য—

$p \supset (p \vee q)$ [উপপাদ্য 18 দেখ]

$p \equiv \sim\sim p$ [উপপাদ্য 61 দেখ]

এখন, ধরা যাক, নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে হবে ঃ

$p \supset (\sim\sim p \vee q)$

এখন, "$p \supset (p \vee q)$" নিয়ে এতে দ্বিতীয় 'p'-এর পরিবর্তে এর সমার্থক '$\sim\sim p$ নিবেশন করে (Int বিধি অনুসারে) সহজেই পাওয়া যেত ঃ $p \supset (\sim\sim p \vee q)$। কিন্তু PM-এতে সমনিবেশনের ব্যবস্থা নেই। পরে দেখব, PM-অনুমোদিত যুক্তিবিধির সাহায্যেই সমবেশন বিধি প্রয়োগের যাথার্থ্য সমর্থন করা যায়। এভাবে কোনো বিধির যাথার্থ্য প্রমাণ করে যে বিধি পাওয়া যায় তাকে বলা হয় উপবিধি বা নিষ্কাশিত বিধি। পরবর্তী বিভাগে Int উপপাদ্য বলে যে উপবিধি প্রমাণ করা হয়েছে তাতে PM-এর প্রমাণে সমবেশনের প্রয়োগ সমর্থন করা হয়েছে। এ উপবিধি প্রমাণের পরবর্তী প্রমাণগুলির ভাষ্যে "Int" থাকতে বাধা নেই।

সেরকম PM-এতে HS বিধি বা Adj বিধি প্রয়োগেরও ব্যবস্থা নেই। মনে কর, প্রমাণ করা হয়েছে যে

$p \supset (p \vee p)$ [উপপাদ্য 7 দেখ]

* কোনো কোনো উপপাদ্যেরও নামকরণ করা হয়েছে

এবং এখন প্রমাণ করতে হবে যে : $p \supset p$

HS বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা থাকলে এ বাক্য প্রমাণ করা যেত এভাবে অতি সহজে :

[উপপাদ্য 7] $p \supset (p \vee p)$ (1)
[Taut] $(p \vee p) \supset p$ (2)
[(1), (2), HS] $p \supset p$

কিন্তু PM-এতে HS প্রয়োগের ব্যবস্থা নেই, ফলে PM অবরোহ অত্যন্ত জটিল আকার ধারণ করে। আবার, মনে করা যাক,

নিম্নোক্ত উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করা হয়েছে

$p \supset \sim\sim p$ [উপপাদ্য 11 দেখ]
$\sim\sim p \supset p$ [উপপাদ্য 13 দেখ]

এবং এখন প্রমাণ করতে হবে যে

$$p \equiv \sim\sim p$$

যদি Adj বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা থাকত তাহলে এ বাক্য প্রমাণ করা যেত এভাবে অতি সহজে :

[উপপাদ্য 11] $p \supset \sim\sim p$ (1)
[উপপাদ্য 13] $\sim\sim p \supset p$ (2)
[(1), (2), Adj] $(p \supset \sim\sim p) \cdot (\sim\sim p \supset p)$ (3)
[(3), Def ≡] $p \equiv \sim\sim p$

কিন্তু PM-এতে Adj বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা নেই। দুটি বাক্যের স্বতসত্যতা প্রমাণ করা হলেও এদের সংযুক্ত করে যে যৌগিক বাক্য পাওয়া যাবে তার স্বতসত্যতা দাবী করতে পার না (Adj স্বীকার না করলে)। ফলে উক্তরূপ বাক্যের প্রমাণ খুব জটিল আকার ধারণ করে। আমরা কিন্তু উপবিধি হিসাবে HS আর Adj প্রয়োগ করব। কিন্তু তার পূর্বে PM-স্বীকৃত বিধি দিয়ে নিম্নোক্ত উপপাদ্য দুটি প্রমাণ করে নেব।

HS উপপাদ্য : যদি 'ক ⊃ খ' আর 'খ ⊃ গ' তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'ক ⊃ গ'ও তন্ত্রবাক্য।

Adj উপপাদ্য : যদি 'ব' ও 'ভ' তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে "ব · ভ"ও তন্ত্রবাক্য।

PM-এর উপপাদ্যের প্রমাণ খুব সহজ ব্যাপার নয়। কেননা কেবল ৫টি মৌল বাক্যকে এবং প্রমাণিত উপপাদ্যকে হেতুবাক্য করে নিয়ে কেবল দুটি যুক্তিবিধি (ও তিনটি উপবিধি) নিয়ে অসংখ্য তন্ত্রবাক্য নিষ্কাশন করতে হয়। যত্ন সহকারে অনুশীলন না করলে আলোচ্য অবরোহ পদ্ধতি আয়ত্ত করা শক্ত। আমরা পরবর্তী বিভাগে অনেকগুলি উপপাদ্যের পূর্ণ প্রমাণ দিয়ে দিলাম। এ প্রমাণ করতে গিয়ে সব সময় যে PM-তন্ত্রকারদের অনুসরণ করেছি তা নয়।

PM উপপাদ্য প্রমাণ করতে গেলে নিচের ইঙ্গিত দুটি মনে রাখবে।

প্রথমত, দেখবে কোনো মৌল বাক্যে বা প্রমাণিত উপপাদ্যে পরিবর্ত নিবেশন করে উপপাদ্যটি নিষ্কাশন করা যায় কিনা।

দ্বিতীয়ত, দেখবে নিবেশনের সাহায্যে এমন প্রাকল্পিক বাক্য পাওয়া যায় কিনা—যার অনুকল্প হল নিষ্কাশনীয় বাক্য আর পূর্বকল্প কোনো মৌল বাক্য বা প্রমাণিত উপপাদ্য।

যদি এরূপ বাক্য গঠন সম্ভব হয় তাহলে Inf-এর সাহায্যে ঈপ্সিত বাক্য পেয়ে যাবে।

এ প্রসঙ্গে একটা কথা। PM অত্যন্ত দুর্বোধ্য বই। তোমরা সবাই বইটি পড়বে এটা আশা করি না। তবে এ অধ্যায়টি আয়ত্ত করতে পারলে PM-এর সংক্ষিপ্ত সংস্করণের Section A : Theory of Deduction নামক অংশ* পড়ে বুঝতে পারবে আশা করি।

PM তন্ত্রের ভূমিকা রচনা শেষ হল। এবার PM তন্ত্র—প্রধানত এর উপপাদ্যের প্রমাণ। তবে স্বয়ংসম্পূর্ণ করার জন্য এর সব অংশের—মৌল বাক্য, সংজ্ঞা, ইত্যাদির—পুনরুক্তি করা হল। মনে রাখতে হবে, উপপাদ্যগুলি প্রমাণের মাঝে মাঝে যে ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে, যে সব মন্তব্য করা হয়েছে, তা PM তন্ত্রের অন্তর্ভুক্ত নয়।

৩. PM তন্ত্র

মৌল প্রতীক

$p, q, r, s, \cdots$

$\sim, \vee$

$(\,,\,), [\,,\,], \{\,,\,\}$

গঠনের নিয়ম

যে কোনো নিঃসঙ্গ বাক্যগ্রাহক সুবা বলে গণ্য।

যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '~(ব)' সুবা বলে গণ্য।

যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে '(ব) ∨ (ভ)'-ও সুবা বলে গণ্য ॥

মৌল বাক্য

1. $(p \vee p) \supset p$ [Taut]
2. $q \supset (p \vee q)$ [Add]
3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ [Perm]
4. $(q \supset r) \supset [\,(p \vee q) \supset (p \vee r)\,]$ [Sum]
5. $[\,p \vee (q \vee r)\,] \supset [\,q \vee (p \vee r)\,]$ [Assoc]

সংজ্ঞা

১. ব ⊃ ভ · = · ~ব ∨ ভ Df [Def ⊃]

২. ব · ভ · = · ~(~ব ∨ ~ভ) Df [Def ·]

৩. ব ≡ ভ · = · (ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব) [Def ≡]

---

* Principia Mathematica to *56, পৃঃ ৮৭—১২৬

রূপান্তরবিধি

নিবেশনবিধি

যদি 'ব' তন্ত্রবাক্য হয়,

'p_1', 'p_2' ··· 'p_n' 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগ্রাহক হয়

'ভ১', 'ভ২' ··· 'ভn'—এসব সুবা হয়,

তাহলে 'ব $\left[\frac{ভ_১}{p_1}, \frac{ভ_২}{p_2}, \ldots\ldots \frac{ভ_n}{p_n}\right]$'ও তন্ত্রবাক্য

বিচ্ছেদনবিধি (Inf)

যদি "ব ⊃ ভ" এবং "ব" এদের উভয়ই তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'ভ'-ও তন্ত্রবাক্য।

[উপবিধি : Adj বিধি, HS বিধি ও Int বিধি]

উপপাদ্যের প্রমাণ

উপপাদ্য 1 $(p \supset \sim p) \supset \sim p$ [Abs] [*2·01]†

প্রমাণ

$\left[\text{Taut } \frac{\sim p}{p}\right]$ $(\sim p \vee \sim p) \supset \sim p$ (1)

[(1), Def ⊃] $(p \supset \sim p) \supset \sim p$

এ সূত্র আর উপপাদ্য 17 পরস্পরের পরিপূরক। এ সূত্র দুটিকে বলে *reductio ad absurdum*-এর সূত্র†† সংক্ষেপে—Abs।

উপপাদ্য 2 $q \supset (p \supset q)$ [Simp] [*2·02]

প্রমাণ

$\left[\text{Add } \frac{\sim p}{p}\right]$ $q \supset (\sim p \vee q)$ (1)

[(1), Def ⊃] $q \supset (p \supset q)$

PM-এতে এ সূত্রের নাম Simplification-এর সূত্র, সংক্ষেপে—Simp। সাধারণত Simp বলা হয় : $(q \cdot p) \supset q$, $(p \cdot q) \supset p$—এ সূত্রগুলিকে। তবে উপপাদ্য 2 এ সূত্রগুলিরই বিশেষ রূপ। যথা "$(q \cdot p) \supset q$"-এর পূর্বকল্পলাঘব করলে, এ বাক্যে exportation সূত্র প্রয়োগ করলে, পাওয়া যায় উপপাদ্য 2। উপপাদ্য 47 ও 48 দেখ। ঐ বাক্যগুলিও Simp সূত্র।

উপপাদ্য 3 $(p \supset \sim q) \supset (q \supset \sim p)$ [Transp] [*2·03]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm } \frac{\sim p}{p}, \frac{\sim q}{q}\right]$ $(\sim p \vee \sim q) \supset (\sim q \vee \sim p)$ (1)

[(1), Def ⊃] $(p \supset \sim q) \supset (q \supset \sim p)$

---

† উপপাদ্য পঙ্‌ক্তির সর্বদক্ষিণের তারকাচিহ্নিত সংখ্যা হল মূল PM-এতে-দেওয়া ক্রমিক সংখ্যা।

†† "—এর সূত্র"—লেখা হল "the principle of—"-এর প্রতিশব্দ হিসাবে। যথা, reductio ad absurdum-এর সূত্র=the principle of the reductio ad absurdum।

এ বাক্যকে বলে Transposition-এর সূত্র, সংক্ষেপে—Transp। আমরা যাকে transposition বা ব্যাবর্তনের সূত্র বলে আসছি সে সমার্থতা সূত্রের সঙ্গে এ বাক্যের পার্থক্য লক্ষণীয়। পরে দেখব, PM-এতে আরও ছয়টি সূত্র Transp বলে অভিহিত হয়, এরা হল উপপাদ্য 14, 15, 16, 54, 60 ও 61।

উপপাদ্য 4 $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$ [Comm] [*2·04]

প্রমাণ

$$\left[\text{Assoc } \frac{\sim p}{p}, \frac{\sim q}{q}\right] [\sim p \vee (\sim q \vee r)] \supset [\sim q \vee (\sim p \vee r)] \quad (1)$$

$$[\,(1)\,, \text{Def} \supset\,] \quad [p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$$

PM-এতে এ সূত্রের নাম দেওয়া হয়েছে Commutation-এর সূত্র, সংক্ষেপে—Comm। আমরা যে দুটি সমার্থতা সূত্রকে Com বা Commutation বলে আসছি তাদের সঙ্গে এর পার্থক্য লক্ষণীয়।

উপপাদ্য 5 $(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$ [Syll] [*2·05]

প্রমাণ

$$\left[\text{Sum } \frac{\sim p}{p}\right] \quad (q \supset r) \supset [(\sim p \vee q) \supset (\sim p \vee r)] \quad (1)$$

$$[\,(1), \text{Def} \supset\,] \quad (q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

উপপাদ্য 6 $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$ [Syll] [*2.06]

প্রমাণ

$$\left[4\dagger \; \frac{q \supset r}{p}, \frac{p \supset q}{q}, \frac{p \supset r}{r}\right] \quad \{(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]\}$$
$$\supset \{(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]\} \quad (1)$$

$$[\,5\dagger\,] \quad (q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]\dagger\dagger \quad (2)$$

$$[\,(1), (2), \text{Inf}\,] \; (p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$$

5 ও 6-কে বলা হয় Syllogism-এর সূত্র বা সংক্ষেপে—Syll। আমরা যে যুক্তিবিধিকে HS বা Hypothetical Syllogism বলে আসছি তাকে প্রতিপত্তির আকারে এভাবে ব্যক্ত করা যায়ঃ

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$

এখন, লক্ষণীয় যে—5 ও 6 হল এ সূত্রেরই বিশেষ রূপ। এ বাক্যের পূর্বকল্পলাঘব করলে, মানে—এ বাক্যে exportation প্রয়োগ করলে, পাওয়া যায় 6। আর এতে ক্রমান্তরকরণ ও পূর্বকল্পলাঘব প্রয়োগ করলে পাওয়া যায় 5। পরে আরও দুটি Syll সূত্রের সাক্ষাৎ পাব (উপপাদ্য 51 ও 52 দ্রষ্টব্য)।

† এসব প্রমাণিত উপপাদ্যের ক্রমিক সংখ্যা বোঝাচ্ছে। যথা '4' বলতে বোঝাচ্ছে উপপাদ্য 4।

†† উপপাদ্য 5-এর পুনরাবৃত্তি না করলেও চলত। এ পঙ্‌ক্তিটি না লিখে শেষের পঙ্‌ক্তিটি এভাবে লেখা যেত [(1); 5, Inf]......

মনে রাখবে, 5 ও 6 সংখ্যক সূত্র অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। পরে দেখবে, পরবর্তী উপপাদ্য-গুলির প্রমাণে এদের প্রায় পদে পদে প্রয়োগ করার প্রয়োজন হয়।

উপপাদ্য 6 সম্বন্ধে মন্তব্য ঃ উপপাদ্য 6-এর প্রমাণটির দিকে আবার নজর দাও। এবং পূর্ববর্তী প্রমাণগুলির সঙ্গে এর পার্থক্য লক্ষ কর। লক্ষণীয় যে, এ প্রমাণ থেকে বোঝা যায় ঃ কেবল মূল বাক্যে নয়, প্রমাণিত উপপাদ্যেও নিবেশন করে হেতুবাক্য পাওয়া যায়, আবার প্রমাণিত উপপাদ্যও পরবর্তী উপপাদ্যের হেতুবাক্য হিসাবে ব্যবহার করা যায়। আরও লক্ষণীয়, এ প্রমাণেই প্রথম Inf নামক যুক্তিবিধি—অনুকল্প বিচ্ছিন্নকরণের বিধি—প্রয়োগ করা হয়েছে।

এ প্রমাণ থেকে অবরোহের একটি কৌশল শেখা গেল। কৌশলটি হল এই। কোনো উপপাদ্য প্রমাণ করতে গেলে দেখতে হবে

> কোনো মূল বাক্যে বা প্রমাণিত উপপাদ্যে অন্য বর্ণপ্রতীক বা যৌগিক বাক্য নিবেশন করে এমন প্রাকল্পিক পাওয়া যায় কিনা—
>
> > যার অনুকল্প হল প্রমাণীয় উপপাদ্যটি, আর পূর্বকল্প হল কোনো মূলবাক্য বা এমন কোনো উপপাদ্য যা পূর্বেই প্রমাণিত হয়েছে।

অনুজ্ঞার আকারে বলি—

> সব সময় চেষ্টা করবো কোনো মূল বাক্য বা প্রমাণিত বাক্যকে পূর্বকল্প করে আর উপপাদ্যটিকে অনুকল্প করে প্রাকল্পিক বাক্য গঠন করতে।

যদি এরূপ বাক্য গঠন সম্ভব হয় তাহলে Inf-এর সাহায্যে উপপাদ্যকে প্রাকল্পিকটি থেকে সহজেই বিচ্ছিন্ন করা যাবে, নিষ্কাশন করা যাবে।

উপপাদ্য 7 $p \supset (p \vee p)$ [*2·07]

প্রমাণ

[Add $\frac{p}{q}$] $p \supset (p \vee p)$

উপপাদ্য 8 $p \supset p$ [Id (Identity)] [*2·08]

প্রমাণ

[5 $\frac{p \vee p}{q}$, $\frac{p}{r}$]	$[(p \vee p) \supset p] \supset \{[p \supset (p \vee p)] \supset (p \supset p)\}$	(1)
[Taut†]	$(p \vee p) \supset p$	(2)
[(1), (2), Inf]	$[p \supset (p \vee p)] \supset (p \supset p)$	(3)
[7††]	$p \supset (p \vee p)$	(4)
[(3), (4), Inf]	$p \supset p$	

† মূল বাক্যে বা প্রমাণিত বাক্যে নিবেশন করে

†† এ সূত্রগুলির পুনরাবৃত্তি না করে এ প্রমাণ আরও সংক্ষেপ করা যেত। উপপাদ্য 9-এর প্রমাণ সম্পর্কে মন্তব্য দ্রষ্টব্য। তবে এরকম ক্ষেত্রে আমরা কখনও কখনও পুনরাবৃত্তি করব, এতে প্রমাণ সহজ-বোধ্য হয়।

লক্ষণীয়, উপপাদ্য 6-এর প্রমাণ প্রসঙ্গে যে কৌশলের কথা বলেছি ঐ অবরোহ-কৌশলই এখানে দু দুবার অবলম্বন করা হয়েছে।

উপপাদ্য 9 $\sim p \vee p$ [*2·1]

প্রমাণ

[8] $p \supset p$ (1)

[(1), Def ⊃] $\sim p \vee p$

এ প্রমাণ আরও সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা যেত :

[8, Def ⊃] $\sim p \vee p$

উপপাদ্য 10 $p \vee \sim p$ [Excluded Middle] [*2·11]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm } \frac{\sim p}{p}, \frac{p}{q}\right]$ $(\sim p \vee p) \supset (p \vee \sim p)$ (1)

[9] $\sim p \vee p$ (2)

[(1), (2), Inf] $p \vee \sim p$

এ সূত্রটির নাম Excluded Middle-এর নিয়ম, নির্মধ্যম নিয়ম।

উপপাদ্য 11 $p \supset \sim\sim p$ [*2·12]

প্রমাণ

[10] $p \vee \sim p$ (1)

$\left[(1)\ \frac{\sim p}{p}\right]$ $\sim p \vee \sim\sim p$ (2)

[(2), Def ⊃] $p \supset \sim\sim p$

উপপাদ্য 12 $p \vee \sim\sim\sim p$ [*2·13]

প্রমাণ

$\left[\text{Sum} \frac{\sim p}{q}, \frac{\sim\sim\sim p}{r}\right]$ $(\sim p \supset \sim\sim\sim p) \supset [\,(p \vee \sim p) \supset (p \vee \sim\sim\sim p)\,]$ (1)

[11] $p \supset \sim\sim p$ (2)

$\left[(2)\ \frac{\sim p}{p}\right]$ $\sim p \supset \sim\sim\sim p$ (3)

[(1), (3), Inf] $(p \vee \sim p) \supset (p \vee \sim\sim\sim p)$ (4)

[10] $p \vee \sim p$ (5)

[(4), (5), Inf] $p \vee \sim\sim\sim p$

এটি পরবর্তী উপপাদ্য প্রমাণের জন্য প্রয়োজনীয় অন্তর্বর্তী উপপাদ্য (lemma)। মানে, পরবর্তী উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য এ উপপাদ্যের প্রমাণ প্রয়োজন। আর পরবর্তী উপপাদ্যটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। পূর্ববর্তী 11 আর পরবর্তী 13 সংখ্যক উপপাদ্য যুক্ত করে পাওয়া যাবে নিষেধের নিষেধ নিয়ম (Double Negation-এর নিয়ম)। এ নিয়মটির প্রমাণের জন্য উপপাদ্য 61 দেখ।

উপপাদ্য 13 $\sim\sim p \supset p$ [*2.14]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm}\ \frac{\sim\sim\sim p}{q}\right]$ $(p \vee \sim\sim\sim p) \supset (\sim\sim\sim p \vee p)$ (1)

[12] $p \vee \sim\sim\sim p$ (2)

[(1), (2), Inf] $\sim\sim\sim p \vee p$ (3)

[(3), Def $\supset$] $\sim\sim p \supset p$

উপপাদ্য 14 $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$ [Transp] [*2.15]

প্রমাণ

$\left[5\ (\text{Syll})\dagger\ \frac{\sim\sim q}{r},\ \frac{\sim p}{p}\right]$ $(q \supset \sim\sim q) \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim\sim q)]$ (1)

$\left[11\frac{q}{p}\right]$ $q \supset \sim\sim q$ (2)

[(1), (2) Inf] $(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim\sim q)$ (3)

$\left[3\frac{\sim p}{p},\ \frac{\sim q}{q}\right]$ $(\sim p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)$ (4)

$\left[5\ (\text{Syll})\ \frac{\sim\sim p}{q},\ \frac{p}{r},\ \frac{\sim q}{p}\right]$

$(\sim\sim p \supset p) \supset [(\sim q \supset \sim\sim p) \supset (\sim q \supset p)]$ (5)

[13] $\sim\sim p \supset p$ (6)

[(5), (6), Inf] $(\sim q \supset \sim\sim p) \supset (\sim q \supset p)$ (7)

$\left[5\ (\text{Syll})\ \frac{\sim p \supset \sim\sim q}{q},\ \frac{\sim q \supset \sim\sim p}{r},\ \frac{\sim p \supset q}{p}\right]$

$[(\sim p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)] \supset \{[(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim\sim q)] \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)]\}$ (8)

[(8), (4), Inf] $[(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim\sim q)] \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)]$ (9)

[(9), (3), Inf] $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)$ (10)

$\left[5\ (\text{Syll})\ \frac{\sim q \supset \sim\sim p}{q},\ \frac{\sim q \supset p}{r},\ \frac{\sim p \supset q}{p}\right]$

$[(\sim q \supset \sim\sim p) \supset (\sim q \supset p)] \supset \{[(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)] \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)]\}$ (11)

[(11), (7), Inf] $[(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)] \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)]$ (12)

[(12), (10), Inf] $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$

---

† বলা বাহুল্য, বন্ধনীমুক্ত সংখ্যা হল প্রমাণিত উপপাদ্যের ক্রমিক সংখ্যা। আর এরূপ সংখ্যার পাশে প্রবন্ধনীর অন্তর্গত নাম হল অনুষঙ্গী উপপাদ্যের নাম। যথা, 5 (Syll)=Syll নামক উপপাদ্য যার ক্রমিক সংখ্যা 5।

উপপাদ্য 14-এর প্রমাণ সম্পর্কে মন্তব্য : উপপাদ্য 5 ও 6-এর প্রমাণ সম্পর্কে বলতে গিয়ে যে কৌশলের কথা বলা হয়েছিল, লক্ষ করে থাকবে, 14-এর প্রমাণে বার বার সে কৌশল অবলম্বন করা হয়েছে। আর এ প্রমাণ থেকে বুঝতে পারবে PM-অনুমোদিত অবরোহে 5 ও 6 সংখ্যক সূত্রের গুরুত্ব অসীম। এদের অনন্যসাধারণ গুরুত্বের কারণ হল এই : PM যুক্তিবিধি তালিকায় HS বলে কোনো যুক্তিবিধি নেই, এবং HS-এর কাজ এ দুটি সূত্র দিয়ে করাতে হয়।

আলোচ্য উপপাদ্যটি যে এত বিশাল আকার ধারণ করল, এতে যে সূত্র 5-এতে নিবেশন করে বার বার হেতুবাক্য গঠন করতে হল, তারও কারণ হল : আমাদের হাতে HS-শৃঙ্খল হেন শক্তিশালী হাতিয়ার (যুক্তিবিধি) নেই। যদি PM-এতে এ যুক্তিবিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা থাকত তাহলে, দেখ, আলোচ্য প্রমাণে (7) পর্বের পরেই লেখা যেত :

[(3), (4), (7), HS-শৃঙ্খল] $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$

এবং এ পর্বেই প্রমাণটির সমাপ্তি ঘোষণা করা যেত।

HS-বিধি মেনে নিলে উপপাদ্য ৪-এর প্রমাণ এভাবে সংক্ষেপ করা যেত।†

উপপাদ্য $p \supset p$

প্রমাণ

[7]	$p \supset (p \vee p)$	(1)
[Taut]	$(p \vee p) \supset p$	(2)
[(1), (2), HS]	$p \supset p$	

PM-তন্ত্রে HS-এর স্থান নেই, ঠিক। তবে PM-এর যুক্তিবিধি (Inf) দিয়ে 5 বা 6 সংখ্যক সূত্রের সাহায্যে HS বিধির যৌক্তিকতা প্রমাণ করা যায়। এভাবে কোন তন্ত্রবাক্য থেকে তন্ত্রের যুক্তিবিধি দিয়ে যে বিধি নিষ্কাশন করা যায় তাকে বলে নিষ্কাশিত যুক্তিবিধি, অনুবিধি বা উপবিধি—derived rule of inference।

ধরা যাক, 'ক', 'খ' ও 'গ' PM-তে সুবা। তাহলে HS বিধিটি এভাবে প্রমাণ করা যায়।

HS উপপাদ্য : যদি 'ক ⊃ খ' আর 'খ ⊃ গ' তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'ক ⊃ গ'ও তন্ত্রবাক্য।

প্রমাণ

$\left[6 \frac{\text{ক}}{p}, \frac{\text{খ}}{q}, \frac{\text{গ}}{r} \right]$	(ক ⊃ খ) ⊃ [(খ ⊃ গ) ⊃ (ক ⊃ গ)]	(1)
[স্বীকৃত প্রকল্প]	ক ⊃ খ	(2)
[(1), (2), Inf]	(খ ⊃ গ) ⊃ (ক ⊃ গ)	(3)
[স্বীকৃত প্রকল্প]	খ ⊃ গ	(4)
[(3), (4), Inf]	ক ⊃ গ	

† বা আরও সংক্ষেপে এভাবে :

প্রমাণ

[7, Taut, HS] $p \supset p$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে : যদি ‘ক ⊃ খ’ আর ‘খ ⊃ গ’ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে, দাবী করা যায়, ‘ক ⊃ গ’ও তন্ত্রবাক্য। PM-এতে এরূপ অনুবিধি প্রমাণ করা হয় নি, ঠিক ; কিন্তু এরূপ নিষ্কাশিত বিধির প্রয়োজন স্বীকার করা হয়েছে, এবং বলা যায় এ বিধি পরোক্ষভাবে প্রয়োগও করা হয়েছে। পাদটীকায় PM-থেকে উদ্ধৃতি দেখ।*

উপপাদ্য 15 দুভাবে প্রমাণ করা হল : প্রথমে সাধারণভাবে তারপর HS বিধির সুযোগ নিয়ে।

উপপাদ্য 15 $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ [Transp] [*2.16]

প্রমাণ

$\left[5 \frac{\sim\sim q}{r}\right]$ $(q \supset \sim\sim q) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)]$ (1)

$\left[11 \frac{q}{p}\right]$ $q \supset \sim\sim q$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)$ (3)

$\left[3 \frac{\sim q}{q}\right]$ $(p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ (4)

$\left[5 \frac{p \supset \sim\sim q}{q}, \frac{\sim q \supset \sim p}{r}, \frac{p \supset q}{p}\right]$

$[(p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim p)] \supset \{[(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)]$
$\supset [(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)]\}$ (5)

[(5), (4), Inf] $[(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)] \supset [(p \supset q) \supset$
$(\sim q \supset \sim p)]$ (6)

[(6), (3), Inf] $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

15-এর বিকল্প প্রমাণ

$\left[5 \frac{\sim\sim q}{r}\right]$ $(q \supset \sim\sim q) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)]$ (1)

$\left[11 \frac{q}{p}\right]$ $q \supset \sim\sim q$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \supset q) \supset (p \supset \sim\sim q)$ (3)

$\left[3 \frac{\sim q}{q}\right]$ $(p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ (4)

[(3), (4), HS] $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

* From $p_1 \supset p_2$, $p_2 \supset p_3$, $p_3 \supset p_4$ the proposition $p_1 \supset p_4$ results by repeated applications of *2·05 or *2·06 (both of which are called Syll). It is tedious and unnecessary to repeat this process every time it is used ; it will therefore be abbreviated into

"[Syll] ⊢ · (a) · (b) · (c) · ⊃ ⊢ (d)"

where (a) is of the form $p_1 \supset p_2$, (b) of the from $p_2 \supset p_3$, (c) of the form $p_3 \supset p_4$ and (d) of the form $p_1 \supset p_4$.

—Principia Mathematica to *56, ১০২ পৃঃ

অনুরূপভাবে উপপাদ্য 16-এরও দুটি প্রমাণ দেওয়া হল। উপপাদ্য 14, 15, 16—এদের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে যে দুটি প্রমাণ দেওয়া হয়েছে সেগুলি তুলনা কর। করলে, HS প্রয়োগের সুবিধা বুঝতে পারবে। আর HS বিধি প্রয়োগ না করে কি করে কেবল Inf বিধি (ও নিবেশনের নিয়ম) প্রয়োগ করেই সব তন্ত্রবাক্য প্রমাণ করা যায় তাও বুঝতে পারবে।

উপপাদ্য 16 $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$ [Transp] [*2·17]

প্রমাণ

$\left[5\ \frac{\sim\sim q}{q},\ \frac{q}{r}\right]$ $(\sim\sim q \supset q) \supset [(p \supset \sim\sim q) \supset (p \supset q)]$ (1)

$\left[13\ \frac{q}{p}\right]$ $\sim\sim q \supset q$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \supset \sim\sim q) \supset (p \supset q)$ (3)

$\left[3\ \frac{\sim q}{p},\ \frac{p}{q}\right]$ $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset \sim\sim q)$ (4)

$\left[5\ \frac{p \supset \sim\sim q}{q},\ \frac{p \supset q}{r},\ \frac{\sim q \supset \sim p}{p}\right]$

$[(p \supset \sim\sim q) \supset (p \supset q)] \supset \{[(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset \sim\sim q)] \supset [(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)]\}$ (5)

[(5), (3), Inf] $[(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset \sim\sim q)] \supset [(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)]$ (6)

[(6), (4), Inf] $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$

16-এর বিকল্প প্রমাণ

$\left[5\ \frac{\sim\sim q}{q},\ \frac{q}{r}\right]$ $(\sim\sim q \supset q) \supset [(p \supset \sim\sim q) \supset (p \supset q)]$ (1)

$\left[13\ \frac{q}{p}\right]$ $\sim\sim q \supset q$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \supset \sim\sim q) \supset (p \supset q)$ (3)

$\left[3\ \frac{\sim q}{p},\ \frac{p}{q}\right]$ $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset \sim\sim q)$ (4)

[(4), (3), HS] $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$

উপপাদ্য 17† $(\sim p \supset p) \supset p$ [Abs] [*2·18]

প্রমাণ

$\left[5\ \frac{p}{q},\ \frac{\sim\sim p}{r},\ \frac{\sim p}{p}\right]$ $(p \supset \sim\sim p) \supset [(\sim p \supset p) \supset (\sim p \supset \sim\sim p)]$ (1)

---

† উপপাদ্য 1 দেখ। 1 আর 17 পরস্পরের পরিপূরক।

$[\,(1), 11, \text{Inf}\,]$ $\quad (\sim p \supset p) \supset (\sim p \supset \sim\sim p)$ (2)

$\left[1 \; \frac{\sim p}{p}\right]$ $\quad (\sim p \supset \sim\sim p) \supset \sim\sim p$ (3)

$[\,(2), (3), \text{HS}\,]$ $\quad (\sim p \supset p) \supset \sim\sim p$ (4)

$[\,13\,]$ $\quad \sim\sim p \supset p$ (5)

$[\,(4), (5), \text{HS}\,]$ $\quad (\sim p \supset p) \supset p$

উপপাদ্য 18 $\quad p \supset (p \vee q)$ $\quad$ [*2·2]

প্রমাণ

$\left[\text{Add} \; \frac{p}{q}, \frac{p}{q}\right]$ $\quad p \supset (q \vee p)$ (1)

$\left[\text{Perm} \; \frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right]$ $\quad (q \vee p) \supset (p \vee q)$ {2)

$[\,(1), (2), \text{HS}\,]$ $\quad p \supset (p \vee q)$

এ সূত্রটি Add-এর একটি বিশেষ রূপ।

উপপাদ্য 19 $\quad \sim p \supset (p \supset q)$ $\quad$ [*2·21]

প্রমাণ

$\left[18 \; \frac{\sim p}{p}\right]$ $\quad \sim p \supset (\sim p \vee q)$ (1)

$[\,(1), \text{Def} \supset\,]$ $\quad \sim p \supset (p \supset q)$

উপপাদ্য 20 $\quad p \vee [\,(p \vee q) \supset q\,]$ $\quad$ [*2·25]

প্রমাণ

$\left[\text{Assoc} \; \frac{\sim(p \vee q)}{p}, \frac{p}{q}, \frac{q}{r}\right]$

$[\,\sim(p \vee q) \vee (p \vee q)\,] \supset \{\,p \vee [\,\sim(p \vee q) \vee q\,]\,\}$ (1)

$\left[9 \; \frac{p \vee q}{p}\right]$ $\quad \sim(p \vee q) \vee (p \vee q)$ (2)

$[\,(1), (2), \text{Inf}\,]$ $\quad p \vee [\,\sim(p \vee q) \vee q\,]$ (3)

$[\,(3), \text{Def} \supset\,]$ $\quad p \vee [\,(p \vee q) \supset q\,]$

উপপাদ্য 21 $\quad \sim p \vee [\,(p \supset q) \supset q\,]$ $\quad$ [*2·26]

প্রমাণ

$\left[20 \; \frac{\sim p}{p}\right]$ $\quad \sim p \vee [\,(\sim p \vee q) \supset q\,]$ (1)

$[\,(1), \text{Def} \supset\,]$ $\quad \sim p \vee [\,(p \supset q) \supset q\,]$

উপপাদ্য 22 $\quad p \supset [\,(p \supset q) \supset q\,]$ $\quad$ [*2·27]

প্রমাণ : [নিজে প্রমাণ করো।]

---

† উপপাদ্য 20 দেখ।

উপপাদ্য 23 $[p \vee (q \vee r)] \supset [p \vee (r \vee q)]$ [*2·3]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm}\ \frac{q}{p}, \frac{r}{q}\right]$ $(q \vee r) \supset (r \vee q)$ (1)

$\left[\text{Sum}\ \frac{q \vee r}{q}, \frac{r \vee q}{r}\right]$ $[(q \vee r) \supset (r \vee q)] \supset \{[p \vee (q \vee r)] \supset [p \vee (r \vee q)]\}$ (2)

[(1), (2), Inf] $[p \vee (q \vee r)] \supset [p \vee (r \vee q)]$

উপপাদ্য 24 $[p \vee (q \vee r)] \supset [(p \vee q) \vee r]$ [*2·31]

প্রমাণ

$\left[\text{Assoc}\ \frac{r}{q}, \frac{q}{r}\right]$ $[p \vee (r \vee q)] \supset [r \vee (p \vee q)]$ (1)

$\left[\text{Perm}\ \frac{r}{p}, \frac{p \vee q}{q}\right]$ $[r \vee (p \vee q)] \supset [(p \vee q) \vee r]$ (2)

[23] $[p \vee (q \vee r)] \supset [p \vee (r \vee q)]$ (3)

[(3), (1), HS] $[p \vee (q \vee r)] \supset [r \vee (p \vee q)]$ (4)

[(4), (2), HS] $[p \vee (q \vee r)] \supset [(p \vee q) \vee r]$

উপপাদ্য 25 $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$ [*2·32]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm}\ \frac{p \vee q}{p}, \frac{r}{q}\right]$ $[(p \vee q) \vee r] \supset [r \vee (p \vee q)]$ (1)

$\left[\text{Assoc}\ \frac{r}{p}, \frac{p}{q}, \frac{q}{r}\right]$ $[r \vee (p \vee q)] \supset [p \vee (r \vee q)]$ (2)

[(1), (2), HS] $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (r \vee q)]$ (3)

$\left[23\ \frac{r}{q}, \frac{q}{r}\right]$ $[p \vee (r \vee q)] \supset [p \vee (q \vee r)]$ (4)

[(3), (4), HS] $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$

উপপাদ্য 25 ও 24 হল বিকল্পসংক্রান্ত Association-এর, যথাক্রমে, নিয়ম।

উপপাদ্য 26 $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (r \vee p)]$ [*2·36]

প্রমাণ

$\left[5\ \frac{p \vee r}{q}, \frac{r \vee p}{r}, \frac{p \vee q}{p}\right]$

$[(p \vee r) \supset (r \vee p)] \supset \{[(p \vee q) \supset (p \vee r)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee p)]\}$ (1)

$\left[\text{Perm}\ \frac{r}{q}\right]$ $(p \vee r) \supset (r \vee p)$ (2)

[(1), (2), Inf] $[(p \vee q) \supset (p \vee r)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee p)]$ (3)

[Sum] $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ (4)

[(4), (3), HS] $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (r \vee p)]$

উপপাদ্য 27 $(q \supset r) \supset [(q \vee p) \supset (r \vee p)]$ [*2·38]

প্রমাণ

$\left[6 \text{ (Syll) } \frac{q \vee p}{p}, \frac{p \vee q}{q}, \frac{p \vee r}{r} \right]$

$[(q \vee p) \supset (p \vee q)] \supset \{[(p \vee q) \supset (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \supset (p \vee r)]\}$ (1)

$\left[\text{Perm } \frac{q}{p}, \frac{p}{q} \right]$ $(q \vee p) \supset (p \vee q)$ (2)

[(1), (2), Inf] $[(p \vee q) \supset (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \supset (p \vee r)]$ (3)

$\left[5 \text{ (Syll) } \frac{p \vee r}{q}, \frac{r \vee p}{r}, \frac{q \vee p}{p} \right]$

$[(p \vee r) \supset (r \vee p)] \supset \{[(q \vee p) \supset (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \supset (r \vee p)]\}$ (4)

$\left[\text{Perm } \frac{r}{q} \right]$ $(p \vee r) \supset (r \vee p)$ (5)

[(4), (5), Inf] $[(q \vee p) \supset (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \supset (r \vee p)]$ (6)

[(3), (6), HS] $[(p \vee q) \supset (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \supset (r \vee p)]$ (7)

[Sum] $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ (8)

[(8), (7), HS] $(q \supset r) \supset [(q \vee p) \supset (r \vee p)]$

উপপাদ্য 28 $(p \vee q) \supset (\sim p \supset q)$ [*2·53]

প্রমাণ

$\left[27 \frac{p}{q}, \frac{\sim\sim p}{r}, \frac{q}{p} \right]$ $(p \supset \sim\sim p) \supset [(p \vee q) \supset (\sim\sim p \vee q)]$ (1)

[(1), 11, Inf] $(p \vee q) \supset (\sim\sim p \vee q)$ (2)

[(2), Def] $(p \vee q) \supset (\sim p \supset q)$

উপপাদ্য 29 $(\sim p \supset q) \supset (p \vee q)$ [*2·54]

প্রমাণ

$\left[27 \frac{\sim\sim p}{q}, \frac{p}{r}, \frac{q}{p} \right]$ $(\sim\sim p \supset p) \supset [(\sim\sim p \vee q) \supset (p \vee q)]$ (1)

[(1), 13, Inf] $(\sim\sim p \vee q) \supset (p \vee q)$ (2)

[(2), Def ⊃] $(\sim p \supset q) \supset (p \vee q)$

উপপাদ্য 30 $(p \supset q) \supset [(p \vee q) \supset q]$ [*2·621]

প্রমাণ

$\left[5 \text{ (Syll) } \frac{q \vee q}{q}, \frac{q}{r}, \frac{p \vee q}{p} \right]$

$[(q \vee q) \supset q] \supset \{ [(p \vee q) \supset (q \vee q) \supset (p \vee q) \supset q] \}$ (1)

$\left[\text{Taut } \frac{p}{q} \right]$ $(q \vee q) \supset q$ (2)

[(1), (2), Inf] $[(p \vee q) \supset (q \vee q)] \supset [(p \vee q) \supset q]$ (3)

$\left[27\frac{p}{q}, \frac{q}{r}, \frac{q}{p}\right]$ $(p \supset q) \supset [(p \vee q) \supset (q \vee q)]$ (4)

[(4), (3), HS] $(p \supset q) \supset [(p \vee q) \supset q]$

উপপাদ্য 31 $(p \supset q) \supset [(p \vee q \vee r) \supset (q \vee r)]$ [*2·73]

প্রমাণ

$\left[27\frac{p \vee q}{q}, \frac{q}{r}, \frac{r}{p}\right]$ $[(p \vee q) \supset q][(p \vee q \vee r) \supset (q \vee r)]$ (1)

[30] $(p \supset q) \supset [(p \vee q) \supset q]$ (2)

[(2), (1), HS] $(p \supset q) \supset [(p \vee q \vee r) \supset (q \vee r)]$

উপপাদ্য 32 $(q \supset p) \supset [(p \vee q \vee r) \supset (p \vee r)]$ [*2·74]

প্রমাণ

$\left[6\text{ (Syll)}\frac{p \vee q \vee r}{p}, \frac{q \vee p \vee r}{q}, \frac{p \vee r}{r}\right]$

$[(p \vee q \vee r) \supset (q \vee p \vee r)] \supset \{[(q \vee p \vee r) \supset (p \vee r)] \supset$
$[(p \vee q \vee r) \supset (p \vee r)]\}$ (1)

[Assoc] $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$ (2)

[25] $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$ (3)

[(3), (2), HS] $[(p \vee q) \vee r] \supset [q \vee (p \vee r)]$ (4)

$\left[24\frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right]$ $[q \vee (p \vee r)] \supset [(q \vee p) \vee r]$ (5)

[(4), (5), HS] $[(p \vee q) \vee r] \supset [(q \vee p) \vee r]$ (6)

[(6), Def 4*] $(p \vee q \vee r) \supset (q \vee p \vee r)$ (7)

[(1), (7), Inf] $[(q \vee p \vee r) \supset (p \vee r)] \supset [(p \vee q \vee r) \supset p \vee r)]$ (8)

$\left[31\frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right]$ $(q \supset p) \supset [(q \vee p \vee r) \supset (p \vee r)]$ (9)

[(9), (8), HS] $(q \supset p) \supset [(p \vee q \vee r) \supset (p \vee r)]$

উপপাদ্য 33 $[p \vee (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ [*2·76]

প্রমাণ

$\left[4\text{ (Comm)}\frac{p \vee q}{p}, \frac{p \vee (q \supset r)}{q}, \frac{p \vee r}{r}\right]$

$\{(p \vee q) \supset \{[p \vee (q \supset r)] \supset (p \vee r)\}\} \supset$
$\{[p \vee (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]\}$ (1)

[28] $(p \vee q) \supset (\sim p \supset q)$ (2)

* Def 4 সংখ্যক সংজ্ঞাটি হল এই (৪৫৪ পৃঃ দ্রষ্টব্য)

$p \vee q \vee r \cdot = \cdot p \vee (q \vee r)$ Df

লক্ষণীয়, (3)-(7) এ কয় পর্ব দরকার হয়েছে কেবল বন্ধনীমুক্তির জন্য ।

[14] $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$ (3)

$\left[32 \ \frac{\sim q}{q} \right]$ $(\sim q \supset p) \supset [(p \vee \sim q \vee r) \supset (p \vee r)]$ (4)

[(2), (3), (4), HS] $(p \vee q) \supset [(p \vee \sim q \vee r) \supset (p \vee r)]$ (5)

[এখন (5)-এর "$p \vee \sim q \vee r$" কে "$p \vee (q \supset r)$"-এতে রূপান্তরিত করতে পারলেই (1)-এর পূর্বকল্প পাওয়া যেত, এবং Inf প্রয়োগ করে উপপাদ্যটি নিষ্কাশন করা যেত। মনে হতে পারে, কেবল 'Def $\supset$'-এর সাহায্যেই তা সম্ভব। কিন্তু তা নয়। প্রথমত দরকার : $p \vee (\sim q \vee r)$। Def 4 দিয়ে এ বাক্য সরাসরি পাওয়া যায় না। (৪৫৪ পৃষ্ঠায় Def 4 দেখ)। ঈপ্সিত রূপান্তর যে PM-এতে সহজসাধ্য নয় নিম্নোক্ত পর্বগুলি দেখলেই বুঝতে পারবে।]

$\left[4 \text{ (Comm) } \frac{p \vee q}{p}, \frac{p \vee \sim q \vee r}{q}, \frac{p \vee r}{r} \right]$

$\{(p \vee q) \supset [(p \vee \sim q \vee r) \supset (p \vee r)]\} \supset \{(p \vee \sim q \vee r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]\}$ (6)

[(6), (5), Inf] $(p \vee \sim q \vee r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ (7)

$\left[24 \ \frac{\sim q}{q} \right]$ $[p \vee (\sim q \vee r)] \supset [(p \vee \sim q) \vee r]$ (8)

[(8), Def 4] $[p \vee (\sim q \vee r)] \supset (p \vee \sim q \vee r)$ (9)

[(9), (7), HS] $[p \vee (\sim q \vee r)] \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ (10)

$\left[4 \text{ (Comm) } \frac{p \vee (\sim q \vee r)}{p}, \frac{p \vee q}{q}, \frac{p \vee r}{r} \right]$

$\{[p \vee (\sim q \vee r)] \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]\} \supset \{(p \vee q) \supset \{[p \vee (\sim q \vee r)] \supset (p \vee r)\}\}$ (11)

[(11), (10), Inf] $(p \vee q) \supset \{[p \vee (\sim q \vee r)] \supset (p \vee r)\}$ (12)

[(12), Def $\supset$] $(p \vee q) \supset \{[p \vee (q \supset r)] \supset (p \vee r)\}$ (13)

[(1 , (13), Inf] $[p \vee (q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$

উপপাদ্য 34 $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$ [*2·77]

প্রমাণ

$\left[33 \ \frac{\sim p}{p} \right]$ $[\sim p \vee (q \supset r)] \supset [(\sim p \vee q) \supset (\sim p \vee r)]$ (1)

[(1), Df $\supset$] $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

উপপাদ্য 35 $(q \vee r) \supset [(\sim r \vee s) \supset (q \vee s)]$ [*2·8]

প্রমাণ

$\left[\text{Perm } \frac{q}{p}, \frac{r}{q} \right]$ $(q \vee r) \supset (r \vee q)$ (1)

$\left[28 \ \frac{r}{p} \right]$ $(r \vee q) \supset (\sim r \supset q)$ (2)

[(1), (2), HS] $(q \vee r) \supset (\sim r \supset q)$ (3)

$\left[27\ \frac{\sim r}{q}, \frac{q}{r}, \frac{s}{p}\right]$ $(\sim r \supset q) \supset [(\sim r \vee s) \supset (q \vee s)]$ (4)

[(3), (4), HS] $(q \vee r) \supset [(\sim r \vee s) \supset (q \vee s)]$

উপপাদ্য 36 $[q \supset (r \supset s)] \supset \{(p \vee q) \supset [(p \vee r) \supset (p \vee s)]\}$
[*2·81]

প্রমাণ

$\left[\text{Sum}\ \frac{r \supset s}{r}\right]$ $[q \supset (r \supset s)] \supset \{(p \vee q) \supset [p \vee (r \supset s)]\}$ (1)

$\left[33\ \frac{r}{q}, \frac{s}{r}\right]$ $[p \vee (r \supset s)] \supset [(p \vee r) \supset (p \vee s)]$ (2)

$\left[5\ \text{(Syll)}\ \frac{p \vee (r \supset s)}{q}, \frac{(p \vee r) \supset (p \vee s)}{r}, \frac{p \vee q}{p}\right]$

$\{[p \vee (r \supset s)] \supset [(p \vee r) \supset (p \vee s)]\} \supset$
$\{\{(p \vee q) \supset [p \vee (r \supset s)]\} \supset \{(p \vee q) \supset$
$[(p \vee r) \supset (p \vee s)]\}\}$ (3)

[(3), (2), Inf] $\{(p \vee q) \supset [p \vee (r \supset s)]\} \supset \{(p \vee q) \supset$
$[(p \vee r) \supset (p \vee s)]\}$ (4)

[(1), (4), HS] $[q \supset (r \supset s)] \supset \{(p \vee q) \supset [(p \vee r) \supset (p \vee s)]\}$

উপপাদ্য 37 $(p \vee q \vee r) \supset [(p \vee \sim r \vee s) \supset (p \vee q \vee s)]$ [*2·82]

প্রমাণ

$\left[36\ \frac{q \vee r}{q}, \frac{\sim r \vee s}{r}, \frac{q \vee s}{s}\right]$

$\{(q \vee r) \supset [(\sim r \vee s) \supset (q \vee s)]\} \supset \{(p \vee q \vee r) \supset$
$[(p \vee \sim r \vee s) \supset (p \vee q \vee s)]\}$ (1)

[35] $(q \vee r) \supset [(\sim r \vee s) \supset (q \vee s)]$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \vee q \vee r) \supset [(p \vee \sim r \vee s) \supset (p \vee q \vee s)]$

উপপাদ্য 38 $[p \supset (q \supset r)] \supset \{[p \supset (r \supset s)] \supset [p \supset (q \supset s)]\}$

প্রমাণ [*2·83]

$\left[37\ \frac{\sim p}{p}, \frac{\sim q}{q}\right]$ $[\sim p \vee \sim q \vee r] \supset \{[\sim p \vee \sim r \vee s] \supset$
$[\sim p \vee \sim q \vee s]\}$ (1)

[(1), Def 4†] $[\sim p \vee (\sim q \vee r)] \supset \{[\sim p \vee (\sim r \vee s)] \supset$
$[\sim p \vee (\sim q \vee s)]\}$ (2)

[(2), Def ⊃] $[p \supset (q \supset r)] \supset \{[p \supset (r \supset s)] \supset$
$[p \supset (q \supset s)]\}$

উপপাদ্য 39 $(p \cdot q) \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$ [*3·1]

প্রমাণ

$\left[8 \text{ (Id) } \frac{p \cdot q}{p} \right]$ $(p \cdot q) \supset (p \cdot q)$ (1)

[(1), Def ·] $(p \cdot q) \supset \sim(\sim p \vee \sim q)$

উপপাদ্য 40 $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset (p \cdot q)$ [*3·11]

প্রমাণ : [প্রমাণ পাঠকের উপর ছেড়ে দিলাম ।]

উপপাদ্য 41 $\sim p \vee [\sim q \vee (p \cdot q)]$ [*3·12]

প্রমাণ

$\left[10 \ \frac{\sim p \vee \sim q}{p} \right]$ $\sim p \vee \sim q \vee \sim(\sim p \vee \sim q)$ (1)

[(1), Def ·] $\sim p \vee \sim q \vee (p \cdot q)$ (2)

[(2), Def 4†] $\sim p \vee [\sim q \vee (p \cdot q)]$

উপপাদ্য 42 $\sim(p \cdot q) \supset (\sim p \vee \sim q)$ [*3·13]

প্রমাণ

$\left[14 \text{ (Transp) } \frac{\sim p \vee \sim q}{p}, \frac{p \cdot q}{q} \right]$

$[\sim(\sim p \vee \sim q) \supset (p \cdot q)] \supset [\sim(p \cdot q) \supset (\sim p \vee \sim q)]$ (1)

[(1), 40, Inf] $\sim(p \cdot q) \supset (\sim p \vee \sim q)$

উপপাদ্য 43 $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \cdot q)$ [*3·14]

প্রমাণ

$\left[3 \text{ (Transp) } \frac{p \cdot q}{p}, \frac{(\sim p \vee \sim q)}{q} \right]$

$[(p \cdot q) \supset \sim(\sim p \vee \sim q)] \supset [(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \cdot q)]$ (1)

[(1), 39, Inf] $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \cdot q)$

উপপাদ্য 44 $p \supset [q \supset (p \cdot q)]$ [*3·2]

প্রমাণ : [উপপাদ্য 41 দেখ ।]

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে Adj নামক যুক্তিবিধির সঙ্গে আমাদের পরিচয় হয়েছে। PM তন্ত্রে কিন্তু এ বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা নেই (ফলে অবরোহণ ক্রিয়া অনেক সময় জটিল আকার ধারণ করে)। তবে PM-অনুমোদিত যুক্তিবিধির—নিবেশনের ও Inf-এর ও উপপাদ্য 44-এর সাহায্য নিয়ে Adj উপবিধি প্রমাণ করা যায়। এবং PM-এর উপবিধি হিসাবে প্রমাণিত হলে PM অবরোহে এ উপবিধির সাহায্য নিতে পারি।

† ৪৭৪ পৃষ্ঠায় পাদটীকা দ্রষ্টব্য।

Adj উপপাদ্য : যদি 'ব' আর 'ভ' PM-এর তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে "ব · ভ"-ও PM-এর তন্ত্রবাক্য।

প্রমাণ

$\left[44 \frac{ব}{p}, \frac{ভ}{q}\right]$	ব ⊃ [ভ ⊃ (ব · ভ)]	(1)
[স্বীকৃত প্রকল্প]	ব	(2)
[(1), (2), Inf]	ভ ⊃ (ব · ভ)	(3)
[স্বীকৃত প্রকল্প]	ভ	(4)
[(3), (4), Inf]	ব · ভ	

উদাহরণ

মনে কর, প্রমাণ করতে হবে যে : $p \equiv \sim\sim p$

উপপাদ্য 11 ও 13 নিয়ে Adj ও Df ≡ প্রয়োগ করে আমরা সহজেই উক্ত প্রমাণ করতে পারি, পারি এভাবে

[11]	$p \supset \sim\sim p$	(1)
[13]	$\sim\sim p \supset p$	(2)
[(1), (2), Adj]	$(p \supset \sim\sim p) \cdot (\sim\sim p \supset p)$	(3)
[(3), Df ≡]	$p \equiv \sim\sim p$	

যদি Adj উপবিধি প্রয়োগের সুযোগ বা অনুমোদন না থাকত তাহলে এভাবে উক্ত সূত্রটি প্রমাণ করতে হত।

$\left[44 \ \frac{p \supset \sim\sim p}{p}, \ \frac{\sim\sim p \supset p}{q}\right]$

$(p \supset \sim\sim p) \supset \{(\sim\sim p \supset p) \supset [(p \supset \sim\sim p) \cdot (\sim\sim p \supset p)]\}$ (1)

[11]	$p \supset \sim\sim p$	(2)
[(1), (2), Inf]	$(\sim\sim p \supset p) \supset [(p \supset \sim\sim p) \cdot (\sim\sim p \supset p)]$	(3)
[13]	$\sim\sim p \supset p$	(4)
[3, 4, Inf]	$(p \supset \sim\sim p) \cdot (\sim\sim p \supset p)$	(5)
[(5), Df ≡]	$p \equiv \sim\sim p$	

উপপাদ্য 45 $(p \cdot q) \supset (q \cdot p)$ [*3·22]

প্রমাণ

$\left[42 \ \frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right]$	$\sim(q \cdot p) \supset (\sim q \vee \sim p)$	(1)
$\left[\text{Perm} \ \frac{\sim q}{p}, \frac{\sim p}{q}\right]$	$(\sim q \vee \sim p) \supset (\sim p \vee \sim q)$	(2)
[(1), (2), HS]	$\sim(q \cdot p) \supset (\sim p \vee \sim q)$	(3)

[43] $(\sim p \vee \sim q) \supset \sim(p \cdot q)$ (4)

[3, (4), HS] $\sim(q \cdot p) \supset \sim(p \cdot q)$ (5)

$\left[16 \text{ (Transp) } \frac{q \cdot p}{q}, \frac{p \cdot q}{p} \right]$

$[\sim(q \cdot p) \supset \sim(p \cdot q)] \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot p)]$ (6)

[(6), (5), Inf] $(p \cdot q) \supset (q \cdot p)$

উপপাদ্য 46 $\sim(p \cdot \sim p)$ [*3·24]

প্রমাণ

$\left[10 \ \frac{\sim p}{p} \right]$ $\sim p \vee \sim\sim p$ (1)

$\left[43 \ \frac{\sim p}{q} \right]$ $(\sim p \vee \sim\sim p) \supset \sim(p \cdot \sim p)$ (2)

[(1), (2), Inf] $\sim(p \cdot \sim p)$

এ সূত্রটির নাম law of non-contradiction বা অবিরোধের নিয়ম।

উপপাদ্য 47 $(p \cdot q) \supset p$ [Simp] [*3·26]

প্রমাণ

$\left[2 \ \frac{q}{p}, \frac{p}{q} \right]$ $p \supset (q \supset p)$ (1)

[(1), Def ⊃] $\sim p \vee (\sim q \vee p)$ (2)

$\left[24 \ \frac{\sim p}{p}, \frac{\sim q}{q}, \frac{p}{r} \right]$

$[\sim p \vee (\sim q \vee p)] \supset [(\sim p \vee \sim q) \vee p]$ (3)

[(2), (3), Inf] $(\sim p \vee \sim q) \vee p$ (4)

$\left[28 \ \frac{\sim p \vee \sim q}{p}, \frac{p}{q} \right]$ $[(\sim p \vee \sim q) \vee p] \supset [\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p]$ (5)

[(5), (4), Inf] $\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p$ (6)

[(6), Df ·] $(p \cdot q) \supset p$

এ বাক্যকে বলে সংযোগীসমুচ্ছেদের, Simplification-এর, সূত্র, সংক্ষেপে—Simp-এর সূত্র। পরবর্তী সূত্রটিও এ নামে অভিহিত হয়। উপপাদ্য 2 দ্রষ্টব্য ; সেটিও Simp সূত্র।

উপপাদ্য 48 $(p \cdot q) \supset q$ [Simp] [*3·27]

প্রমাণ

$\left[14 \ \frac{\sim p \vee \sim q}{q} \right]$ $[\sim p \supset (\sim p \vee \sim q)] \supset [\sim(\sim p \vee \sim q) \supset p]$ (1)

$\left[18 \; \frac{\sim p}{p}, \; \frac{\sim q}{q} \right] \quad \sim p \supset (\sim p \vee \sim q)$ (2)

$[\,(1), (2), \text{Inf}\,] \quad \sim(\sim p \vee \sim q) \supset p$ (3)

$[\,(3), \text{Df} \cdot\,] \quad (p \cdot q) \supset p$

উপপাদ্য 49 $[\,(p \cdot q) \supset r\,] \supset [\,p \supset (q \supset r)\,]$ [Exp] [∗3·3]

প্রমাণ

$\left[8 \text{ (Id)} \; \frac{(p \cdot q) \supset r}{p} \right] \quad [\,(p \cdot q) \supset r\,] \supset [\,(p \cdot q) \supset r\,]$ (1)

$[\,(1), \text{Df} \cdot\,] \quad [\,(p \cdot q) \supset r\,] \supset [\,\sim(\sim p \vee \sim q) \supset r\,]$ (2)

$\left[14 \text{ (Transp)} \; \frac{\sim p \vee \sim q}{p}, \; \frac{r}{q} \right] \quad [\,\sim(\sim p \vee \sim q) \supset r\,] \supset [\,\sim r \supset (\sim p \vee \sim q)\,]$ (3)

$\left[8 \text{ (Id)} \; \frac{\sim r \supset (\sim p \vee \sim q)}{p} \right] \quad [\,\sim r \supset (\sim p \vee \sim q)\,] \supset [\sim r \supset (\sim p \vee \sim q)\,]$ (4)

$[\,(4), \text{Def} \supset\,] \quad [\,\sim r \supset (\sim p \vee \sim q)\,] \supset [\sim r \supset (p \supset \sim q)\,]$ (5)

$\left[4 \text{ (Comm)} \; \frac{\sim r}{p}, \; \frac{p}{q}, \; \frac{\sim q}{r} \right] \quad [\,\sim r \supset (p \supset \sim q)\,] \supset [\,p \supset (\sim r \supset \sim q)\,]$ (6)

[আমাদের হাতে যদি সমার্থক নিবেশনের নিয়ম থাকত তাহলে আমরা (6)-এতে '$\sim r \supset \sim q$"-এর পরিবর্তে "$q \supset r$" নিবেশন করে পেতাম ঃ $[\sim r \supset (p \supset \sim q)\,] \supset [\,p \supset (q \supset r)\,]$ (7) ; তারপর (1)-(7)-এতে HS প্রয়োগ করলেই উপপাদ্যটি প্রমাণ হয়ে যেত। কিন্তু "$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim r)$" এখনও প্রমাণ হয় নি। আর PM-এতে সমার্থক নিবেশনবিধি প্রয়োগের ব্যবস্থাও নেই। পরে দেখব, PM-এতেই সমার্থক নিবেশন উপবিধি হিসাবে প্রমাণ করা যায়। তবে এ উপবিধির সুযোগ এখনও নিতে পারি না ; এজন্য প্রমাণটি নিম্নোক্তরূপে সম্পূর্ণ করতে হবে।]

$\left[5 \text{ (Syll)} \; \frac{\sim r \supset \sim q}{q}, \; \frac{q \supset r}{r} \right]$

$[\,(\sim r \supset \sim q) \supset (q \supset r)\,] \supset \{\,[\,p \supset (\sim r \supset \sim q)\,] \supset [\,p \supset (q \supset r)\,]\,\}$ (7)

$\left[16 \; \frac{r}{q}, \; \frac{q}{p} \right] \quad (\sim r \supset \sim q) \supset (q \supset r)$ (8)

$[\,(7), (8), \text{Inf}\,] \quad [\,p \supset (\sim r \supset \sim q)\,] \supset [\,p \supset (q \supset r)\,]$ (9)

[(1), (2), (3), (4), (5), (6), (9), HS†] $[\,(p \cdot q) \supset r\,] \supset [\,p \supset (q \supset r)\,]$

---

† প্রসঙ্গত, HS উপবিধি প্রয়োগের সুযোগ না থাকলে উক্ত প্রমাণ কি জটিলাকার ধারণ করত, ভেবে দেখ।

ইটালীয় যুক্তিবিজ্ঞানী পিয়েনো (Peano) অনুসরণে এ সূত্রকে PM-এতে Exportation-এর সূত্র (পূর্বকল্পলাঘবের সূত্র) বলা হয়।

উপপাদ্য 50 $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \cdot q) \supset r]$ [Imp] [*3·31]

প্রমাণ

$\left[8 \text{ (Id)} \frac{p \supset (q \supset r)}{p} \right]$ $[p \supset (q \supset r)] \supset [p \supset (q \supset r)]$ (1)

[(1), Df ⊃] $[p \supset (q \supset r)] \supset [\sim p \vee (\sim q \vee r)]$ (2)

$\left[24 \ \frac{\sim p}{p}, \frac{\sim q}{q} \right]$ $[\sim p \vee (\sim q \vee r)] \supset [(\sim p \vee \sim q) \vee r]$ (3)

$\left[28 \ \frac{\sim p \vee \sim q}{p}, \frac{r}{q} \right]$ $[(\sim p \vee \sim q) \vee r] \supset [\sim(\sim p \vee \sim q) \supset r]$ (4)

[(4), Def ·] $[(\sim p \vee \sim q) \vee r] \supset [(p \cdot q) \supset r]$ (5)

[(1), (2), (3), (5), HS] $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \cdot q) \supset r]$

পিয়েনো অনুসরণে এ সূত্রটিকে PM-এতে Importation-এর সূত্র (পূর্বকল্প গৌরবের সূত্র) বলা হয়।

উপপাদ্য 51 $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$ [Syll] [*3·33]

প্রমাণ

$\left[50 \text{ (Imp)} \ \frac{p \supset q}{p}, \frac{q \supset r}{q}, \frac{p \supset r}{r} \right]$

$\{(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]\} \supset \{[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)\}$ (1)

[(1), 6 (Syll), Inf] $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

উপপাদ্য 52 $[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$ [Syll] [*3·34]

প্রমাণ

$\left[50 \text{ (Imp)} \ \frac{q \supset r}{p}, \frac{p \supset q}{q}, \frac{p \supset r}{r} \right]$

$\{(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]\} \supset \{[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)\}$ (1)

[(1), 5 (Syll), Inf] $[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$

উপপাদ্য 51 এবং 52ও Syll নামে খ্যাত। এ সূত্র দুটির সঙ্গে 5 ও 6 তুলনীয়। লক্ষণীয়, 5 ও 6-এর চেয়ে 51 ও 52-এর ব্যবহার আরও বেশী সুবিধাজনক।

উপপাদ্য 53 $[p \cdot (p \supset q)] \supset q$ [Ass] [*3·35]

প্রমাণ

$\left[50 \text{ (Imp)} \ \frac{p \supset q}{q}, \frac{q}{r} \right]$

$\{p \supset [(p \supset q) \supset q]\} \supset \{[p \cdot (p \supset q)] \supset q\}$ (1)

[(1), 22, Inf] $[p \cdot (p \supset q)] \supset q$

এ সূত্রের নাম Assertion-এর সূত্র। Inf নামক যুক্তিবিধির বা MP বিধির সঙ্গে এর পার্থক্য লক্ষণীয়। লক্ষণীয় যে এটি স্বতসত্য বাক্য, যুক্তিবিধি নয়।

উপপাদ্য 54 $[(p \cdot q) \supset r] \supset [(p \cdot \sim r) \supset \sim q]$
[Transp] [*3·37]

প্রমাণ

$\left[15 \text{ (Transp) } \frac{q}{p}, \frac{r}{q}\right]$ $(q \supset r) \supset (\sim r \supset \sim q)$ (1)

$\left[5 \text{ (Syll) } \frac{q \supset r}{q}, \frac{\sim r \supset \sim q}{r}\right]$ $[(q \supset r) \supset (\sim r \supset \sim q)] \supset$
$\{[p \supset (q \supset r)] \supset [p \supset (\sim r \supset \sim q)]\}$ (2)

[(1), (2), Inf] $[p \supset (q \supset r)] \supset [p \supset (\sim r \supset \sim q)]$ (3)

[49 (Exp)] $[(p \cdot q) \supset r] \supset [p \supset (q \supset r)]$ (4)

$\left[50 \text{ (Imp) } \frac{\sim r}{q}, \frac{\sim q}{r}\right]$ $[p \supset (\sim r \supset \sim q)] \supset [(p \cdot \sim r) \supset \sim q]$ (5)

[(4), (3), (5), HS] $[(p \cdot q) \supset r] \supset [(p \cdot \sim r) \supset \sim q]$

এর আগে চারটি Transp সূত্র উল্লেখ করা হয়েছে। এটি পঞ্চম Transp সূত্র।

উপপাদ্য 55 $(p \cdot q) \supset (p \supset q)$ [*3·4]

প্রমাণ

$\left[5 \text{ (Syll) } \frac{p \supset q}{r}, \frac{p \cdot q}{p}\right]$

$[q \supset (p \supset q)] \supset \{[(p \cdot q) \supset q] \supset [(p \cdot q) \supset (p \supset q)]\}$ (1)

[(1), 2, Inf] $[(p \cdot q) \supset q] \supset [(p \cdot q) \supset (p \supset q)]$ (2)

[(2), 48 (Simp), Inf] $(p \cdot q) \supset (p \supset q)$

উপপাদ্য 56 $(p \supset q) \supset \{(p \supset r) \supset [p \supset (q \cdot r)]\}$
[Comp] [*3·43]

প্রমাণ

$\left[5 \text{ (Syll) } \frac{r \supset (q \cdot r)}{r}\right]$ $\{q \supset [r \supset (q \cdot r)]\} \supset \{(p \supset q) \supset$
$\{p \supset [r \supset (q \cdot r)]\}\}$ (1)

$\left[44 \frac{q}{p}, \frac{r}{q}\right]$ $q \supset [r \supset (q \cdot r)]$ (2)

[(1), (2), Inf] $(p \supset q) \supset \{p \supset [r \supset (q \cdot r)]\}$ (3)

$\left[34 \frac{r}{q}, \frac{q \cdot r}{r}\right]$ $\{p \supset [r \supset (q \cdot r)]\} \supset \{(p \supset r) \supset$
$[p \supset (q \cdot r)]\}$ (4)

[(3), (4), HS] $(p \supset q) \supset \{(p \supset r) \supset [p \supset (q \cdot r)]\}$

পিয়েনো এ সূত্রটিকে Composition-এর সূত্র বলে অভিহিত করেছেন। PM-এতেও সূত্রটিকে এ নামে, বা সংক্ষেপে Comp বলে, উল্লেখ করা হয়।

উপপাদ্য 57 $(p \supset q) \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot r)]$ [Fact] [*3·45]

প্রমাণ

$\left[6 \text{ (Syll) } \frac{\sim r}{r}\right]$ $(p \supset q) \supset [(q \supset \sim r) \supset (p \supset \sim r)]$ (1)

$\left[15 \text{ (Transp) } \frac{q \supset \sim r}{p}, \frac{p \supset \sim r}{q}\right]$
$[(q \supset \sim r) \supset (p \supset \sim r)] \supset [\sim(p \supset \sim r) \supset \sim(q \supset \sim r)]$ (2)

[(2), Def ⊃] $[(q \supset \sim r) \supset (p \supset \sim r)] \supset [\sim(\sim p \vee \sim r) \supset \sim(\sim q \vee \sim r)]$ (3)

[(3), Def.] $[(q \supset \sim r) \supset (p \supset \sim r)] \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]$ (4)

[(1), (4), HS] $(p \supset q) \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]$

এ সূত্রের বক্তব্য হল এই : যে-কোনো প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প ও অনুকল্পের সঙ্গে অভিন্ন বাক্য সংযোগ করা যায়। 'করা যায়' মানে এভাবে যে বাক্য পাওয়া যায় তা মূল বাক্য দ্বারা প্রতিপন্ন হয়। পিয়েনো এ সূত্রকে Factor-এর সূত্র (গুণকের সূত্র বা সংযোগীর সূত্র) বলে অভিহিত করেন। PM-এতে সূত্রটিকে সংক্ষেপে Fact বলে উল্লেখ করা হয়।

উপপাদ্য 58 $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]$ [*3·47]

প্রমাণ

$\left[47 \text{ (Simp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{q \supset s}{q}\right]$
$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset (p \supset r)$ (1)

$\left[57 \text{ (Fact) } \frac{r}{q}, \frac{q}{r}\right]$
$(p \supset r) \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot q)]$ (2)

$\left[50 \text{ (Imp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{p \cdot q}{q}, \frac{r \cdot q}{r}\right]$
$\{(p \supset r) \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot q)\} \supset \{[(p \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (r \cdot q)\}$ (3)

[(3), (2), Inf] $[(p \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (r \cdot q)$ (4)

$\left[45 \ \frac{r}{p}\right]$ $(r \cdot q) \supset (q \cdot r)$ (5)

[(4), (5), HS] $[(p \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (q \cdot r)$ (6)

$\left[49 \text{ (Exp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{p \cdot q}{q}, \frac{q \cdot r}{r} \right]$

$$\{[(p \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (q \cdot r)\} \supset \{(p \supset r) \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]\} \quad (7)$$

[(7), (6), Inf] $(p \supset r) \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]$ (8)

[(1), (8), HS] $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]$ (9)

$\left[48 \text{ (Simp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{q \supset s}{q} \right]$

$$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset (q \supset s) \quad (10)$$

$\left[57 \text{ (Fact) } \frac{q}{p}, \frac{s}{q} \right]$

$$(q \supset s) \supset [(q \cdot r) \supset (s \cdot r)] \quad (11)$$

$\left[50 \text{ (Imp) } \frac{q \supset s}{p}, \frac{q \cdot r}{q}, \frac{s \cdot r}{r} \right]$

$$\{(q \supset s) \supset [(q \cdot r) \supset (s \cdot r)]\} \supset \{[(q \supset s) \cdot (q \cdot r)] \supset (s \cdot r)\} \quad (12)$$

[(12), (11), Inf] $[(q \supset s) \cdot (q \cdot r)] \supset (s \cdot r)$ (13)

$\left[45 \frac{s}{p}, \frac{r}{q} \right]$ $(s \cdot r) \supset (r \cdot s)$ (14)

[(13), (14), HS] $[(q \supset s) \cdot (q \cdot r)] \supset (r \cdot s)$ (15)

$\left[49 \text{ (Exp) } \frac{q \supset s}{p}, \frac{q \cdot r}{q}, \frac{r \cdot s}{r} \right]$

$$\{[(q \supset s) \cdot (q \cdot r)] \supset (r \cdot s)\} \supset \{(q \supset s) \supset [(q \cdot r) \supset (r \cdot s)]\} \quad (16)$$

[(16), (15), Inf] $(q \supset s) \supset [(q \cdot r) \supset (r \cdot s)]$ (17)

[(10), (17), HS] $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(q \cdot r) \supset (r \cdot s)]$ (18)

$\left[38 \frac{(p \supset r) \cdot (q \supset s)}{p}, \frac{p \cdot q}{q}, \frac{q \cdot r}{r}, \frac{r \cdot s}{s} \right]$

$$\{[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (q \cdot r)]\} \supset \{\{[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(q \cdot r) \supset (r \cdot s)]\} \supset \{[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]\}\} \quad (19)$$

[(19), (9), Inf] $\{[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(q \cdot r) \supset (r \cdot s)]\} \supset \{[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]\}$ (20)

[(20), (18), Inf] $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]$

উপপাদ্য 59 $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee s)]$ [∗3·48]

প্রমাণ

$\left[47 \text{ (Simp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{q \supset s}{q}\right]$ $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset (p \supset r)$ (1)

$\left[27 \frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right]$ $(p \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (r \vee q)]$ (2)

$\left[50 \text{ (Imp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{p \vee r}{q}, \frac{r \vee q}{r}\right]$

$\{(p \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (r \vee q)]\} \supset$
$\{[(p \supset r) \cdot (p \vee q)] \supset (r \vee q)\}$ (3)

[(3), (2) Inf] $[(p \supset r) \cdot (p \vee q)] \supset (r \vee q)$ (4)

$\left[\text{Perm } \frac{r}{p}\right]$ $(r \vee q) \supset (q \vee r)$ (5)

[(4), (5), HS] $[(p \supset r) \cdot (p \vee q)] \supset (q \vee r)$ (6)

$\left[49 \text{ (Exp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{p \vee r}{q}, \frac{q \vee r}{r}\right]$

$\{[(p \supset r) \cdot (p \vee q)] \supset (q \vee r)\} \supset \{(p \supset r) \supset$
$[(p \vee q) \supset (q \vee r)]\}$ (7)

[(7), (6), Inf] $(p \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (q \vee r)]$ (8)

[(1), (8), HS] $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (q \vee r)]$ (9)

$\left[48 \text{ (Simp) } \frac{p \supset r}{p}, \frac{q \supset s}{q}\right]$

$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset (q \supset s)$ (10)

$\left[27 \frac{s}{r}, \frac{r}{p}\right]$ $(q \supset s) \supset [(q \vee r) \supset (s \vee r)]$ (11)

$\left[50 \text{ (Imp) } \frac{q \supset s}{p}, \frac{q \vee r}{q}, \frac{s \vee r}{r}\right]$

$\{(q \supset s) \supset [(q \vee r) \supset (s \vee r)]\} \supset$
$\{[(q \supset s) \cdot (q \vee r)] \supset (s \vee r)\}$ (12)

[(12), (11), Inf] $[(q \supset s) \cdot (q \vee r)] \supset (s \vee r)$ (13)

$\left[\text{Perm } \frac{s}{p}, \frac{r}{q}\right]$ $(s \vee r) \supset (r \vee s)$ (14)

[(13), (14), HS] $[(q \supset s) \cdot (q \vee r)] \supset (r \vee s)$ (15)

$\left[49 \text{ (Exp) } \frac{q \supset s}{p}, \frac{q \vee r}{q}, \frac{r \vee s}{r}\right]$

$\{[(q \supset s) \cdot (q \vee r)] \supset (r \vee s)\} \supset$
$\{(q \supset s) \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]\}$ (16)

[(16), 15, Inf] $(q \supset s) \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]$ (17)

(10), (17), HS] $[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]$ (18)

$\left[38 \frac{(p \supset r) \cdot (q \supset s)}{p}, \frac{p \vee q}{q}, \frac{q \vee r}{r}, \frac{r \vee s}{s}\right]$

$$\{[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (q \vee r)]\} \supset$$
$$\{\{[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]\} \supset$$
$$\{[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee s)]\}\} \quad (19)$$

[(19), (9), Inf] $\{[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(q \vee r) \supset (r \vee s)]\} \supset$
$\{[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee s)]\}$ (20)

[(20), (18), Inf] $[(p \supset r)\cdot(q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee s)]$

উপপাদ্য 60 $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ [Transp] [*4·1]

প্রমাণ

[15, 16, Adj] $[(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)]\cdot[(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)]$ (1)

[(1), Df ≡] $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$

উপপাদ্য 61 $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$ [Transp] [*4·11]

প্রমাণ

$\left[47 \text{ (Simp) } \frac{p \supset q}{p}, \frac{q \supset p}{q}\right]$ $[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (p \supset q)$ (1)

[15 (Transp)] $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ (2)

[(1), (2), HS] $[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (\sim q \supset \sim p)$ (3)

$\left[48 \text{ (Simp) } \frac{p \supset q}{p}, \frac{q \supset p}{q}\right]$ $[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (q \supset p)$ (4)

$\left[15 \text{ (Transp) } \frac{q}{p}, \frac{p}{q}\right]$
$(q \supset p) \supset (\sim p \supset \sim q)$ (5)

[(4), (5), HS] $[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (\sim p \supset \sim q)$ (6)

$\left[56 \text{ (Comp) } \frac{(p \supset q)\cdot(q \supset p)}{p}, \frac{\sim p \supset \sim q}{q}, \frac{\sim q \supset \sim p}{r}\right]$

$$\{[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (\sim p \supset \sim q)\} \supset$$
$$\{\{[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (\sim q \supset \sim p)\} \supset$$
$$\{[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset [(\sim p \supset \sim q)\cdot(\sim q \supset \sim p)]\}\} \quad (7)$$

[(7), (6), Inf] $\{[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset (\sim q \supset \sim p)\} \supset$
$\{[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset [(\sim p \supset \sim q)\cdot(\sim q \supset \sim p)]\}$ (8)

[(8), (3), Inf] $[(p \supset q)\cdot(q \supset p)] \supset [(\sim p \supset \sim q)\cdot(\sim q \supset \sim p)]$ (9)

[(9), Def ≡] $(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$ (10)

এ প্রমাণ সম্পূর্ণ করা সহজ। উপপাদ্য 47 নিয়ে 'p'-এর জায়গায় '$\sim p$', আর 'q'-এর জায়গায় '$\sim q$' বসিয়ে অনুরূপ† ১০টি পর্বে পাবে ঃ

$(\sim p \equiv \sim q) \supset (p \equiv q)$। যেমন 11 ও 12 পর্ব হবে নিম্নরূপ

$$\left[47 \ \frac{\sim p \supset \sim q}{p}, \ \frac{\sim q \supset \sim p}{q} \right] \ [(\sim p \supset \sim q) \cdot (\sim q \supset \sim p)] \supset (\sim p \supset \sim q) \quad (11)$$

$$\left[16 \ \frac{p}{q}, \ \frac{q}{p} \right] \quad (\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p) \quad (12)$$

এভাবে অগ্রসর হয়ে 20 পর্বে পাবে ঃ $(\sim p \equiv \sim q) \supset (p \equiv q)$। শেষের কয়টি পর্ব হবে এরূপ ঃ

....

$$(\sim p \equiv \sim q) \supset (p \equiv q) \quad (20)$$

$$[(10), (20), \text{Adj}] \ [(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)] \cdot [(\sim p \equiv \sim q) \supset (p \equiv q)] \quad (21)$$

$$[(21), \text{Def} \equiv] \quad (p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$$

উপপাদ্য 60 ও 61 হল Transp। পূর্বে আরও ৫টি Transp সূত্র প্রমাণ করা হয়েছে। উপপাদ্য 3, 14, 15, 16 ও 54 দ্রষ্টব্য।

উপপাদ্য 62 $p \equiv \sim\sim p$ [DN] [$*$ 4·13]

প্রমাণ

নিজেরা প্রমাণ কর। প্রমাণ করার পর Adj উপপাদ্য প্রমাণের নিচেকার মন্তব্য (৪৭৮ পৃঃ) দেখতে পার।

উপপাদ্য 63 $p \equiv p$ [$*$ 4·2]

প্রমাণ

[8 (Id), 8, Adj, Def $\equiv$] ঃ প্রমাণটি সম্পূর্ণ করবার ভার পাঠকদের উপর রইল।

উপবিধি Adj মেনে না নিলে প্রমাণ নিম্নোক্ত রূপ গ্রহণ করত।

$$\left[44 \ \frac{p \supset p}{p}, \ \frac{p \supset p}{q} \right] \ (p \supset p) \supset \{ (p \supset p) \supset [(p \supset p) \cdot (p \supset p)] \} \quad (1)$$

$$[(1), 8, \text{Inf}] \quad (p \supset p) \supset [(p \supset p) \cdot (p \supset p)] \quad (2)$$

$$[(2), 8, \text{Inf}] \quad (p \supset p) \cdot (p \supset p) \quad (3)$$

$$[(3), \text{Def} \equiv] \quad p \equiv p$$

† অবশ্য ভাষ্যে সামান্য রদ-বদল করে নিতে হবে। যথা '15'-এর জায়গায় '16' লিখতে হবে]

উপপাদ্য 64 $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ [∗4.21]

প্রমাণ

$\left[45 \dfrac{p \supset q}{p}, \dfrac{q \supset p}{q}\right]$ $[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset [(q \supset p) \cdot (p \supset q)]$ (1)

[(1), Def ≡] $(p \equiv q) \supset (q \equiv p)$ [2]

$\left[45 \dfrac{q \supset p}{p}, \dfrac{(p \supset q)}{q}\right]$ $[(q \supset p) \cdot (p \supset q)] \supset [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$ (3)

[(3), Def ≡] $(q \equiv p) \supset (p \equiv q)$ (4)

[(2), (4), Adj, Def ≡] $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$

উপপাদ্য 65 $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \equiv r)$ [∗4·22]

প্রমাণ†

$\left[47 \dfrac{p \equiv q}{p}, \dfrac{q \equiv r}{q}\right]$ $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \equiv q)$ (1)

$\left[47 \dfrac{p \supset q}{p}, \dfrac{q \supset p}{q}\right]$ $[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset (p \supset q)$ (2)

[(2), Def ≡] $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$ (3)

[(1), (3), HS] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset q)$ (4)

$\left[48 \dfrac{p \equiv q}{p}, \dfrac{q \equiv r}{q}\right]$ $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \equiv r)$ (5)

$\left[47 \dfrac{q \supset r}{p}, \dfrac{r \supset q}{q}\right]$ $[(q \supset r) \cdot (r \supset q)] \supset (q \supset r)$ (6)

[(6), Def ≡] $(q \equiv r) \supset (q \supset r)$ (7)

[(5), (7), HS] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset r)$ (8)

$\left[38 \dfrac{(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)}{p}, \dfrac{p}{q}, \dfrac{q}{r}, \dfrac{r}{s}\right]$

$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset q)\} \supset$

$\{\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset r)\} \supset$

$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset r)\}\}$ (9)

[(9), (4), Inf] $\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset r)\} \supset$

$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset r)\}$ (10)

[(10), (8), Inf] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset r)$ (11)

[48] †† $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \equiv r)$ (12)

[48] ††† $(q \supset r) \cdot (r \supset q)] \supset (r \supset q)$ (13)

[(13), Def ≡] $[(q \equiv r) \supset (r \supset q)$ (14)

[(12), (14), HS] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset q)$ (15)

---

† এ প্রমাণের শেষে যে মন্তব্য করা হয়েছে তা আগে পড়ে নিতে পার।

†† (5) দেখ।

††† (6) দেখ।

$[47\dagger]$ $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \equiv q)$ (16)

$\left[48 \frac{p \supset q}{p}, \frac{q \supset p}{q}\right]$ $[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset (q \supset p)$ (17)

[(17), Def ≡] $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$ (18)

[(16), (18) HS] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset p)$ (19)

$\left[38 \frac{(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)}{p}, \frac{r}{q}, \frac{q}{r}, \frac{p}{s}\right]$

$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset q)\} \supset$
$\{\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset p)\} \supset$
$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset p)\}\}$ (20)

[(20), (15), Inf]
$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (q \supset p)\} \supset$
$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset p)\}$ (21)

[(21), (19), Inf] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset p)$ (22)

$\left[56 \text{ Comp } \frac{(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)}{p}, \frac{p \supset r}{q}, \frac{r \supset p}{r}\right]$

$\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \supset r)\} \supset$
$\{\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r) \supset (r \supset p)\} \supset \{(p \equiv q) \cdot$
$(q \equiv r)] \supset [(p \supset r) \cdot (r \supset p)]\}\}$ (23)

[(23), (11), Inf] $\{[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (r \supset p)\} \supset$
$[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset [(p \supset r) \cdot (r \supset p)]\}$ (24)

[(24), (22), Inf] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset [(p \supset r) \cdot (r \supset p)]$ (25)

[(25), Def ≡] $[(p \equiv q) \cdot (q \equiv r)] \supset (p \equiv r)$

এ প্রমাণটি খুব জটিল, ঠিক। তবে এর জটিলতা বিভ্রান্ত করতে পারবে না, যদি লক্ষ কর যে ঃ (1)—(4), (5)—(8), (12)—(15), (16)—(19)—এ অবরোহখণ্ডগুলি অনুরূপ; আবার, (9)—(11), (20)—(22)-ও অনুরূপ পঙ্‌ক্তিগুচ্ছ। সর্বশেষে Comp-এর প্রয়োগ লক্ষণীয়।

উপপাদ্য 63, 64, 65—এ তিনটি সূত্রের যুক্ত বক্তব্য হল ঃ "≡" যে সম্বন্ধ ব্যক্ত করে তা স্বসম্বন্ধক (reflexive), সমমুখী (symmetical) ও সংক্রামক বা মধ্যপদলোপী (transitive)।

উপপাদ্য 66 $p \equiv (p \cdot p)$ [Law of Tautology] [*4·24]

প্রমাণ

$\left[\text{Taut } \frac{\sim p}{p}\right]$ $(\sim p \vee \sim p) \supset \sim p$ (1)

† (1) দেখ।

$\left[15 \frac{\sim p \vee \sim p}{p}, \frac{\sim p}{q} \right]$ $[(\sim p \vee \sim p) \supset \sim p] \supset [\sim\sim p \supset \sim(\sim p \vee \sim p)]$ (2)

[(1), (2), Inf] $\sim\sim p \supset \sim(\sim p \vee \sim p)$ (3)

[11, (3), HS] $p \supset \sim(\sim p \vee \sim p)$ (4)

[4, Def ·] $p \supset (p \cdot p)$ (5)

$\left[47 \frac{p}{q} \right]$ $(p \cdot p) \supset p$ (6)

[(5), (6), Adj, Def ≡] $p \equiv (p \cdot p)$

উপপাদ্য 67 $p \equiv (p \vee p)$ [Law of Tautology] [*4·25]

প্রমাণ

$\left[\text{Add} \frac{p}{q} \right]$ $p \supset (p \vee p)$ (1)

[Taut] $(p \vee p) \supset p$ (2)

[(1), (2), Adj, Def ≡] $p \equiv (p \vee p)$

উপপাদ্য 66 ও 67 বলে tautologyর, বা পুনরুক্তির নিয়ম। Taut নামক সূত্রের সঙ্গে এর পার্থক্য লক্ষ কর।†

উপপাদ্য 68 $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$ [Commutative Law for Conjunction] [*4·3]

প্রমাণ : ভাষ্য দিয়ে দেওয়া হল। পাঠক নিজেই প্রমাণ করবে।

[45], $\left[45 \frac{q}{p}, \frac{p}{q} \right]$, [—Adj], [—Def ≡]

উপপাদ্য 69 $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ [Commutative Law for Alternation] [*4.31]

প্রমাণ : কেবল ভাষ্য দিয়ে দেওয়া হল।

[Perm], $\left[\text{Perm} \frac{q}{p}, \frac{p}{q} \right]$, [—Adj], [—Def ≡]

উপপাদ্য 70 $(p \equiv q) \supset [(p \vee r) \equiv (q \vee r)]$ [*4·37]

প্রমাণ

$\left[58 \frac{p \supset q}{p}, \frac{(p \vee r) \supset (q \vee r)}{r}, \frac{q \supset p}{q}, \frac{(q \vee r) \supset (p \vee r)}{s} \right]$

$\{\{(p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]\} \cdot \{(q \supset p) \supset [(q \vee r) \supset (p \vee r)]\}\} \supset \{[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset \{[(p \vee r) \supset (q \vee r)] \cdot [(q \vee r) \supset (p \vee r)]\}\}$ (1)

† এদের নামের ভিন্নতাও লক্ষণীয়। PM-এতে সূত্রটিকে বলে *Principle* of tautology (সংক্ষেপে Taut), 66 ও 67-এর নাম হল : *Laws* of tautology।

$\left[27\ \frac{p}{q}, \frac{q}{r}, \frac{r}{p}\right]\quad (p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$ (2)

$\left[27\ \frac{p}{r}, \frac{r}{p}\right]\quad (q \supset p) \supset [(q \vee r) \supset (p \vee r)]$ (3)

[(2), (3), Adj] (4)†

[(1), (4), Inf] $[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset \{[(p \vee r) \supset (q \vee r)] \cdot [(q \vee r) \supset (p \vee r)]\}$ (5)

[(5), Def $\equiv$] $(p \equiv q) \supset [(p \vee r) \equiv (q \vee r)]$

উক্তরূপে নিম্নোক্ত উপপাদ্যটিও প্রমাণ করা যায়

উপপাদ্য 71 $(p \equiv q) \supset [(r \vee p) \equiv (r \vee q)]$

তবে এ প্রমাণে সূত্র 27-এর পরিবর্তে Sum সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।
প্রমাণটির প্রথম কয়টি পর্ব কষে দেওয়া হল।

প্রমাণ

$\left[58\ \frac{p \supset q}{p}, \frac{(r \vee p) \supset (r \vee q)}{r}, \frac{q \supset p}{q}, \frac{(r \vee q) \supset (r \vee p)}{s}\right]$

$\{\{(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]\} \cdot \{(q \supset p) \supset [(r \vee q) \supset (r \vee p)]\}\} \supset \{[(p \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset \{[(r \vee p) \supset (r \vee q)] \cdot [(r \vee q) \supset (r \vee p)]\}\}$ (1)

$\left[\text{Sum}\ \frac{p}{q}, \frac{q}{r}, \frac{r}{p}\right]\quad (p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$ (2)

$\left[\text{Sum}\ \frac{p}{r}, \frac{r}{p}\right]\quad (q \supset p) \supset [(r \vee q) \supset (r \vee p)]$ (3)

প্রমাণটির বাকি অংশ পাঠক নিজে সম্পূর্ণ করবে।

অবরোহে সমার্থক নিবেশনের বা সমবেশনের কী অসাধারণ গুরুত্ব তা আমরা ঊনবিংশ অধ্যায়ে দেখেছি, দেখেছি যে অবরোহণ করার জন্য পদে পদে সমবেশনের প্রয়োজন। ঐ অধ্যায়ে ১৩টি সমার্থতা সূত্র মূল বিধি হিসাবে মানা হয়েছে, আর নিম্নোক্ত সাধারণ বিধিটি ধরে নেওয়া হয়েছে ঃ

> যে কোনো অবস্থায় যে কোনো বাক্যের যে কোনো অংশের বদলে এর সমার্থক নিবেশন করা যায়।

কিন্তু PM-এর বাক্যকলনে এ বিধি মূল বিধি হিসাবে স্বীকৃত হয় নি, এতে সরাসরি এ বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা নেই। ফলে PM অবরোহ অনেক সময় অতিশয় জটিল আকার ধারণ করে। এ বিধি প্রয়োগের ব্যবস্থা থাকলে কী সুবিধা হত, আর না থাকাতে কী অসুবিধা একটা উদাহরণ দিয়ে তা দেখানো হল।

† (4) অনুক্ত থাকল।

নিম্নোক্ত উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করা হয়েছে ঃ

I $(p \supset \sim p) \supset \sim p$ [উপপাদ্য 1 দেখ]

II $p \equiv \sim\sim p$ [উপপাদ্য 62 দেখ]

এখন, মনে কর, নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে চাই।

উপপাদ্য $(\sim p \supset p) \supset p$ [উপপাদ্য 17 দেখ]

যদি সমবেশন বা Interchange বিধি, সংক্ষেপে—Int, প্রয়োগের ব্যবস্থা থাকত তাহলে এ প্রমাণ অতি সহজে এভাবে করা যেত।

প্রমাণ

$$\left[\mathrm{I}\ \frac{\sim p}{p}\right]\ (\sim p \supset \sim\sim p) \supset \sim\sim p \qquad (1)$$

$$[\ (1), \mathrm{II}, \mathrm{Int}\ ]\ (\sim p \supset p) \supset p$$

কিন্তু সমবেশন বিধি প্রয়োগের অনুমোদন না থাকলে উক্ত উপপাদ্য এভাবে এত সহজে প্রমাণ করা যায় না। সেক্ষেত্রে এর প্রমাণ কী রূপ ধারণ করবে তা বুঝতে পারবে উপপাদ্য 17-এর প্রমাণ দেখলে।

PM-এতে সমবেশন বিধির স্থান নেই ঠিক। তবে PM-স্বীকৃত যুক্তিবিধি আর কয়েকটি উপপাদ্যের সাহায্য নিয়ে এ বিধির যৌক্তিকতা প্রমাণ করা যায়, প্রমাণ করা যায় PM-এর উপবিধি হিসাবে। সমবেশন বিধির বিধান হবে ঃ

> যদি 'প' কোনো (PM-) তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'প'-তে সমনিবেশন করে যা পাওয়া যাবে তাও তন্ত্রবাক্য।

মনে কর, 'প', 'অ', 'স', 'ফ' হল সুবা। এখন Int উপপাদ্য এভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

Int উপপাদ্য

> যদি এমন হয় যে 'প' হল প্রদত্ত বাক্য, 'অ' হল 'প'-এর অঙ্গ (অংশ) এবং 'প'-এর অন্তর্গত যেকোনো 'অ'-এর পরিবর্তে এর প্রমাণিত সমার্থক† 'স' নিবেশন করলে যে বাক্য পাওয়া যায় তা হল 'ফ' (নিবেশনফল) তাহলে
>
> যদি 'প' তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'ফ'-ও তন্ত্রবাক্য।

মনে রাখতে হবে, উপরে "অঙ্গ" ("অংশ") কথাটি একটি বিশিষ্ট অর্থে, ব্যাপক অর্থে, ব্যবহার করা হয়েছে। এ অর্থে 'প' আর 'প'-এর অঙ্গ বা অংশ অভিন্ন হতে পারে, যথা

† 'p', 'q'-এর প্রমাণিত সমার্থক—এ কথার মানে "$p \equiv q$" তন্ত্রবাক্য (স্বতসত্য)

এ অর্থে কেবল 'p', 'q' যে "$p \cdot q$"-এর অঙ্গ তা নয়, "$p \cdot q$"-ও "$p \cdot q$"-এর অঙ্গ বলে গণ্য। আরও মনে রাখতে হবে, উক্ত উপপাদ্যে

প = যেকোনো প্রদত্ত বাক্য,
অ = প্রদত্ত বাক্যের অঙ্গ
স = 'অ'-এর সমার্থক বাক্য
ফ = নিবেশনলব্ধ বাক্য, নিবেশনফল

$$\text{মানে, ফ} = \text{প}\,\frac{\text{স}}{\text{অ}}$$

আমরা "— হল তন্ত্রবাক্য" এ কথাটা এভাবে সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করব : $\vdash$ —, যথা, "প হল তন্ত্রবাক্য" এ কথাটা লিখব এভাবে : $\vdash$ প। এ লিপিতে এভাবে উক্ত উপপাদ্যের পুনরুক্তি করতে পারি।

যদি 'প', 'অ', 'স', 'ফ' সুবাগুলি এমন হয় যে
'অ' হল 'প'-এর অংশ
$\vdash$ (অ $\equiv$ স)
ফ = $\left[\text{প}\,\frac{\text{স}}{\text{অ}}\right]$
$\vdash$ প
তাহলে $\vdash$ ফ

Int উপপাদ্য প্রমাণ করতে গিয়ে

প্রথমে, আমরা একটা মধ্যোপপাদ্য প্রমাণ করে নেব। তারপর, এ অন্তর্বর্তী সিদ্ধান্তের ভিত্তিতে PM-এতে Int বিধির যাথার্থ্য প্রমাণ করব; দেখাব যে—মধ্যবর্তী উপপাদ্যে যে বিধির কথা বলা হয়েছে তা যদি খাটে তাহলে Int বিধিও খাটবে।

মধ্যোপপাদ্য

যদি 'প', 'অ', 'স', 'ফ' সুবাগুলি এমন হয় যে
'অ' হল 'প'-এর অংশ
$\vdash$ (অ $\equiv$ স)
ফ = $\left[\text{প}\,\frac{\text{স}}{\text{অ}}\right]$
তাহলে $\vdash$ (প $\equiv$ ফ)†

† এ মধ্যোপপাদ্য আর মূল উপপাদ্যের পার্থক্য লক্ষ কর। মূল উপপাদ্যের পূর্বকল্পে চারটি অংশ (সংযোগী), আর মধ্যোপপাদ্যে তিনটি।

সংকেতলিপি ব্যবহার করে যা বলা হল তা এভাবে ব্যক্ত করা যেত।

যদি কোনো সুবার—সুবাটি স্বতসত্য হোক বা না হোক, তন্ত্রবাক্য হোক বা না হোক—কোনো অংশে এর প্রমাণিত সমার্থক নিবেশন করা হয়, তাহলে নিবেশনলব্ধ বাক্য মূল বাক্যের সমার্থক।

আমরা জানি PM-এর মূল যোজক হল '∼' আর 'v'। এ যোজক দিয়ে গঠিত বাক্য সম্বন্ধে যা প্রমাণ করা যাবে, বলা বাহুল্য, অন্য সত্যাপেক্ষ যোজক দিয়ে গঠিত বাক্য সম্বন্ধেও তা খাটবে। এ কথা মনে রেখে, সমবেশন করতে গিয়ে যেসব ক্ষেত্র পেতে পারি সেসব সম্ভাব্য ক্ষেত্রগুলি বিবেচনা করব।

(১) এমন হতে পারে যে : প হল অ, অর্থাৎ 'প' আর 'প'-এর অংশ 'অ' অভিন্ন, মানে সমগ্র 'প'-এর পরিবর্তে সমবেশন করতে হবে। উদাহরণ

$$\text{প}=p \cdot q, \quad \text{অ}=p \cdot q, \quad \text{স}=q \cdot p$$

$$\text{প}\ \frac{\text{স}}{\text{অ}}=\frac{q \cdot p}{p \cdot q}=\text{ফ}=q \cdot p$$

আমাদের দেখাতে হবে যে 'প' আর 'ফ' সমার্থক।

(২) এমন হতে পারে যে : 'প'-এর আকার হল : ∼(—) আর 'অ' হল '∼'-এর পরবর্তী অংশ, অর্থাৎ 'অ' হল 'প'-এর নিষেধিত অংশ। উদাহরণ

$$\text{প}=\sim(p \cdot q), \quad \text{অ}=p \cdot q, \quad \text{স}=q \cdot p$$

$$\text{প}\ \frac{\text{স}}{\text{অ}}=\frac{\sim(q \cdot p)}{p \cdot q}=\text{ফ}=\sim(q \cdot p)$$

আমাদের দেখাতে হবে যে, "$p \cdot q$" সম "$q \cdot p$"

সুতরাং "$\sim(p \cdot q)$" সম "$\sim(q \cdot p)$"

(৩) এমন হতে পারে যে : 'প' বৈকল্পিক বাক্য আর 'অ' হল 'প'-এর প্রথম বিকল্প। উদাহরণ

$$\text{প}=(p \cdot q) \vee (\sim p \vee \sim q)$$

$$\text{অ}=p \cdot q$$

$$\text{স}=q \cdot p \quad \text{প}\ \frac{\text{স}}{\text{অ}}=\frac{(q \cdot p) \vee (\sim p \vee \sim q)}{p \cdot q}=\text{ফ}$$

(৪) এমন হতে পারে যে : 'প' বৈকল্পিক বাক্য আর 'অ' হল 'প'-এর দ্বিতীয় বিকল্প।

তাহলে মোট নিম্নোক্ত চারটি ক্ষেত্র সম্ভব—

প্রথম ক্ষেত্র : প হল অ

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : প হল ∼অ

তৃতীয় ক্ষেত্র : প হল অ v ক

চতুর্থ ক্ষেত্র : প হল ক v অ [এখানে 'ক' কোনো সুবা]

মধ্যোপপাদ্যের প্রমাণ

প্রথম ক্ষেত্র : পূর্বস্বীকার (উক্ত উপপাদ্যের পূর্বকল্প দেখ) অনুসারে

$\vdash$ (অ $\equiv$ স) (১)

এখন, প হল অ (২) [প্রথম সম্ভাব্য ক্ষেত্র]

$$ফ = প \frac{স}{অ} = স \quad (৩)$$

$\therefore \vdash$ প $\equiv$ ফ [(১)-এতে 'অ'-এর পরিবর্তে 'প' আর 'স' এর পরিবর্তে 'ফ' বসিয়ে]

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : আমাদের দেখাতে হবে যে

যদি $\vdash$ (অ $\equiv$ স) তাহলে $\vdash$ ($\sim$অ $\equiv$ $\sim$স)

প্রমাণ

$\left[61\ (10)\ \frac{অ}{p}, \frac{স}{q} \right]$ (অ $\equiv$ স) $\supset$ ($\sim$অ $\equiv$ $\sim$স) (1)

[পূর্বস্বীকার] অ $\equiv$ স (2)

[(1), (2) Inf] $\sim$অ $\equiv$ $\sim$স

এ ক্ষেত্রে প হল $\sim$অ, আর ফ হল $\sim$স ; কেননা $ফ = \frac{স}{অ}$,

$\therefore \vdash$ (প $\equiv$ ফ)

তৃতীয় ক্ষেত্র : আমাদের দেখাতে হবে যে

যদি $\vdash$ (অ $\equiv$ স) তাহলে

$\vdash$ [অ v ক) $\equiv$ (স v ক]

প্রমাণ

$\left[70\ \frac{অ}{p}, \frac{স}{q}, \frac{ক}{r} \right]$

(অ $\equiv$ স) $\supset$ [(অ v ক) $\equiv$ (স v ক)] (1)

[পূর্বস্বীকার] অ $\equiv$ স (2)

[(1), (2), Inf] (অ v ক) $\equiv$ (স v ক)

এক্ষেত্রে প হল অ v ক ; কাজেই ফ হল স v ক ; কেননা $ফ = \frac{স}{অ}$ ।

$\therefore \vdash$ (প $\equiv$ ফ)

চতুর্থ ক্ষেত্র : আমাদের দেখাতে হবে যে

যদি $\vdash$ (অ $\equiv$ স) তাহলে

$\vdash$ [(ক v অ) $\equiv$ ক v স)]

প্রমাণ

$\left[71\ \frac{অ}{p}, \frac{স}{q}, \frac{ক}{r} \right]$

(অ $\equiv$ স) $\supset$ [(ক v অ) $\equiv$ (ক v স)] (1)

[পূর্বস্বীকার] অ ≡ স (2)

[(1), (2), Inf] (ক v অ) ≡ (ক v স)

এক্ষেত্রে প হল ক v অ ; কাজেই ফ হল ক v স।

∴ ⊢ (প ≡ ফ)

আমরা মধ্যোপপাদ্যটি প্রমাণ করলাম। Int উপপাদ্য প্রমাণ করতে হলে এখন কেবল প্রমাণ করার দরকার নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি।

উপপাদ্য ঃ যদি মধ্যোপাদ্যের সর্তগুলি খাটে তাহলে Int নিয়মও খাটবে।

মধ্যোপপাদ্যটির পূর্বকল্প আর Int উপপাদ্যটির পূর্বকল্প তুলনা কর। দেখবে যে Int উপপাদ্যে একটি অতিরিক্ত সর্ত আছে। সর্তটি হল ঃ ⊢ প। কাজেই আমাদের দেখাতে হবে যে, মধ্যোপপাদ্যটির পূর্বকল্পভুক্ত সর্তগুলি যদি খাটে এবং 'প' তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে 'ফ'-ও তন্ত্রবাক্য।

মধ্যোপপাদ্যের দীর্ঘ পূর্বকল্পটির সংক্ষেপক হিসাবে 'A' ব্যবহার করব, এবং মধ্যোপপাদ্যটি লিখব এভাবে ঃ

A ⊃ (প ≡ ফ)†

প্রমাণ

[65 (3) প/p, ফ/q]	(প ≡ ফ) ⊃ (প ⊃ ফ)	(1)
[মধ্যোপপাদ্য]	A ⊃ (প ≡ ফ)	(2)
[(2), (1), HS]	A ⊃ (প ⊃ ফ)	(3)
[মধ্যোপপাদের পূর্বকল্প (পূর্বস্বীকার)]	A	(4)
[(3), (4), Inf]	প ⊃ ফ	(5)
[পূর্বস্বীকার]	প	(6)
[5, (6), Inf]	ফ	

Int উপপাদ্য প্রমাণ করা হল। এতক্ষণ পর্যন্ত এ উপপাদ্যের সুযোগ কিন্তু আমরা গ্রহণ করি নি। এ প্রমাণের পর PM উপপাদ্য প্রমাণ করতে গিয়ে তোমরা এর সুযোগ নিতে পার।

সংশোধন

৪৬০ পৃষ্ঠায় ১৯ ছত্রে "উপপাদ্য 61 দেখ"—এর জায়গায় পড়তে হবে ঃ উপপাদ্য 62 দেখ। ৪৭৯-৪৮০ পৃষ্ঠা ঃ উপপাদ্য 48-এর প্রমাণে একটা বিশ্রী ভুল আছে। উপপাদ্যটি হল ঃ $(p \cdot q) \supset q$; কিন্তু প্রমাণ করা হয়েছে ঃ $(p \cdot q) \supset p$। শেষোক্ত বাক্যটি আসলে উপপাদ্য 47। তার মানে, উপপাদ্য 48-এর নিচে যে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে তা 47-এর বিকল্প প্রমাণ বলে গণ্য হতে পারে। নিচে উপপাদ্য 48-এর প্রমাণ দেওয়া হল।

উপপাদ্য 48 $(p \cdot q) \supset q$

প্রমাণ	[47 $\frac{q}{p}$, $\frac{p}{q}$]	$(q \cdot p) \supset q$	(1)
	[45]	$(p \cdot q) \supset (q \cdot p)$	(2)
	[(2), (1), HS]	$(p \cdot q) \supset q$	

† আর Int উপপাদ্য এভাবে ঃ (A · প) ⊃ ফ

অনুশীলনী

১. দেখাও যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি PM-তন্ত্রে নিষ্কাশনযোগ্য।

(১) $p \supset p$
(২) $q \supset (p \supset q)$
(৩) $(p \cdot q) \supset p$
(৪) $(p \cdot q) \supset q$
(৫) $(p \supset \sim q) \supset (q \supset \sim p)$
(৬) $(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)$
(৭) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$
(৮) $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$
(৯) $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$
(১০) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$
(১১) $(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$
(১২) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
(১৩) $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$
(১৪) $[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$
(১৫) $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$
(১৬) $[(p \supset q) \cdot (p \supset r)] \supset [p \supset (q \cdot r)]$
(১৭) $[(p \cdot q) \supset r] \supset [p \supset (q \supset r)]$
(১৮) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \cdot q) \supset r]$
(১৯) $(p \supset q) \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot r)]$

২. PM-তন্ত্রে নিম্নলিখিত বাক্যগুলি নিষ্কাশন কর †।

(1) $p \supset (\sim p \supset q)$ [* 2·24]
(2) $p \supset [(p \supset q) \supset q]$ [* 2·27]
(3) $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$ [* 2·32]
(4) $(q \supset r) \supset [(q \vee p) \supset (p \vee r)]$ [* 2·37]
(5) $[p \vee (p \vee q)] \supset (p \vee q)$ [* 2·4]
(6) $\sim(p \vee q) \supset (\sim p \vee \sim q)$ [* 2·49]
(7) $\sim(p \supset q) \supset (\sim p \supset q)$ [* 2·5]
(8) $\sim(p \supset q) \supset (p \supset \sim q)$ [* 2·51]
(9) $\sim(p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim q)$ [* 2·52]
(10) $\sim(p \supset q) \supset (q \supset p)$ [* 2·521]
(11) $(p \supset q) \supset [(\sim p \supset q) \supset q]$ [* 2·61]
(12) $(p \vee q) \supset [(p \supset q) \supset q]$ [* 2·62]
(13) $(p \vee q) \supset [(\sim p \vee q) \supset q]$ [* 2·63]
(14) $q \supset [p \supset (p \cdot q)]$ [* 3·21]
(15) $(p \supset r) \supset [(p \cdot q) \supset r]$ [* 3·41]

---

† তারকাচিহ্নিত সংখ্যাগুলি PM-এতে-দেওয়া উপপাদ্য সংখ্যা। কোনো উপপাদ্য নিষ্কাশন করতে না পারলে PM দেখ। ওতে যে উপপাদ্যের পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ দেওয়া হয় নি তার প্রত্যেকটির ডানধারে নিষ্কাশনের সুলুকসন্ধান সংক্ষেপে দেওয়া আছে।

গ্রন্থপঞ্জি

[আকেরমান্] Ackermann, R. J. : Modern Deductive Logic

[এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্] Ambrose & Lazerowitz : Fundamentals of Symbolic Logic

[ব্যাসন্-ওকনার] Basson & O'connor : Introduction of Symbolic Logic

[বেনেট্-বেইলিস্] Bennett & Baylis : Formal Logic : An Introduction

[কার্নাপ্] Carnap, Rudolf : Introduction of Symbolic Logic and its Applications

[কূলি] Cooley, J. C. : A Primer of Formal Logic

[কোপি] Copi, I. : Symbolic Logic

[দাস] Das, R. : Logic of Truth-functions : An Introduction to Symbolic Logic

[ইটন্] Eaton, R. M. : General Logic : An Introductory Survey

[ফ্যারিস্] Farris, J. A. : Truth-functional Logic

[ফিস্ক্] Fisk, Milton : A Modern Formal Logic

[ফিচ্] Fitch, F. B. : Symbolic Logic

[হজেস্] Hodges, Wilfrid : Logic

[হিউয়েস্-লন্ডি] Hughes & Londey : The Elements of Formal Logic

[জেফ্রি] Jeffrey, R. C. : Formal Logic : Its Scope and Limits

[মেট্স্] Mates, Benson : Elementary Logic

[কোয়াইন্ (১)] Quine, W. V. : Elementary Logic

[কোয়াইন্ (২)] ,, ,, : Methods of Logic

[কোয়াইন্ (৩)] ,, ,, : Mathematical Logic

[রায়খেন্বাখ্] Reichenbach : Elements of Symbolic Logic

[রাসেল্-হোয়াইট্হেড্] Whitehead & Russell : Principia Mathematica to *56 (Abridged Edition)

[স্ট্রসন্] Strawson : Introduction to Logical Theory

[সুপিস্] Suppes, Patrick : Introduction to Logic

[টার্স্কি] Tarski, Alfred : Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences

পাঠনির্দেশ

পঠনীয় গ্রন্থের নাম উল্লেখ না করে কেবল গ্রন্থকারের নাম উল্লেখ করা হল। গ্রন্থপঞ্জি দেখলেই বোঝা যাবে কোন্ গ্রন্থকারের নাম কোন্ গ্রন্থ বোঝাচ্ছে, বোঝা যাবে, কেন কোনো গ্রন্থকার-নামের পাশে '(১)', '(২)' ইত্যাদি ব্যবহার করা হল।

'পাঠনির্দেশ'-এ বহু বইর কথা বলা হয়েছে। তবে নিম্নোক্ত বইগুলি বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

Ambrose & Lazerowitz : Fundamentals of Symbolic Logic
Copi : Symbolic Logic
Farris : Truth-functional Logic
Hughes & Londey : The Elements of Formal Logic
Jeffrey : Formal Logic—Its scope & Limits
Quine : Methods of Logic

১
ভূমিকা: যুক্তি, যুক্তি-আকার ও বৈধতা

আকেরমান্ঃ অধ্যায় ১, ২ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ঃ অধ্যায় ১, ২ ; বেনেট্-বেইলিস্ঃ অধ্যায় ১ ; কোপিঃ অধ্যায় ১ ; ফ্যারিস্ঃ অধ্যায় ১ ; ফিচ্ঃ অধ্যায় ১ ; মেট্স্ঃ অধ্যায় ১।

২
বাক্য: বাক্যের প্রকারভেদ

বেনেট্-বেইলিস্ঃ অধ্যায় ২ ; হিউয়েস্-লন্‌ডিঃ অধ্যায় ১, ৩ ; হজেস্ঃ বিভাগ ১৬, ১৭ ; জেফ্রিঃ অধ্যায় ১ ; মেটস্ঃ অধ্যায় ২ বিভাগ ১, ২ ; কোয়াইন্ (১)ঃ বিভাগ ২ ; কোয়াইন্ (৩)ঃ বিভাগ ৪, ৫।

৩
সত্যাপেক্ষ বাক্য

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিট্স্ঃ অধ্যায় ৩ ; কারনাপঃ বিভাগ ৩ ; কোপিঃ অধ্যায় ২ ; ফ্যারিস্ঃ অধ্যায় ৩।

৪
নিষেধক, সংযৌগিক ও বৈকল্পিক

কোয়াইন্ (১) ঃ বিভাগ ১০ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ বিভাগ ১৫ ।

৫
দণ্ড ও বর্শা অপেক্ষক

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ বিভাগ ২২ ; কোপি ঃ বিভাগ ৮·৫ ; কোয়াইন্ (৩) ঃ বিভাগ ৯ ।

৬
প্রাকল্পিক বাক্য

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিট্স্ ঃ অধ্যায় ৫ ; জেফ্রি ঃ অধ্যায় ৩ ; টার্স্কি ঃ বিভাগ ৮, ৯ ; কোয়াইন্ (১) ঃ বিভাগ ৭, ১০ ; কোয়াইন্ (২) ঃ বিভাগ ৩ ; স্ট্রসন্ ঃ অধ্যায় ৩ ।

৭
দ্বিপ্রাকল্পিক বাক্য

হিউয়েস্-সন্ডি ঃ অধ্যায় ৬ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিট্স্ ঃ অধ্যায় ৫ ।

৮
কেবল দণ্ড ও বর্শা দিয়ে বাক্য ব্যক্তকরণ

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ বিভাগ ২২ ; কোপি ঃ বিভাগ ৮·৫ ; কোয়াইন্ (৩) ঃ বিভাগ ৯ ।

৯
যুক্তিবিজ্ঞানের ভাষা

কোয়াইন্ (১) ঃ বিভাগ ১১–১৩ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিট্স্ ঃ বিভাগ ২২ ; কোয়াইন্ (২) ঃ বিভাগ ৪, ৮ ; কোপি বিভাগ ঃ ৮·৩ ; হিউয়েস্-সন্ডি ঃ এ্যাপেন্ডিক্স ২ ।

১০

যৌগ সত্যসারণী ও প্রাথমিক যুক্তিবিধি

কূলি ঃ অধ্যায় ১ ; হিউয়েস্-লন্‌ডি ঃ অধ্যায় ৩, ৪, ৫ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজার-ওবির্টস্ ঃ অধ্যায় ৭ ; রায়খেন্‌বাখ্‌ ঃ অধ্যায় ১, ২ ।

১১

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ ঃ সত্যসারণী

ফ্যারিস্ ঃ অধ্যায় ৩ ; কোপি ঃ অধ্যায় ২ ; কূলি ঃ অধ্যায় ২ ; হিউয়েস্-লন্‌ডি ঃ অধ্যায় ৯ ; দাস ঃ অধ্যায় ৯, ১০ ।

১২

বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়

কোপি ঃ অধ্যায় ২ ; ফ্যারিস্ ঃ অধ্যায় ৩ ; হিউয়েজ-লন্‌ডি ঃ অধ্যায় ৪, ৫ ; দাস ঃ অধ্যায় ১০ ।

১৩

সাতপ্রকার বাক্য সম্বন্ধ

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ বিভাগ ২৬ ; দা[illegible] অধ্যায় ৮ ।

১৪

বিভিন্ন সত্যাপেক্ষ বাক্যের পারস্পরিক সম্বন্ধ

এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ বিভাগ ২৬ ; দাস ঃ অধ্যায় ৯ বিভাগ ১০ ।

১৫

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ ঃ আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

কোয়াইন্ (২) ঃ বিভাগ ৫, ৬, ৭ ।

১৬

সত্যশাখী পদ্ধতি

জেফ্‌রি ঃ অধ্যায় ৪ ; হজেস্ ঃ বিভাগ ১০, ২০, ২৫ ।

১৭
বিহিতাকার

ফ্যারিস্ ঃ অধ্যায় ৫ ; কোয়াইন্ (১) ঃ বিভাগ ২২ ; হিউয়েস্-লন্‌ডি ঃ অধ্যায় ১১ ; কোয়াইন্ (২) ঃ বিভাগ ১০ ।

১৮
প্রতিমানতা

কোয়াইন্ (১) ঃ বিভাগ ২১ ; কোয়াইন্ (২) বিভাগ ১১ ; দাস ঃ অধ্যায় ৯, বিভাগ ৯ ।

১৯
অবরোহ পদ্ধতি

কোপি ঃ অধ্যায় ৩ ; সুপিস্ ঃ অধ্যায় ২ ; ফ্যারিস্ ঃ অধ্যায় ৪ ; ফিস্ক্ ঃ বিভাগ ৯, ১০ ; কূলি ঃ অধ্যায় ৩ ; দাস ঃ অধ্যায় ১২ ।

২০
অবরোহতন্ত্রীকরণ ঃ PM তন্ত্র

রাসেল্-হোয়াইটহেড্ ঃ ৯[illegible]৬ পৃঃ ; ইটন্ ঃ তৃতীয় খণ্ড, অধ্যায় ১ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ ঃ অধ্যায় ৮ ; ব্যাসন্-ওকনার ঃ অধ্যায় ৪ ; টার্‌স্কি ঃ অধ্যায় ৬ ; হিউয়েস্-লন্‌ডি ঃ অধ্যায় ১২-১৮ ।

অনুক্রমণী